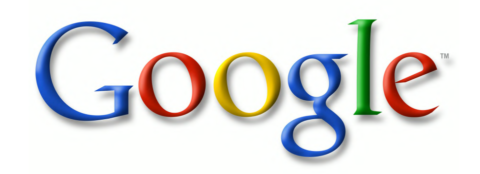
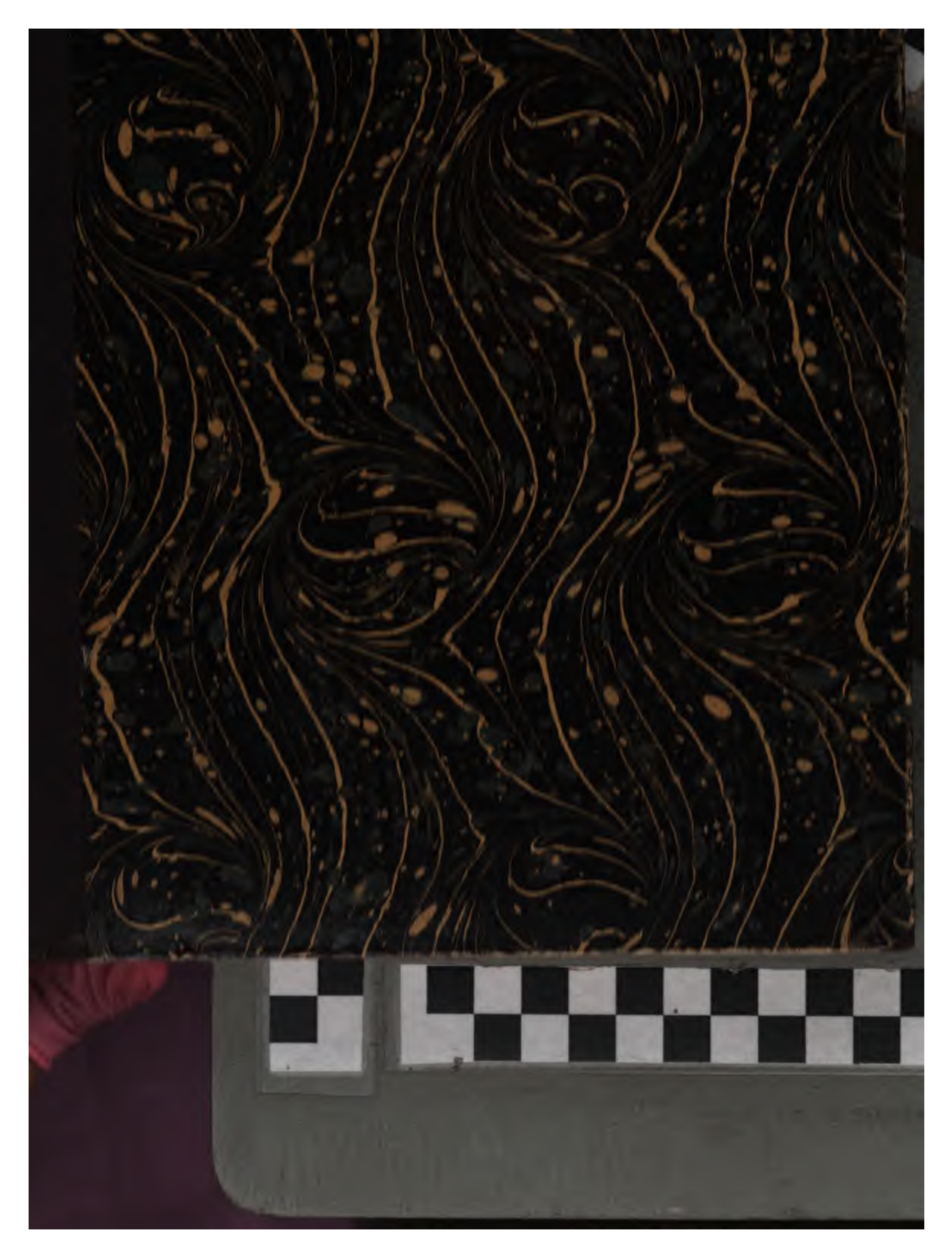

Google



15

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

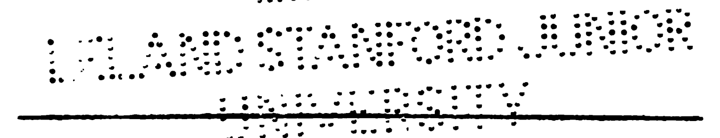
---

Herausgegeben

von

**A. L. Crelle.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.




---

**Ein und zwanzigster Band.**

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

---

Berlin, 1840.
Bei G. Reimer.
Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de M^me V^e Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

# Inhaltsverzeichnifs

## des ein und zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

---

### I. Reine Mathematik.

#### 1. Analysis.

## 2. Geometrie.



## 3. Mechanik.

# 1.

# Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres.

## *Seconde partie**).

Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet.*

---

### §. 7.

Nous allons maintenant développer les conséquences qui dérivent des équations établies dans les 4 premiers numéros du §. précédent, en commençant par celles qui s'obtiennent indépendamment de la sommation des deux séries générales contenues dans les expressions de $h$. Nous passerons ensuite à celles qui résultent de cette sommation, que l'on peut effectuer soit par l'intégration d'une fraction rationnelle soit au moyen des séries connues de sinus ou de cosinus.

Reprenons l'équation (17), dans laquelle les deux sommations relatives à $n$ doivent s'étendre à tous les entiers positifs impairs et premiers au déterminant négatif $D$. Si dans la première de ces deux sommes l'on écrit $n'$ à la place de $n$, l'équation pourra prendre la forme

$$1.\quad \Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma' \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \dots\\ = 2\Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{(nn')^s},$$

le signe $\Sigma$ indiquant une double sommation relative à $n$ et $n'$. Il est facile de donner à cette série la forme d'une série simple, en réunissant en un seul tous les termes pour lesquels le produit $nn'$ a la même valeur. On aura ainsi pour terme général $\sigma_n \frac{1}{n^s}$, $n$ ayant toujours la même signification que précédemment, et $\sigma_n$ désignant l'excès du nombre des diviseurs $k$ de $n$ qui satisfont à la condition $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = 1$, sur celui de ces diviseurs qui satisfont à la condition opposée $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = -1$. Le pre-

---

*) La première partie de ces Recherches a été imprimée dans le tome XIX. de ce Journal, pag. 324.

mier membre peut également se réduire à une série simple de forme analogue et dont le terme général a pour coëfficient le nombre qui exprime combien de fois l'entier $n$ peut être représenté par la totalité des formes quadratiques, en attribuant aux indéterminées $x$ et $y$ de ces formes des valeurs quelconques positives ou négatives, premières entre elles ou non. En désignant le nombre dont il s'agit par $\tau_n$, on aura

$$\Sigma \tau_n \frac{1}{n^s} = 2 \Sigma \sigma_n \frac{1}{n^s}.$$

Cette équation ayant lieu pour toute valeur de l'indéterminée $s$, supérieure à l'unité, il est facile d'en conclure qu'on a $\tau_n = 2\sigma_n$.

Ce résultat et celui qui se déduit de la même manière de l'équation (20), après en avoir mis le second membre sous la forme

$$2\Sigma \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{(2nn')^s}$$

peuvent être réunis dans l'énoncé commun que voici et dans lequel nous distinguons en formes de première et de seconde espèce celles que nous avons appelées précédemment proprement et improprement primitives*).

„$n$ étant un entier positif impair et premier au déterminant négatif $D$, si l'on désigne par $\sigma$ l'excès du nombre des diviseurs $k$ de $n$ qui „sont tels qu'on ait $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = 1$, (où $\delta$, $\varepsilon$ et $P$ ont la signification que „nous avons fixée au §. 6.) sur celui de ces diviseurs qui remplissent la „condition opposée $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = -1$, le double du nombre $\sigma$ exprimera „de combien de manières différentes l'entier $n$ $(2n)$ est susceptible d'être „représenté par le système complet des formes de première (seconde) „espèce, dont $D$ est le déterminant."

Il importe de remarquer que ce résultat présente les mêmes cas d'exception que le théorème I. du §. 4., et que le nombre des représentations est respectivement pour ces deux cas $4\sigma$ ou $6\sigma$.

*) J'ai cru devoir sur ce point m'écarter de la terminologie adoptée dans les Disq. arithm., pour pouvoir conserver dans les dénominations l'analogie qui existe entre les objets qu'elles servent à désigner. Les formes quadratiques à coëfficients complexes dont nous aurons à nous occuper dans la suite de ces Recherches, présentent sous le rapport dont il s'agit ici, une variété plus grande que ne l'est celle des formes ordinaires, et à laquelle les expressions employées par Mr. *Gaufs* ne s'adapteraient que difficilement. En effet dans les formes de cette nature, le plus grand diviseur commun de $a$, $2b$, $c$ peut être l'unité, le nombre $1+\sqrt{-1}$, ou enfin le nombre 2, en supposant toujours celui de $a$, $b$, $c$ égal à l'unité.

En attribuant à $D$ des valeurs déterminées, on obtient des théorèmes très simples tels que ceux-ci:

„Le nombre des solutions de l'équation $x^2+y^2=n$, est égal au quadruple de l'excès du nombre des diviseurs de $n$ qui ont la forme $4\nu+1$, sur celui des diviseurs compris dans la forme $4\nu+3$."

„Le nombre des solutions de l'équation $x^2+2y^2=n$, est égal ou double de l'excès des diviseurs de $n$, qui sont de l'une des formes $8\nu+1$, 3, sur celui de ces diviseurs qui sont de l'une de celles-ci $8\nu+5$, 7."

et ainsi de suite.

Le premier de ces théorèmes particuliers était déjà connu. Mr. *Jacobi* qui l'avait d'abord conclu du rapprochement de deux séries qui appartiennent à la théorie des fonctions elliptiques, en a donné depuis une démonstration purement arithmétique *).

On peut par des considérations du même genre parvenir au résultat général énoncé ci-dessus, en partant du théorème déjà cité du §. 4. C'est ce que nous allons faire voir en peu de mots, en nous bornant au cas où les formes sont de la première espèce, le même raisonnement s'appliquant à l'autre cas. Supposons en premier lieu que les diviseurs simples de $n$ soient tous de l'espèce de ceux que nous avons désignés par $f$, et posons $n=f_1^{\lambda_1}\cdot f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3}\ldots$, $f_1, f_2, f_3\ldots$ désignant des nombres premiers inégaux. Pour faire l'énumération complète de toutes les représentations dont $n$ est susceptible, nous les rangerons en groupes, en comprenant dans le même groupe celles de ces représentations pour lesquelles le plus grand diviseur commun des indéterminées $x$ et $y$ a la même valeur $l$, dont le quarré devra évidemment diviser $n$. Il est évident que le nombre des représentations contenues dans un pareil groupe, est le même que celui des représentations de l'entier $\frac{n}{l^2}$, en assujétissant les indéterminées $x$ et $y$ à être premières entre elles. Or il résulte de la supposition faite sur la nature de $f_1, f_2, \ldots$ et du théorème déjà cité, que ce dernier nombre est exprimé par $2.2^\mu$, $\mu$ désignant le nombre des diviseurs simples inégaux de $\frac{n}{l^2}$. Tout se réduit donc à déterminer la somme des puissances $2^\mu$ qui correspondent aux entiers de la forme $\frac{n}{l^2}$. Pour obtenir cette somme,

*) Voyez le Tome XII. de ce Journal pag. 167.

considérons le polynome

$$F_1 = 2f_1^{\lambda_1} + 2f_1^{\lambda_1 - 2} + 2f_1^{\lambda_1 - 4} + \dots.$$

qui doit être continué tant que les exposants ne deviennent pas négatifs, et dans lequel le coëfficient du dernier terme est supposé égal à 2 ou à 1, selon que l'exposant de ce terme a la valeur 1 ou 0. Le produit développé de ce polynome et des polynomes analogues relatifs à $f_2, f_3, \dots$ étant évidemment composé de tous les termes de la forme $2^\mu \frac{n}{P}$, on obtiendra la somme des puissances $2^\mu$, en remplaçant les nombres $f_1, f_2, \dots.$ par l'unité. Mais par ce changement $F_1, F_2, \dots.$ deviendront respectivement $\lambda_1+1$, $\lambda_2+1, \dots.$, d'où l'on conclut que le nombre des représentations qu'il s'agit d'obtenir, est égal au double du produit $(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\dots.$, produit qui, comme l'on sait, exprime le nombre des diviseurs de $n$. On voit que dans ce premier cas, le résultat est conforme à l'énoncé général, puisque dans ce cas, où les diviseurs remplissent tous la première des deux conditions exprimées dans cet énoncé, le nombre des diviseurs ne diffère pas de l'excès désigné par $\sigma$. Passons maintenant au cas général où $n$ renferme aussi des nombres premiers $g$, tels qu'on ait

$$\delta^{\frac{g-1}{2}} \varepsilon^{\frac{g^2-1}{8}} \left(\frac{g}{P}\right) = -1,$$

et posons

$$n = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots. \times g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} \dots.$$

Il est facile de conclure du cas déjà examiné que dans cette supposition le nombre des représentations dont $n$ est susceptible, sera exprimé par $2(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\dots.$, lorsque les exposants $\nu_1, \nu_2, \dots.$ sont tous pairs, et se réduit au contraire à zéro, lorsque cette circonstance n'a pas lieu. Nous avons donc à prouver que l'excès $\sigma$ a la valeur $(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\dots.$ ou la valeur zéro, selon que $n$ se trouve dans le premier ou le second de ces deux cas. Pour y parvenir, faisons le produit des expressions

$$1+f_1+\dots.+f_1^{\lambda_1}, \quad 1+f_2+\dots.+f_2^{\lambda_2}, \dots., \quad 1+g_1+\dots.+g_1^{\nu_1}, \dots.$$

dont les différents termes donnent tous les diviseurs de $n$. L'un quelconque de ces diviseurs étant désigné par $k$, on aura $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = \pm 1$, le signe supérieur ou inférieur ayant lieu, selon que le nombre des facteurs $g_1, g_2, \dots.$ contenus dans $k$ sera pair ou impair. On conclut de là que le produit

précédent se changera en $\sigma$, si l'on y fait $1=f_1=f_2=\dots$, $-1=g_1=g_2=\dots$ Le produit deviendra ainsi

$$(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\dots\times\frac{1-(-1)^{\nu_1+1}}{2}\cdot\frac{1-(-1)^{\nu_2+1}}{2}\dots$$

et il est évident que cette expression est en effet $(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\dots$, lorsque $\nu_1$, $\nu_2$, .... sont tous pairs, et zéro dans tout autre cas.

Les résultats précédents sont relatifs au cas où le déterminant $D$ est un entier négatif. Il existe des propriétés analogues pour les formes dont le déterminant est positif. Pour établir ces propriétés, on peut faire usage des séries que nous avons considérées dans les No. III. et IV. du §. 6. On peut aussi y parvenir par des raisonnements purement arithmétiques entièrement semblables à ceux que nous venons d'indiquer, et en prenant pour point de départ le théorème III. du §. 4.

Il serait donc inutile d'entrer dans de nouveaux détails à cet égard, et nous nous bornerons à énoncer les résultats qui se rapportent aux formes à déterminant positif. Mais il est bon de faire précéder cet énoncé d'une remarque propre à le simplifier et qui concerne les conditions auxquelles les coëfficients des formes à déterminant positif ont été assujéties dans les §. 4. et 6. On y a supposé que les coëfficients de chacune de ces formes, telle que $ax^2+2bxy+cy^2$, étaient les deux premiers positifs, le troisième négatif. Or de ces conditions la première et la troisième sont seules nécessaires, et tout ce qui a été démontré dans les §§. cités, subsiste également lorsque $b$ est négatif ou zéro. Nous n'avons en effet nulle part eu égard au signe du coëfficient moyen, si ce n'est dans le No. III. du §. 6., pour prouver que l'expression $ax^2+2bxy+cy^2$ est positive, lorsqu'on y suppose

$$x>0,\quad y>0,\quad y\leqq\frac{aU}{T-bU}x.$$

Mais il est facile de voir que ce résultat ne dépend pas non plus du signe de $b$. Pour s'en assurer, on remarquera que la dernière des inégalités précédentes peut se mettre sous la forme $(ax+by)U\geqq yT$, d'où l'on conclut, le second membre étant positif, $(ax+by)^2U^2\geqq y^2T^2$. On a d'un autre côté, $T^2>DU^2$, et par suite en multipliant, $(ax+by)^2>Dy^2$, ou ce qui revient au même, le coëfficient $a$ étant positif, $ax^2+2bxy+cy^2>0$; ce qu'il s'agissait de prouver.

En ayant égard à la rémarque qui vient d'être faite, et désignant comme précédemment par $\omega$ l'unité ou le nombre 2, selon qu'il s'agira de formes de première ou de seconde espèce, on pourra réunir les résultats dont il s'agit dans l'énoncé suivant. *)

„$D$ étant un entier positif (non-quarré) et $T$ et $U$ désignant les plus petites valeurs positives de $t$ et $u$ (autres que $\omega$ et 0) qui satisfont à l'équation $t^2 - Du^2 = \omega^2$, supposons que $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$, .... soient les formes différentes de première (seconde) espèce, ayant le nombre $D$ pour déterminant, ces formes étant tellement choisies que les coëfficients de $x^2$ soient tous positifs, et ceux de $y^2$ tous négatifs; supposons encore que les indéterminés $x$ et $y$ ne doivent recevoir que des valeurs positives, et soient de plus assujéties dans la première de ces formes à la condition $y \leqq \frac{aU}{T - bU} x$, et dans les autres à des conditions analogues. Cela étant et $n$ désignant un entier positif, impair et premier à $D$, je dis que le nombre des représentations différentes dont $\omega n$ est susceptible au moyen des formes données, est égal à l'excès du nombre des diviseurs $k$ de $n$, pour lesquels l'expression $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right)$ a la valeur 1, sur celui de ces diviseurs qui donnent à la même expression la valeur $-1$."

Pour appliquer ce théorème à un cas particulier, soit $D = 2$. On a alors $\omega = 1$, $T = 3$, $U = 2$, $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$, $P = 1$, et le système complet des formes se réduit à un seul terme, pour lequel nous pouvons prendre la forme $x^2 - 2y^2$. Le résultat relatif à ce cas, est donc:

„Si dans l'équation $x^2 - 2y^2 = n$, où $n$ est impair et positif, les indéterminées $x$ et $y$ ne sont susceptibles que de valeurs positives et en outre telles qu'on ait $3y \leqq 2x$, le nombre des solutions de cette équation sera exprimé par l'excès du nombre des diviseurs de $n$ qui ont l'une des formes $8\nu \pm 1$, sur celui de ces diviseurs qui sont de l'une de celles-ci $8\nu \pm 5$."

Comme dans l'équation (1) établie ci-dessus de même que dans les trois équations analogues que pour abréger nous nous sommes dispensés d'écrire, les deux membres sont égaux par groupes de termes, en ce sens que le terme unique qui résulte de la réunion de tous les termes particuliers du

---

*) Je saisirai cette occasion pour faire remarquer une faute d'impression qui s'est glissée dans les théorèmes I. et II. du §. 4. Au lieu de „facteurs simples inégaux de $D$" il faut lire „facteurs simples inégaux de $m$."

second membre, pour lesquels le produit $nn'$ a une valeur déterminée, est identique à celui qui provient dans le premier de tous les termes particuliers pour lesquels les formes quadratiques ont cette même valeur déterminée, on voit que la vérité de ces équations est indépendante de la forme particulière de la fonction qui y entre, et que cette fonction qui dans ces équations telles qu'elles se sont présentées d'abord, est une puissance de l'exposant $-s$, peut être remplacée par une fonction entièrement arbitraire. Il viendra ainsi, en n'écrivant toujours que l'équation qui se rapporte au premier des quatre cas généraux:

$$2. \quad \Sigma'\varphi(ax^2+2bxy+cy^2)+\Sigma'\varphi(a'x^2+2b'xy+c'y^2)+\cdots$$
$$=2\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\varphi(nn'),$$

les signes sommatoires ayant toujours la même signification. Il faut seulement ajouter que la fonction désignée par la caractéristique $\varphi$ doit être telle que les séries précédentes soient convergentes et du nombre de celles que nous avons appelées séries de première espèce. Cette condition se trouvera remplie, par exemple, si l'on suppose $\varphi(z)=q^z$, $q$ étant une constante réelle ou imaginaire, dont la valeur numérique ou le module soit moindre que l'unité. Ce cas est surtout remarquable, en ce qu'il permet d'effectuer l'une des sommations dans le second membre et de transformer les séries doubles contenues dans le premier, en sommes de produits de séries simples, de sorte que l'équation exprime alors un rapport entre certaines séries simples qui sont précisément celles qui se présentent dans la théorie des fonctions elliptiques. La simplification dont nous parlons, n'a toutefois lieu que pour l'équation (2) et pour l'autre équation analogue qui se rapporte à une valeur négative de $D$; elle ne s'étend pas au cas où le déterminant est positif. On peut bien dans ce dernier cas exécuter encore l'une des sommations indiquées dans le second membre, mais les conditions d'inégalité auxquelles sont assujéties celles relatives à $x$ et $y$ empêchent que les séries doubles en $x$ et $y$ ne soient transformées en produits de séries simples.

Comme les formules auxquelles on se trouve conduit par la réduction dont nous venons de parler, sont nouvelles et paraissent présenter quelque intérêt, nous indiquerons brièvement la manière dont on peut l'effectuer. L'équation (2), lorsqu'on y attribue à la fonction $\varphi$ la forme ex-

ponentielle, se change en celle-ci

$$3. \quad \Sigma' q^{ax^2+2bxy+cy^2} + \Sigma' q^{a'x^2+2b'xy+c'y^2} + \ldots = 2\Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) q^{nn'}.$$

Dans le cas particulier où les coëfficients moyens $b$, $b'$, .... sont tous égaux à zéro, le premier membre se présente immédiatement comme la somme d'un nombre limité de produits de séries simples. Soit, par exemple, $D = -2$; il n'existe alors que la seule forme $x^2 + 2y^2$, et la somme $\Sigma' q^{x^2+2y^2}$, dans laquelle $x^2 + 2y^2$ ne doit recevoir que des valeurs impaires, devra s'étendre à tous les entiers impairs $x$, et à tous les entiers pairs ou impairs $y$. En réunissant les termes qui répondent à des valeurs opposées de $x$ ou de $y$, le premier membre prendra la forme de ce produit

$$2(q + q^{3^2} + q^{5^2} + \text{etc.})(1 + 2q^2 + 2q^{2.2^2} + 2q^{2.3^2} + \text{etc.}).$$

Quant au second membre, comme l'on a $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$, $P = -1$, il deviendra $2\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}} q^{nn'}$, le signe $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs positives et impaires de $n$ et de $n'$. En effectuant la sommation par rapport à $n'$, on aura $2\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}} \frac{q^n}{1-q^{2n}}$. On a donc dans ce cas particulier

$$(q + q^9 + q^{25} + \text{etc.})(1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \text{etc.})$$
$$= \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \text{etc.},$$

équation facile à vérifier par les formules connues de la théorie des fonctions elliptiques.

Passons à un cas plus général et qui suffira pour montrer de quelle manière la réduction dont il est question, pourra être effectuée quelle que soit la valeur négative attribuée à $D$. Soit $D = -p$, $p$ désignant un nombre premier $4\nu + 3$. Dans cette supposition on a $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $P = -p$; le second membre deviendra donc, en mettant au lieu de $\left(\frac{n}{-p}\right)$ l'expression équivalente $\left(\frac{n}{p}\right)$,

$$2\Sigma \left(\frac{n}{p}\right) q^{nn'}.$$

Comme $n$ et $n'$ doivent recevoir toutes les valeurs positives impaires et premières à $p$, l'expression précédente, en y effectuant la sommation relative à $n'$, se changera en

$$4. \quad 2\Sigma \left(\frac{n}{p}\right) \frac{q^n}{1-q^{2n}} - 2\Sigma \left(\frac{n}{p}\right) \frac{q^{np}}{1-q^{2np}}.$$

Considérons maintenant l'une des sommes doubles contenues dans le premier membre, la première par exemple. D'après ce que nous avons vu au §. 5., les valeurs simultanées que $x$ et $y$ doivent obtenir dans cette somme, peuvent être distribuées en un certain nombre de systèmes de la forme $x=2pu+\alpha$, $y=2pv+\gamma$, où $\alpha$ et $\gamma$ sont des entiers déterminés et $u$ et $v$ des entiers indéterminés qui doivent prendre toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $\infty$. On aura donc pour la somme partielle qui répond à ce système, en mettant $ax^2+2bxy+cy^2$ sous la forme $\frac{1}{a}((ax+by)^2+py^2)$,

$$\Sigma\, q^{\frac{1}{a}(2p(au+bv)+a\alpha+b\gamma)^2}\, q^{\frac{p}{a}(2pv+\gamma)^2}$$

Décomposons maintenant cette somme partielle à son tour en d'autres sommes, en écrivant successivement $av$, $av+1, \ldots,$ $av+a-1$ à la place de $v$. On aura ainsi pour l'une quelconque de ces nouvelles sommes partielles, dont le nombre est $a$, l'expression suivante qui se rapporte à la substitution de $av+\lambda$, et dans laquelle on a fait pour abréger, $2pb\lambda+a\alpha+b\gamma=k$, $2p\lambda+\gamma=l$,

$$\Sigma\, q^{\frac{1}{a}(2pa(u+bv)+k)^2}\, q^{\frac{p}{a}(2pav+l)^2}.$$

Or, si l'on considère maintenant la sommation relative à $u$ comme devant être effectuée la première, rien n'empêche de remplacer $u+bv$ par $u$, et le résultat prend la forme d'un produit de deux séries simples

$$5. \qquad \Sigma\, q^{\frac{1}{a}(2pau+k)^2}\, \Sigma\, q^{\frac{p}{a}(2pav+l)^2}.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces deux séries peuvent être réduites à la fonction si remarquable que Mr. *Jacobi* a introduite dans la théorie des fonctions elliptiques et qui a pour expression

$$1-q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\text{etc.}$$

D'un autre côté, on peut aussi réduire aux fonctions elliptiques les deux séries (4), en combinant les formules connues de cette théorie avec les belles expressions que Mr. *Gauss* a données pour exprimer $\left(\frac{n}{p}\right)$ par une série finie de sinus ou de cosinus.

Les formules que l'on obtient ainsi, me paraissent surtout remarquables en ce que les produits de la forme (5), qui composent le premier membre, dépendent quant à leur nombre et quant aux constantes $a$, $k$, $l$ qu'ils renferment, du nombre et des coëfficients des formes quadratiques différentes qui ont lieu pour le déterminant correspondant, et il y a lieu d'espérer qu'en approfondissant le rapprochement que nous venons d'indiquer, on par-

viendra à des résultats plus importants et qui pourront jeter un nouveau jour sur la nature des formes quadratiques à déterminant négatif. C'est du moins la considération qui me détermine à proposer cet aperçu, tout incomplet qu'il est, à l'attention des géomètres.

§. 8.

Nous nous proposons dans ce §. 1°. d'établir la relation très simple qui existe entre les nombres des formes de première et de seconde espèce qui répondent au même déterminant et 2°. d'examiner de quelle manière le nombre des formes d'un déterminant quelconque dépend de celui qui se rapporte à ce déterminant, divisé par le plus grand quarré qu'il contient.

I. Soient $h$ et $h'$ respectivement les nombres des formes de première et de seconde espèce dont le déterminant $D$ est un entier $4\nu+1$. Si nous supposons en premier lieu $D$ négatif, l'équation (19) §. 6., donnera, en observant qu'on a $\delta=1$, $\varepsilon=1$,

$$h=\frac{2}{\pi}\sqrt{D}\,\Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}.$$

Il suffit de comparer cette expression aux équations (21), pour en conclure

$$h=h', \quad D\equiv 1 \pmod{8}; \qquad h=3h', \quad D\equiv 5 \pmod{8}.$$

Il faut seulement ajouter que la seconde de ces équations est en défaut pour $D=-3$, et qu'on a alors $h=h'$.

II. Lorsque $D$ est positif, la relation qui existe entre $h$ et $h'$, résulte de la même manière de la comparaison des équations (23) et (24). Si l'on désigne par $T$, $U$ et $T'$, $U'$, respectivement les plus petites valeurs positives qui satisfont aux équations

$$1.\quad t^2-Du^2=1, \qquad\qquad 2.\quad t'^2-Du'^2=4,$$

la relation dont il s'agit, sera exprimée comme il suit:

$$h=\quad h'\,\frac{\log\frac{1}{2}(T'+U'\sqrt{D})}{\log(T+U\sqrt{D})}, \quad D\equiv 1 \pmod{8};$$

$$h=3h'\,\frac{\log\frac{1}{2}(T'+U'\sqrt{D})}{\log(T+U\sqrt{D})}, \quad D\equiv 5 \pmod{8}.$$

Pour réduire ce résultat à une forme plus simple, nous observerons que les solutions de l'équation (1) sont évidemment toutes comprises dans celles de l'équation (2): il suffit de considérer celles de ces dernières où $t'$ et $u'$ sont pairs et de poser $t=\frac{1}{2}t'$, $u=\frac{1}{2}u'$. Il résulte de là que si $T'$ et $U'$ sont pairs, on a $T=\frac{1}{2}T'$, $U=\frac{1}{2}U'$, et il est facile de voir que ce cas a toujours lieu lorsque $D$ est de la forme $8\nu+1$, puisque dans cette supposition l'équation (2) ne saurait être satisfaite par des valeurs

impaires de $t'$ et $u'$. Reste à considérer le cas où $D$ a la forme $8\nu+5$, et où en même temps $T'$ et $U'$ sont impairs. Comme toutes les solutions positives de l'équation (2), sont données par la formule $\frac{t'+u'\sqrt{D}}{2}=\left(\frac{T'+U'\sqrt{D}}{2}\right)^n$, où $n$ est un entier positif, on conclut de la remarque faite plus haut, que l'on obtiendra les valeurs $T$ et $U$, en déterminant le plus petit exposant $n$ pour lequel $t'$ et $u'$ sont pairs, et en posant ensuite $T=\frac{1}{2}t'$, $U=\frac{1}{2}u'$. Or il est facile de voir que cet exposant est le nombre 3; car en faisant $n=2$, on trouve pour $u'$, la valeur impaire $T'U'$, tandis que celle qui répond à $n=3$, et qui est $\frac{1}{4}U'(3T'^2+DU'^2)$, est évidemment paire. On a donc $T+U\sqrt{D}=\left(\frac{T'+U'\sqrt{D}}{2}\right)^3$. En appliquant les résultats précédents aux deux équations données ci-dessus, on voit que pour un déterminant de la forme $8\nu+1$, on a toujours $h=h'$, et que lorsque $D$ a la forme $8\nu+5$, tout dépend des entiers $T'$ et $U'$; selon que ces entiers seront pairs ou impairs, on aura $h=3h'$ ou $h=h'$.

III. Venant à la seconde des questions énoncées ci-dessus, nous remarquerons d'abord qu'après avoir établi dans ce qui précède, le rapport qui a lieu entre les formes de première et de seconde espèce qui appartiennent au même déterminant, nous pouvons dans la question qui nous reste à traiter, considérer les formes qu'il s'agit de comparer, quant à leur nombre, comme appartenant à la première espèce. Soient $D$ et $D'=DS^2$, les deux déterminants, $D$ n'ayant pas de facteur quarré et $S$ étant supposé positif, et désignons par $h$ et $h'$ les nombres des formes qui répondent respectivement à ces deux déterminants. Comme les quantités $\delta$, $\varepsilon$, $P$ sont évidemment les mêmes pour ces deux déterminants, si l'on suppose en premier lieu $D$ négatif, on aura en vertu de l'équation (19) du §. 6.:

$$h=\frac{2\sqrt{D_1}}{\pi}\sum\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},\quad h'=\frac{2S\sqrt{D_1}}{\pi}\sum\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}.$$

Quoique les termes généraux des deux séries contenues dans ces expressions soient de même forme, ces séries ont néanmoins des valeurs différentes. En effet, dans la première équation la sommation doit s'étendre à tous les entiers $n$ impairs et premiers à $D$; tandis que dans la seconde $n$ ne doit recevoir que des valeurs impaires et premières à $D'$. Pour découvrir la relation qui existe entre ces deux sommes, il faut se reporter à l'équation (6) du §. 6. Si l'on suppose dans cette équation $\theta=\delta$, $\eta=\varepsilon$, $P_2=P$, $R_1=1$, on voit que les séries précédentes peuvent être considé-

rées l'une et l'autre comme la limite vers laquelle converge le produit

$$\Pi \frac{1}{1-\delta^{\frac{q-1}{2}}\varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P}\right)\frac{1}{q^s}}$$

lorsque la variable $s$ approche indéfiniment de l'unité; mais il y a cette différence que lorsqu'il s'agit de la première série, il faut exclure de ce produit tous les nombres premiers impairs et positifs $q$ qui divisent $D$, tandis que pour obtenir la seconde série, il faut exclure tous ceux de ces nombres $q$ qui divisent $D' = DS^2$. Il résulte de là que si l'on désigne par $r$, $r'$, $r''$, .... les nombres premiers impairs, positifs et inégaux, contenus dans $D'$, sans l'être dans $D$, le rapport de la première série à la seconde a pour expression

$$\Pi \frac{1}{1-\delta^{\frac{r-1}{2}}\varepsilon^{\frac{r^2-1}{8}}\left(\frac{r}{P}\right)\frac{1}{r}},$$

le signe $\Pi$ s'étendant à toutes les valeurs de $r$ qu'on vient de définir

Au moyen de ce résultat, la comparaison des équations en $h$ et $h'$ donnera celle-ci

$$h' = hS\Pi\left(1-\delta^{\frac{r-1}{2}}\varepsilon^{\frac{r^2-1}{8}}\left(\frac{r}{P}\right)\frac{1}{r}\right),$$

qui exprime la relation cherchée entre $h$ et $h'$. On doit ajouter que cette équation ne s'applique pas au cas où $D = -1$, et qu'il faut dans ce cas doubler son premier membre.

IV. Le cas où $D$ et $D'$ sont positifs, étant susceptible d'une analyse toute semblable, nous nous bornerons à énoncer le résultat qui s'y rapporte. Si l'on désigne par $T$, $U$ et $T'$, $U'$ les plus petites valeurs positives qui satisfont aux équations $t^2 - Du^2 = 1$, $t'^2 - D'u'^2 = 1$, le résultat dont il s'agit, sera

$$h' = hS\frac{\log(T+U\sqrt{D})}{\log(T'+U'\sqrt{D'})}\Pi\left(1-\delta^{\frac{r-1}{2}}\varepsilon^{\frac{r^2-1}{8}}\left(\frac{r}{P}\right)\frac{1}{r}\right),$$

où l'on peut remarquer que le facteur logarithmique équivaut évidemment a l'unité divisée par le plus petit exposant positif $\lambda$ tel que le coëfficient de $\sqrt{D}$ dans la puissance $(T+U\sqrt{D})^\lambda$ développée soit divisible par $S$.

Nous observons en finissant ce §. et avant de nous occuper de la sommation mentionnée au commencement du précédent §., que les deux questions que nous venons de traiter, ont déjà été résolues dans l'ouvrage de Mr. *Gaufs* (art. 253—256.), mais par d'autres moyens. Quant aux résultats, on trouve que ceux de l'illustre auteur, identiques aux nôtres dans le cas des déterminants négatifs, en diffèrent essentiellement et se présentent sous une forme plus compliquée, lorsque la comparaison qu'il s'agit de faire, doit porter sur des formes à déterminant positif. (La suite au prochain cahier.)

# 2.

# Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel, nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen.

(Von Herrn *C. G. J. Jacobi*, Professor ord. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

---

Das erste Beispiel einer nach aufsteigenden Potenzen fortschreitenden Reihe, in welcher die Exponenten eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden, hat *Euler* in der *Introductio in analysin infinit.* gegeben. Er findet nämlich in dem Capitel *de partitione numerorum* §. 323. durch Induction, dafs die Entwicklung des unendlichen Products:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$$

eine Reihe giebt, deren allgemeines Glied

$$(-1)^m x^{\frac{3m^2 \pm m}{2}}$$

ist. Man hat also, da $3m^2-m$ aus $3m^2+m$ erhalten wird, wenn man $-m$ statt $+m$ setzt,

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots. = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}$$

Dies interessante Resultat, welches *Euler* später in den Schriften der Petersburger Akademie höchst scharfsinnig bewiesen hat, ist eine unmittelbare Folge der Entwicklungen, welche die Theorie der elliptischen Functionen darbietet. (Siehe *Fundam. nova funct. ellipt.* §. 66. Gleichung 6.) Die Theorie der elliptischen Functionen giebt aber nicht allein die Entwicklung des obigen unendlichen Products, sondern sie giebt auch die Entwicklung des Cubus dieses Products, und zwar für denselben eine Reihe, in welcher die Exponenten ebenfalls eine arithmetische Progression zweiter Ordnung, die Trigonalzahlen, bilden, nämlich die Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

Es geht hieraus das merkwürdige und in der Analysis bis jetzt einzig dastehende Resultat hervor:

$$\{1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots.\}^3 = 1-3x+5x^3-7x^6\ldots.,$$

oder

$$1. \quad \left\{\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}\right\}^3 = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

(Siehe *Fundam. nova funct. ellipt.* §. 66. Gleichung 7.) Es ist mir wenigstens keine Reihe, in welcher die Exponenten dieser Potenzen eine arithmetische Progression 2ter Ordnung bilden, bekannt, von welcher der Cubus oder eine andre Potenz wieder eine solche Reihe gäbe. Je merkwürdiger aber diese Formel sein dürfte, desto mehr, glaube ich, wird es der Mühe werth sein, zu zeigen, dafs sich dieselbe unabhängig von jeder andern Theorie auf ganz elementarem Wege beweisen läfst.

Nehmen wir in der Gleichung (1) von beiden Seiten die Logarithmen, differentiiren nach $x$ und multipliciren mit $2x$, so ergiebt sich:

$$\frac{3\Sigma(-1)^m(3m^2+m)\,x^{\frac{3m^2+m}{2}}}{\Sigma(-1)^m\,x^{\frac{3m^2+m}{2}}} = \frac{\Sigma(-1)^n(2n+1)(n^2+n)\,x^{\frac{n^2+n}{2}}}{\Sigma(-1)^n(2n+1)\,x^{\frac{n^2+n}{2}}},$$

oder wenn wir die Nenner fortschaffen und Alles auf eine Seite bringen:

$$\Sigma\,\Sigma(-1)^{m+n}(2n+1)\{3(3m^2+m)-(n^2+n)\}\,x^{\frac{3m^2+m}{2}+\frac{n^2+n}{2}} = 0,$$

in welcher Gleichung für $n$ alle ganze Zahlen von 0 inclus. bis $+\infty$, und für $m$ alle ganze Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu setzen sind. Der Ausdruck

$$3(3m^2+m)-(n^2+n)$$

läfst sich in die beiden Factoren

$$3m-n, \quad 3m+n+1$$

zerlegen. Wir können ferner, da die Gleichung (2) für jeden Werth von $x$ bestehen soll, für $x$ irgend eine Potenz von $x$ setzen und auch die ganze Gleichung mit einer Potenz von $x$ multipliciren. Wenn man auf diese Weise $x^{24}$ für $x$ schreibt, so wird der Exponent von $x$ im allgemeinen Gliede

$$36m^2+12m+3(4n^2+4n) = (6m+1)^2+3(2n+1)^2-4;$$

multipliciren wir nun noch mit $x^4$, so geht die Gleichung (2) über in:

$$\Sigma\,\Sigma(-1)^{m+n}(2n+1)(3m-n)(3m+n+1)\,x^{(6m+1)^2+3(2n+1)^2} = 0.$$

Setzen wir hierin

$$3. \qquad 6m+1 = a, \quad 2+1 = b,$$

so dafs

$$3m+n+1 = \frac{a+b}{2}, \quad 3m-n = \frac{a-b}{2},$$

$$(-1)^{m+n} = (-1)^{3m-n} = (-1)^{\frac{a-b}{2}}$$

wird, so erhalten wir:

$$4. \qquad \Sigma(-1)^{\frac{a-b}{2}}\,b(a^2-b^2)\,x^{a^2+3b^2} = 0,$$

welche Summation sich auf alle *positiven* und *negativen* Zahlen $a$ der Form $6m+1$ und auf alle *positiven* ungeraden Zahlen $b$ bezieht.

So wie wir jetzt die Gleichung (4) aus der Gleichung (1) abgeleitet haben: eben so erhält man (1) als Folge von (4), wenn man denselben Weg umgekehrt geht. Wir haben daher nur unser Augenmerk auf die Verification der Gleichung (4) zu richten; indem durch dieselbe zugleich die Gleichung (1) bewiesen wird.

Da die Gleichung (4) für jeden Werth von $x$ bestehen soll, so müssen diejenigen Glieder, für welche $a^2+3b^2$ denselben Werth erhält, für sich genommen verschwinden. Wir werden sehen, dafs dies in der That geschieht, und zwar so, dafs immer zwei Glieder denselben Coefficienten mit entgegengesetztem Zeichen erhalten und daher einander aufheben. Da nämlich $a$ und $b$ ungerade sind, so giebt die Formel

$$a^2+3b^2 = \left(\frac{a\mp 3b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a\pm b}{2}\right)^2$$

zwei neue Paare ganzzahliger Werthe $a'$, $b'$, für welche $a'^2+3b'^2$ denselben Werth erhält wie $a^2+3b^2$, und zwar:

$$a' = \frac{a-3b}{2}, \qquad b' = \frac{a+b}{2},$$

$$a' = \frac{a+3b}{2}, \qquad b' = \frac{a-b}{2}.$$

Da aber $a'$ und $b'$ eben so gut negativ als positiv sein können, so hat man im Ganzen 8 Paare von Werthen der Zahlen $a'$ und $b'$, welche in den beiden Formeln enthalten sind:

$$5. \quad a' = \pm\frac{a-3b}{2}, \qquad b' = \pm\frac{a+b}{2},$$

$$6. \quad a' = \pm\frac{a+3b}{2}; \qquad b' = \pm\frac{a-b}{2}.$$

Aber damit diese Formeln auf ein neues Glied der Reihe (4) führen, müssen $a'$ und $b'$ denselben Bedingungen unterworfen sein als $a$ und $b$; es mufs nämlich $a'$ durch 6 dividirt den Rest $+1$ lassen und $b'$ ungerade und positiv sein. Es wird sich zeigen, dafs von den acht Paaren von Werthen, welche in (5) und (6) enthalten sind, nur ein einziges diesen Bedingungen zugleich genügt.

In der That, da die Summe der beiden Zahlen $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$ gleich $a$ und $a$ ungerade ist, so mufs eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade sein. Wir wollen die ungerade mit $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ bezeichnen, so dafs

$\varepsilon = +1$, wenn $\frac{a+b}{2}$ ungerade, $\frac{a-b}{2}$ gerade, $\varepsilon = -1$, wenn $\frac{a+b}{2}$ gerade, $\frac{a-b}{2}$ ungerade ist, oder in Zeichen:

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

Hiernach mufs

$$b' = \pm\frac{a+\varepsilon b}{2}$$

sein, damit die Bedingung, dafs $b'$ eine ungerade Zahl sei, erfüllt werde. Zu diesem Werth von $b'$ gehört der Werth von $a' = \pm\frac{a-3\varepsilon b}{2}$: also haben wir

$$a' = \pm\frac{a-3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \pm\frac{a+\varepsilon b}{2}.$$

Von den 4 Paaren von Werthen, die in diesen Formeln enthalten sind, können wir sogleich wieder zwei ausscheiden; denn da $b'$ positiv sein soll, so müssen wir das $\pm$ Zeichen vor $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ so bestimmen, dafs $\pm\frac{a+\varepsilon b}{2}$ positiv wird. Man bestimme daher $\varepsilon'$ so $= \pm 1$, dafs $\varepsilon'.\frac{a+\varepsilon b}{2}$ positiv werde, so ist $b' = \varepsilon'.\frac{a+\varepsilon b}{2}$: also haben wir

$$a' = \pm\frac{a-3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \varepsilon'.\frac{a+\varepsilon b}{2}.$$

Ueber die jetzt noch übrige Zweideutigkeit des Zeichens können wir leicht entscheiden; die Formel für $a'$ zeigt nämlich, dafs, je nachdem das obere oder das untere Zeichen genommen wird, $2a'-a$ oder $2a'+a$ durch 3 theilbar ist; aber da $a' = 6m'+1$ sein soll und $a$ von derselben Form ist, so kann nur $2a'+a$ durch 3 theilbar sein, während $2a-a$ den Rest 1 läfst: es gilt also das untere Zeichen und wir haben

$$a' = -\frac{a-3\varepsilon b}{2}.$$

Dafs durch diese Formel $a'$ wirklich von der Form $6m'+1$ wird, ist leicht zu zeigen; denn hierzu ist nur nöthig, dafs es sowohl bei der Division durch 2 als bei der Division durch 3 den Rest 1 läfst. Das Letztere haben wir so eben gezeigt, das Erstere geht daraus hervor, dafs zufolge der Formel für $b'$,

$$a' = \varepsilon' b' + 2\varepsilon b$$

ist; denn hiernach ist $a'$ mit $b'$ zugleich ungerade. Wir haben demnach $a'$ und $b'$ durch die Formeln

$$7.\quad a' = -\frac{a-3\varepsilon b}{2};\qquad b' = \varepsilon'.\frac{a+\varepsilon b}{2}$$

zu bestimmen, wo $\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}$ und $\varepsilon' = \pm 1$, je nachdem $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ positiv oder negativ ist; alsdann sind $a'$ und $b'$ ein Paar von neuen Werthen, welche $a$ und $b$ in der Summe (4) annehmen können, und für welche der Exponent $a^2+3b^2$ seinen Werth unverändert beibehält.

Lösen wir die Gleichungen (7) nach $a$ und $b$ auf, so ergiebt sich:

$$8.\quad a = -\frac{a'-3\varepsilon' b'}{2},\qquad b = \varepsilon.\frac{a'+\varepsilon' b'}{2},$$

welche Gleichungen genau von der Form der Gleichungen (7) sind, nur dafs $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ ihre Rollen vertauscht haben. Dies Resultat ist sehr wichtig, denn es zeigt uns, erstens, dafs $\varepsilon'$ eben so von $a'$ und $b'$ abhängt, wie $\varepsilon$ von $a$ und $b$. Da nämlich $b$ ungerade ist, so folgt aus der Gleichung

$$b = \varepsilon.\frac{a'+\varepsilon' b'}{2},$$

dafs $\varepsilon' = +1$, wenn $\frac{a'+b'}{2}$ ungerade, also $\frac{a'-b'}{2}$ gerade ist, und dafs $\varepsilon' = -1$, wenn $\frac{a'-b'}{2}$ ungerade, also $\frac{a'+b'}{2}$ gerade ist. Es ist also

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{a'-b'}{2}}.$$

Die Gleichungen (8) zeigen ferner, dafs dieselbe Operation, durch welche $a'$ und $b'$ aus $a$ und $b$ abgeleitet worden sind, von den Werthen $a'$ und $b'$ zu $a$ und $b$ geführt haben würde. Die beiden Werthenpaare $a, b$ und $a', b'$ stehen also in einer reciproken Beziehung zu einander, und man würde durch Fortsetzung desselben Verfahrens nur wieder zu den früheren Werthen zurückkehren. Die Gleichung (4) ist verificirt, sobald wir beweisen können, dafs die beiden Coefficienten von $x^{a^2+3b^2} = x^{a'^2+3b'^2}$, welche den Werthen $a, b$ und $a', b'$ entsprechen, einander aufheben. Dieser Beweis läfst sich aber ohne Schwierigkeit führen. Die Summe dieser beiden Coefficienten ist nämlich

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2-b^2) + (-1)^{\frac{a'-b'}{2}} b'(a'^2-b'^2);$$

aber durch Substitution der Werthe von $a'$ und $b'$ aus (7) erhält man

$$a'^2-b'^2 = \frac{(a-3\varepsilon b)^2-(a+\varepsilon b)^2}{4} = -2\varepsilon ab+2b^2 = -2\varepsilon b(a-\varepsilon b),$$

und daher

$$b'(a'^2-b'^2) = -\varepsilon\varepsilon' b(a^2-b^2);$$

folglich wird die Summe der beiden Coefficienten

$$\left\{(-1)^{\frac{a-b}{2}} - \varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}}\right\} b(a^2-b^2).$$

Nun ist

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}, \qquad \varepsilon' = (-1)^{\frac{a'-b'}{2}},$$

folglich

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} - \varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}} = (-1)^{\frac{a-b}{2}} - (-1)^{\frac{a-b}{2}} = 0.$$

Die beiden betrachteten Glieder heben sich also in der That auf, und somit ist die Gleichung (4) verificirt.

Es könnte der Fall eintreten, dafs $a' = a$ und $b' = b$; in diesem Falle mufs der Coefficient von $x^{a^2+3b^2}$, welcher in der Summe (4) aus den Werthen von $a$ und $b$ erhalten wird, sich selbst entgegengesetzt sein oder verschwinden. In der That ergiebt sich, wenn $a' = a$, aus der ersten der Gleichungen (7):

$$3a = 3\varepsilon b, \quad \text{also}$$
$$a = \pm b.$$

Da nun der Coefficient der Reihe (4) den Factor $a^2 - b^2$ hat, so wird derselbe in diesem Fall $= 0$.

Da sich die Formel (1) auf so elementarem Wege beweisen läfst, so ist es nicht ohne Interesse, die Sätze der Zahlentheorie, auf welche sie führt, näher anzugeben. Setzen wir in (1) wieder $x^{24}$ für $x$ und multipliciren auf beiden Seiten der Gleichung mit $x^3$, so erhalten wir

$$9. \quad \{\Sigma(-1)^m x^{(6m+1)^2}\}^3 = \Sigma(-1)^n(2n+1)\,x^{3(2n+1)^2}.$$

In dieser Gleichung bedeutet $m$ alle ganzen positiven oder negativen Zahlen, während $n$ nur die Werthe von positiven ganzen Zahlen annimmt, in beiden Fällen die Null mit eingeschlossen. Setzt man $(6m+1)^2 = a^2$, und läfst $a$ immer positiv sein, so wird $a$ von der Form $6x+1$, wenn $m$ positiv ist, dagegen von der Form $6x-1$, wenn $m$ negativ ist. Man kann daher die Gleichung (9) auch so schreiben:

$$10. \quad \{\Sigma \pm x^{aa}\}^3 = \Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\, b\, x^{3bb},$$

wenn $b$ alle ungeraden positiven, $a$ alle positiven Zahlen von der Form $6k \pm 1$ bedeuten, oder alle ungeraden positiven Zahlen, welche nicht durch 3 theilbar sind. Das Vorzeichen von $x^{aa}$ in der ersten Summe ist positiv zu nehmen, wenn $a$ die Form $12k \pm 1$, und negativ, wenn $a$ die Form $12k \pm 5$ hat.

Da wir die Gleichung (9) oder (10) aus der Gleichung (1) dadurch abgeleitet haben, dafs wir $x^{24}$ statt $x$ gesetzt und hierauf mit $x^3$ multiplicirt haben, so folgt von selbst, da die Exponenten in (9) ganze Zahlen sind, dafs in (10) der Exponent jedes Termes in der Entwicklung des Cubus von

$$\Sigma \pm x^{aa}$$

die Form $24k+3$ haben mufs. In der That wird jeder Exponent in der Entwicklung des Cubus dieser Reihe die Summe dreier ungeraden Quadrate, von denen keines durch 3 aufgeht; und da jedes ungerade Quadrat die Form $8k+1$ hat, so mufs die Summe dreier ungeraden Quadrate durch 8 dividirt den Rest 3 lassen. Es ist ferner jedes Quadrat, das nicht durch 3 aufgeht, von der Form $3k+1$, und die Summe dreier Quadrate, von denen keines durch 3 aufgeht, mufs daher selber durch 3 aufgehn. Die Summe dreier ungeraden Quadrate, von welchen keines durch 3 aufgeht, läfst daher durch 8 dividirt den Rest 3 und geht durch 3 auf oder hat die Form $24k+3$. Umgekehrt kann man zeigen, dafs wenn man irgend eine Zahl von der Form $24k+3$ in drei Quadrate zerfället, jedes der 3 Quadrate ungerade und nicht durch 3 theilbar, oder seine Wurzel von der Form $6k\pm1$ sein mufs, wenn man nur für den Fall, dafs die Zahl durch 9 aufgeht, die Zerfällungen, in denen jedes Quadrat ebenfalls durch 9 oder seine Wurzel durch 3 theilbar ist, ausschliefst. Denn wenn man eine ungerade Zahl in drei Quadrate zerfället, so können entweder nur eines oder alle drei ungerade sein. Da ein ungerades Quadrat die Form $4k+1$ hat und die geraden Quadrate durch 4 aufgehn, so mufs die Zahl im ersten Falle die Form $4k+1$ haben; jede Zahl von der Form $4k+3$ kann daher nur in drei ungerade Quadrate zerfället werden. Wenn man ferner eine durch 3 theilbare Zahl in drei Quadrate zerfället, so kann keines derselben durch 3 aufgehn, wenn nicht jedes durch 3 theilbar ist. Denn da ein Quadrat durch 3 dividirt entweder aufgeht, oder $+1$ zum Rest läfst, so ist die Summe dreier Quadrate, je nachdem keines derselben, eines, zwei oder alle drei durch 3 theilbar sind, im ersten und letzten Falle durch 3 theilbar; im zweiten Falle läfst sie durch 3 dividirt den Rest $+2$, im dritten den Rest $+1$. Wenn man daher den Fall ausschliefst, in welchem *jedes* der drei Quadrate durch 3 und also auch durch 9 theilbar ist, welcher nur eintreten kann, wenn die vorgelegte Zahl selber durch 9 theilbar ist, so kann eine durch 3 theilbare Zahl nur in drei Quadrate zerfället werden, von denen

*keines* durch 3 theilbar ist. Da nun eine Zahl von der Form $24k+3$ sowohl die Form $4k+3$ hat, als auch durch 3 theilbar ist, so kann sie dem eben Bewiesenen zufolge nur in drei ungerade Quadrate zerfället werden, von denen keines durch 3 aufgeht, wenn man für den Fall, dafs die Zahl durch 9 aufgeht, die Zerfällungen in solche drei Quadrate ausschliefst, von denen jedes durch 3 theilbar ist.

Wenn man nach den bekannten Regeln die Reihe

$$\Sigma \pm x^{aa}$$

in die 3te Potenz erhebt, und den Coefficienten von $x^p$ aufsucht, wo $p$ die Form $24\alpha+3$ hat, so giebt jede Zerfällung von $p$ in drei Quadrate, von denen keines durch 3 theilbar ist, entweder die Zahl $\pm 6$, wenn die drei Quadrate alle ungleich sind, oder die Zahl $\pm 3$, wenn zwei der Quadrate gleich sind, oder die Zahl $\pm 1$, wenn die Quadrate alle drei einander gleich sind, als den der besonderen Zerfällung entsprechenden Theil des Totalcoefficienten. Im ersten Fall ist das positive Zeichen zu nehmen, wenn die Wurzel nur eines Quadrates oder die Wurzeln aller drei Quadrate die Form $12k\pm 1$ haben: dagegen das negative Zeichen, wenn keine Wurzel oder wenn zwei die Form $12k\pm 1$ haben. In den beiden andern Fällen, wo $p = aa+2a'a'$ oder $p = 3aa$, ist das positive oder negative Zeichen zu wählen, je nachdem $a$ entweder die Form $12k\pm 1$ oder die Form $12k\pm 5$ hat.

Es sei $C_p$ der Coefficient von $x^p$ in der Entwicklung des Cubus der vorgelegten Reihe, so dafs

$$\{\Sigma \pm x^{aa}\}^3 = \Big\{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m x^{(6m+1)^2}\Big\}^3 = \Sigma\, C_p x^p,$$

wo $p$, wie wir gesehen haben, nur die Form $24k+3$ haben kann. Nennt man nun, wenn $p$ irgend eine Zahl von der Form $24k+3$ ist,

- $A$ die Anzahl aller Zerfällungen von $p$ in drei ungleiche, durch 3 nicht theilbare Quadrate, welche entweder sämmtlich Wurzeln von einer der beiden Formen $12k+1$, $12k-1$ haben, oder von denen eines eine Wurzel von einer der beiden Formen $12k+1$, $12k-1$, die beiden andern dagegen Wurzeln von einer der beiden Formen $12k+5$, $12k-5$ haben;
- $A'$ die Anzahl aller Zerfällungen von $p$ in drei ungleiche, durch 3 nicht theilbare Quadrate, welche entweder sämmtlich Wurzeln von einer der beiden Formen $12k+5$, $12k-5$ haben, oder von denen eines eine Wurzel von einer der beiden Formen $12k+5$, $12k-5$, die beiden

andern dagegen Wurzeln von einer der beiden Formen $12k+1$, $12k-1$ haben;

$B$ die Anzahl aller Zerfällungen von $p$ in die Form $aa+2a'a'$, in welcher $a$ und $a'$ durch 3 nicht aufgehn und von einander verschieden sind, und $a$ eine der beiden Formen $12k+1$, $12k-1$ hat;

$B'$ die Anzahl aller Zerfällungen von $p$ in die Form $aa+2a'a'$, in welcher $a$ und $a'$ durch 3 nicht theilbar und von einander verschieden sind, und $a$ eine der Formen $12k+5$, $12k+5$ hat;

so ist zufolge der früher gemachten Bemerkungen, wenn $p$ nicht das Dreifache eines durch $p$ nicht theilbaren Quadrates ist,

$$C_p = 6(A-A')+3(B-B').$$

Wenn $p$ das Dreifache eines durch 3 nicht theilbaren Quadrates ist, so kommt zu dem Ausdrucke rechts noch $+1$ oder $-1$ hinzu, je nachdem die Wurzel dieses Quadrates eine der Formen $12k+1$, $12k-1$, oder eine der Formen $12k+5$, $12k-5$ hat. Aber die Gleichung (10),

$$\{\Sigma \pm x^{aa}\} = \Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{3bb},$$

in welcher $b$ jede positive ungerade Zahl bedeutet, zeigt, dafs, wenn $p$ nicht das Dreifache eines ungeraden Quadrates ist, der Term $x^p$ in der Entwicklung des Cubus der vorgelegten Reihe gar nicht vorkommt, oder dafs $C_p=0$ ist. Wir erhalten hieraus, *wenn $p$ nicht das Dreifache eines ungeraden Quadrates ist*, die Formel

$$11. \quad „2A+B = 2A'+B',“$$

welche eine merkwürdige Eigenschaft der Zahlen von der Form $24a+3$ in Bezug auf ihre Zerfällung in drei Quadrate ausdrückt. Diese Formel enthält nämlich folgendes

### Theorem I.

Man zerfälle ein Zahl $p$ von der Form $24a+3$, welche nicht das Dreifache eines Quadrats ist, auf alle mögliche Arten in drei Quadrate von der Form $(6m\pm1)^2$, und zähle diese Zerfällungen auf die Art, dafs man immer die Fälle, in welchen alle drei Quadrate von einander verschieden sind, doppelt rechnet: so wird man für die Zerfällungen, in denen eine oder drei der Gröfsen $m$ gerade sind, eben dieselbe Zahl wie für die Zerfällungen erhalten, in denen eine oder drei der Gröfsen $m$ ungerade sind.

Einige Beispiele, welche diesen Satz erläutern können, giebt die folgende Tabelle, in welcher $A$, $A'$, $B$, $B'$ die oben angegebene Bedeu-

tung haben und daher immer

$$2A+B = 2A'+B'$$

sein mufs.

$p = 51 = 1+2.25 = 49+2.1, \quad A=A'=0, \quad B=B'=1.$
$p = 99 = 1+2.49 = 49+2.25, \quad A=A'=0, \quad B=B'=1.$
$p = 123 = 121+2.1 = 25+2.49, \quad A=A'=0, \quad B=B'=1.$
$p = 171 = 169+2.1 = 121+2.25, \quad A=0, \; A'=1, \; B=2, \; B'=0.$
$= 1+49+121.$
$p = 195 = 1+25+169 = 25+49+121; \quad A=A'=1, \quad B=B'=0.$
$p = 219 = 169+2.25 = 121+2.49; \quad A=0, \; A'=1, \; B=1, \; B'=0.$
$= 1+49+169$

u. s. w. u. s. w.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, wenn $p$ das Dreifache eines Quadrates $bb$ ist, für welchen die Gleichung (10) den Werth von $C_p$ ergiebt,

$$C_p = (-1)^{\frac{b-1}{2}} b.$$

Andererseits hat man, wenn $b$ nicht durch 3 theilbar ist,

$$C_p = 6(A-A')+3(B-B') \pm 1,$$

wo das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $b$ die Form $12k\pm1$ oder die Form $12k\pm5$ hat. Wenn $b$ durch 3 theilbar ist, bleibt die frühere Formel

$$C_p = 6(A-A')+3(B-B')$$

unverändert. Denn die zu dem Werthe des Coefficienten hinzukommende Gröfse $\pm 1$ wurde aus den Cuben der einzelnen Termen der Reihe

$$\Sigma \pm x^{(6m+1)^2}$$

erhalten. Da aber die Cuben dieser einzelnen Termen $\pm x^{3(6m+1)^2}$ oder $\pm x^{3(6m-1)^2}$ sind, so wird der Term $x^p$ aus dem Cubus eines Terms der vorgelegten Reihe nur dann erhalten, wenn $p$ das Dreifache eines nicht durch 3 theilbaren Quadrates ist. Wenn man die beiden für $C_p$ angegebenen Ausdrücke mit einander vergleicht, so erhält man, wenn $p$ das Dreifache eines ungeraden Quadrates ist, die Formel

$$12. \quad 2(A-A')+B-B' = (-1)^{\frac{b-1}{2}} \cdot \frac{b+\varepsilon}{3},$$

in welcher $\varepsilon$ eine der Gröfsen 0, +1, −1 bedeutet, und zwar diejenige dieser Gröfsen, für welche $\frac{b+\varepsilon}{3}$ eine ganze Zahl wird. Man kann daher das Theorem I. durch folgendes Theorem ergänzen.

### Theorem II.

Wenn $p$ das Dreifache eines ungeraden Quadrates $p = 3bb$ ist, so sind die beiden Zahlen, welche im Theorem I. einander gleich waren, dieses nicht mehr, sondern die erste ist gröfser als die zweite, wenn $b$ von der Form $4k+1$ ist, und hinwiederum ist die zweite gröfser als die erste, wenn $b$ von der Form $4k+3$ ist; der Ueberschufs der einen über die andere aber ist $\frac{1}{3}b$, wenn $b$ durch 3 aufgeht, oder wenn $b$ nicht durch 3 aufgeht, die dem $\frac{1}{3}b$ nächst gleiche ganze Zahl.

Zur Erläuterung dieses Theorems durch Beispiele kann die folgende Tabelle dienen, in welcher die Zahlen $A$, $A'$, $B$, $B'$ der Formel (12) genügen müssen.

| | $b$ | $\frac{b+s}{3}$ | $A$ | $A'$ | $B$ | $B'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $3 = 3.1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $27 = 25+2.1$ | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $75 = 3.25 = 1+25+49$ | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $147 = 3.49 = 1+25+121$ | 7 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $243 = 1+2.121 = 25+49+169$ | 9 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| u. s. w. | u. s. w. | | | | | |

Ich will über die Zerfällungen von $p$ in die Form $aa+2a'a'$, in welcher $a$ nicht durch 3 theilbar ist, noch folgende Bemerkungen hinzufügen.

Es sei $3^i$ die höchste Potenz von 3, durch welche $p$ theilbar ist, so dafs $\frac{p}{3^i}$ eine ganze, durch 3 nicht theilbare Zahl ist, welche ich mit

$$p' = \frac{p}{3^i}$$

bezeichnen will. Es sei

$$p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha',$$

so wird eine der beiden ganzen Zahlen $\alpha$ oder $\alpha'$ durch 3 aufgehn; denn wenn weder $\alpha$ noch $\alpha'$ durch 3 aufgingen, würde sowohl $\alpha\alpha$ als $\alpha'\alpha'$ durch 3 dividirt den Rest $+1$ lassen und daher $p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$ durch 3 theilbar sein; was gegen die Voraussetzung ist. Es sei

$$(1+\sqrt{-2})^i = \beta + \beta'\sqrt{-2},$$

wo $\beta$ und $\beta'$ wieder ganze Zahlen bedeuten, deren Werthe man leicht aus der bekannten Formel für die Potenz eines Binomiums erhält, nämlich

$$\beta = 1-2.\frac{i(i-1)}{2}+2^2.\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}-\text{etc.}$$

$$\beta' = i-2.\frac{i(i-1)(i-2)}{2}+2^2.\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}$$

Wenn man in der vorstehenden Gleichung $-\sqrt{-2}$ statt $\sqrt{-2}$ schreibt, so erhält man

$$(1-\sqrt{-2})^i = \beta-\beta'\sqrt{2},$$

und wenn man die beiden Formeln mit einander multiplicirt:

$$3^i = \beta\beta+2\beta'\beta'.$$

Setzt man

$$(\alpha+\alpha'\sqrt{-2})(\beta+\beta'\sqrt{-2}) = a+a'\sqrt{-2},$$
$$(\alpha+\alpha'\sqrt{-2})(\beta-\beta'\sqrt{-2}) = b+b'\sqrt{-2},$$

wo $a$, $a'$, $b$, $b'$ wieder ganze Zahlen bedeuten, nämlich

$$a = \alpha\beta-2\alpha'\beta', \quad b = \alpha\beta+2\alpha'\beta',$$
$$a' = \alpha'\beta+\alpha\beta', \quad b' = \alpha'\beta-\alpha\beta',$$

und ändert in jeder der beiden Formeln das Zeichen der Wurzelgröfse, so erhält man auch

$$(\alpha-\alpha'\sqrt{-2})(\beta-\beta'\sqrt{-2}) = a-a'\sqrt{-2},$$
$$(\alpha-\alpha'\sqrt{-2})(\beta+\beta'\sqrt{-2}) = b-b'\sqrt{-2};$$

und wenn man von diesen Formeln je zwei, welche durch Aenderung der Zeichens der Wurzelgröfse aus einander abgeleitet worden sind, mit einander multiplicirt,

$$3^i(\alpha\alpha+2\alpha'\alpha') = 3^i p' = aa+2a'a',$$
$$3^i(\alpha\alpha+2\alpha'\alpha') = 3^i p' = bb+2b'b'.$$

oder

$$p = aa+2a'a' = bb+2b'b'.$$

Man erhält so aus einer Zerfällung der Zahl $p'$ in die Form $\alpha\alpha+2\alpha'\alpha'$ zwei Zerfällungen der Zahl $p$ in dieselbe Form; und diese beiden Zerfällungen sind immer von einander verschieden, ausgenommen wenn $p'$ ein Quadrat $=\alpha\alpha$ ist, und man die beiden Zerfällungen von $p$ aus der Zerfällung $p' = \alpha\alpha'$, für welche $\alpha' = 0$ ist, ableitet. Für diesen Fall sieht man aus den für $a$, $b$, $a'$, $b'$ angegebenen Werthen leicht, dafs

$$a = b, \quad a' = -b'$$

wird, und dafs daher $aa+2a'a'$, $bb+2b'b'$ dieselbe Zerfällung ist. Dafs aber nur für diesen Fall die beiden Zerfällungen dieselben sind, erhellt folgendermafsen. Es mufs hierzu entweder $a=b$ oder $a=-b$ sein, und die für $a$ und $b$ angegebenen Werthe zeigen, dafs dies nur geschehen kann, wenn entweder $\alpha\beta$ oder $\alpha'\beta'$ verschwindet, d. h. eine der Zahlen $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$

gleich Null ist. Nun ist aber weder $\beta$ noch $\beta'$ gleich Null; es kann ferner nicht $\alpha = 0$ sein, weil sonst $p = 2\alpha'\alpha'$ eine gerade Zahl wäre; es ist aber die Zahl $p'$ ungerade, weil sie mit $3^i$ multiplicirt die ungerade Zahl $p$ ergiebt. Die beiden Zerfällungen können daher nur, wenn $\alpha'$ verschwindet, übereinkommen; was zu beweisen war.

Dafs keine der beiden Zahlen $\beta$ und $\beta'$ verschwindet, folgt unter andern auch daraus, dafs keine von beiden durch 3 aufgehn kann. Es sei

$$(f+f'\sqrt{-2})(g+g'\sqrt{-2}) = h+h'\sqrt{-2},$$

also

$$fg-2f'g' = h,$$
$$fg'+f'g = h'.$$

Wenn $f$ und $f'$ und eben so $g$ und $g'$ durch 3 dividirt denselben Rest lassen, so lassen die Zahlen $f'g'$, $fg'$, $f'g$ denselben Rest wie $fg$, und es lassen daher beide Zahlen $h$ und $h'$ durch 3 dividirt denselben Rest als $-fg$. Denn die Zahl $h$ läfst denselben Rest wie $fg-2fg = -fg$, und die Zahl $h'$ läfst denselben Rest wie $fg+fg = 2fg = 3fg-fg$ und also auch denselben Rest wie $-fg$. Es folgt hieraus, dafs wenn

$$(f+f'\sqrt{-2})(g+g'\sqrt{-2}) = h+h'\sqrt{-2},$$

und $f$ und $f'$, so wie $g$ und $g'$ durch 3 dividirt denselben Rest lassen, und keine dieser Zahlen durch 3 theilbar ist, auch die beiden Zahlen $h$ und $h'$ durch 3 dividirt denselben Rest lassen, und durch 3 nicht theilbar sind. Denn da die Zahlen $h$ und $h'$ durch 3 dividirt denselben Rest wie $-fg$ lassen, so können sie nur durch 3 theilbar sein, wenn es eine der beiden Zahlen $f$ und $g$ ist; was der Voraussetzung zuwider ist. Wenn man zu den beiden Factoren nach und nach mehrere von derselben Form und denselben Eigenschaften hinzufügt, und jedesmal den eben gefundenen Satz anwendet, so erhält man den allgemeinern Satz, dafs, wenn $i$ Factoren

$$f_1+f_1'\sqrt{-2}, \quad f_2+f_2'\sqrt{-2}, \quad \dots \quad f_i+f_i'\sqrt{-2}$$

gegeben sind, in deren jedem $f+f'\sqrt{-2}$ die beiden Gröfsen $f$ und $f'$ ganze Zahlen bedeuten, welche durch 3 nicht theilbar sind, aber durch 3 dividirt denselben Rest lassen, das Product sämmtlicher Factoren, dem man wieder die Form

$$F+F'\sqrt{-2}$$

geben kann, in welcher $F$ und $F'$ ganze Zahlen bedeuten, wieder dieselbe Eigenschaft hat, dafs weder $F$ noch $F'$ durch 3 aufgeht, beide aber durch

3 dividirt denselben Rest lassen. Es folgt ferner aus dem gefundenen Satze, dafs dieser Rest derselbe ist, wie der Rest, welchen die Zahl

$$(-1)^{i-1} f_1 f_2 \ldots f_i = -(-f_1)(-f_2)\ldots(-f_i)$$

läfst. Sind alle Factoren einander gleich, so folgt aus dem Vorhergehenden, dafs wenn $f$ und $f'$ durch 3 dividirt beide $+1$ oder beide $-1$ zum Rest lassen, und man die $i^{te}$ Potenz des Ausdrucks $f+f'\sqrt{-2}$ in die Form

$$F+F'\sqrt{-2} = (f+f'\sqrt{-2})^i$$

bringt, die Zahlen $F$ und $F'$ beide denselben Rest lassen wie $-(-f)^i$. Ist daher die Potenz eine gerade, also $i$ eine gerade Zahl, so werden $F$ und $F'$ durch 3 dividirt immer den Rest $-1$ lassen: ist dagegen $i$ ungerade, so wird $F$ denselben Rest $+1$ oder $-1$ lassen wie $f$. In unserm Falle, in welchem

$$(1+\sqrt{-2})^i = \beta+\beta'\sqrt{-2}$$

war, also $f=f'=1$, werden daher $\beta$ und $\beta'$ durch 3 dividirt beide den Rest $+1$ oder beide den Rest $-1$ lassen, je nachdem $i$ ungerade oder gerade ist, und es kann niemals eine dieser Zahlen durch 3 aufgehn, noch weniger also verschwinden. Man kann diese Eigenschaften der Zahlen $\beta$ und $\beta'$ auch aus ihren oben angegebenen, aus dem binomischen Lehrsatz abgeleiteten Werthen folgern. In diesen Werthen finden sich nämlich die Binomial-Coefficienten von $i$ mit den Potenzen von $-2$ multiplicirt; betrachtet man nur die Reste, welche diese Werthe durch 3 dividirt lassen, so kann man $+1$ statt $-2$ setzen, woraus folgt, dafs $\beta$ und $\beta'$ durch 3 dividirt dieselben Reste lassen wie die Zahlen

$$1+\frac{i(i-1)}{1.2}+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

$$i+\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}$$

Diese Zahlen sind aber gleich den beiden Ausdrücken

$$\tfrac{1}{2}\{(1+1)^i+(1-1)^i\} = 2^{i-1},$$

$$\tfrac{1}{2}\{(1+1)^i-(1-1)^i\} = 2^{i-1},$$

so dafs $\beta$ und $\beta'$ durch 3 dividirt denselben Rest wie $2^{i-1}$, oder, was dasselbe ist, wie $(-1)^{i-1}$ lassen; was mit dem vorhin Gefundenen übereinstimmt.

Die beiden Zerfällungen von $p$, welche wir aus einer Zerfällung von $p'$ in die Form $aa+2a'a'$ abgeleitet haben, nemlich

$$p = aa+2a'a' = bb+2b'b'$$

gehören zu den Zerfällungen, welche hier betrachtet werden, indem keine der Zahlen $a$, $a'$, $b$, $b'$ durch 3 aufgeht. Dieses erhellt sogleich aus den oben für diese Zahlen gegebenen Werthen

$$a = \alpha\beta - 2\alpha'\beta', \qquad b = \alpha\beta + 2\alpha'\beta',$$
$$a' = \alpha'\beta + \alpha\beta', \qquad b' = \alpha'\beta - \alpha\beta',$$

in welchen $\alpha$ und $\alpha'$ zwei Zahlen bedeuten, von denen die eine durch 3 theilbar ist, die andre aber nicht, $\beta$ und $\beta'$ dagegen zwei Zahlen von denen keine durch 3 theilbar ist. Man kann aber aus der Form der Werthe von $a$ und $b$ noch folgende Schlüsse ziehn.

Da $a$ und $b$ ungerade sind, wie aus der Gleichung

$$p = aa + 2a'a' = bb + 2b'b'$$

erhellt, in der $p$ eine ungerade Zahl von der Form $24k+3$ bedeutet, und $a$ und $b$ nicht durch 3 aufgehn, so sind sie in den vier Formen $12k \pm 1$, $12k \pm 5$ enthalten. Es wird daher auch ihr Product $ab$ eine dieser vier Formen haben und zwar eine der beiden Formen $12k \pm 1$, wenn $a$ und $b$ beide in den Formen $12k \pm 1$ oder beide in den Formen $12k \pm 5$ enthalten sind: dagegen wird $ab$ die Form $12k \pm 5$ haben, wenn die eine der beiden Zahlen $a$ und $b$ in den Formen $12k \pm 1$, die andre in den Formen $12k \pm 5$ enthalten ist. Aus den für $a$ und $b$ angegebenen Werthen

$$a = \alpha\beta - 2\alpha'\beta', \qquad b = \alpha\beta + 2\alpha'\beta'$$

folgt aber

$$ab = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2.$$

Geht $\alpha'$ durch 3 auf, so ist $\alpha\beta$ eine ungerade, durch 3 nicht theilbare Zahl, denn $\alpha$ und $\beta$ sind immer ungerade, wie aus den Gleichungen

$$3^l = \beta\beta + 2\beta'\beta', \qquad p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$$

erhellet, und wenn $\alpha'$ durch 3 theilbar ist, so ist $\alpha$ durch 3 nicht theilbar; die Zahlen $\beta$ und $\beta'$ sind aber niemals durch 3 theilbar. Es folgt hieraus, dafs $\alpha^2\beta^2$, sowohl durch 4 als durch 3 dividirt, den Rest $+1$ läfst, also die Form $12k+1$ hat. Die Zahl $4\alpha'^2\beta'^2$ ist ferner, wenn $\alpha'$ durch 3 theilbar ist, durch 12 theilbar. Es wird daher, wenn $\alpha'$ durch 3 theilbar ist, die Zahl

$$ab = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2$$

die Form $12k+1$ haben. Wenn $\alpha$ durch 3 theilbar ist, so ist $\alpha'$ und daher auch $\alpha'\beta'$ durch 3 nicht theilbar; es hat daher $\alpha'^2\beta'^2$ die Form $3k+1$ und $4\alpha'^2\beta'^2$ die Form $12k+4$. Es hat ferner $\beta^2$ die Form $12k+1$, weil $\beta^2$, sowohl durch 4 als durch 3 dividirt, den Rest $+1$ läfst, $\alpha$ ist eine durch

3 theilbare ungerade Zahl und hat also eine der beiden Formen $12k+3$, $12k+9$: sein Quadrat $\alpha^2$ hat daher immer die Form $12k+9$; und da $\beta^2$ die Form $12k+1$ hat, so wird auch $\alpha^2\beta^2$ die Form $12k+9$ haben. Wenn also $\alpha$ durch 3 theilbar ist, so hat $4\alpha'^2\beta'^2$ die Form $12k+4$, ferner $\alpha^2\beta^2$ die Form $12k+9$, und daher

$$ab = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2$$

die Form $12k+5$. Es wird daher $ab$ die Form $12k+1$ oder die Form $12k+5$ haben, je nachdem $\alpha'$ oder $\alpha$ durch 3 aufgeht. Läfst man die Zeichen von $a$ und $b$, welche durch die Zerfällung von $p$ in die Formen $aa+2a'a'$, $bb+2b'b'$ nicht bestimmt werden, willkürlich, so wird man doch immer sagen können, dafs $ab$ eine der Formen $12k\pm1$ oder eine der Formen $12k\pm5$ hat, je nachdem $\alpha'$ oder $\alpha$ durch 3 aufgeht. Theilt man daher die Zerfällungen von $p$ in die Form $aa+2a'a'$, in welcher $a$ und $a'$ nicht durch 3 aufgehn, in zwei Classen, von denen die erste die Zerfällungen umfafst, in denen $a$ eine der beiden Formen $12k\pm1$ hat, und die zweite die Zerfällungen, in denen $a$ eine der beiden Formen $12k\pm5$ hat, so werden die beiden Zerfällungen von $p$, welche man auf die angegebene Art aus einer Zerfällung von $p'$ in die Form $\alpha\alpha+2\alpha'\alpha'$ ableitet, zu derselben oder zu verschiedenen Classen gehören, je nachdem $\alpha'$ oder $\alpha$ durch 3 theilbar ist.

Wenn $p'$, welches jede ungerade, durch 3 nicht theilbare Zahl bedeuten kann, auf mehrere Arten in die Form $\alpha\alpha+2\alpha'\alpha'$ zerfällt werden kann, so wird doch in allen diesen Zerfällungen $\alpha'$, oder in allen $\alpha$ durch 3 theilbar sein. Im ersten Falle hat nämlich $p'$ die Form $ff+18f'f'$, im zweiten Falle die Form $9gg+2g'g'$, und da $p'$ und also auch $f$ und $g'$ durch 3 nicht theilbar sind, also $ff$ und $2g'g'$ durch 3 dividirt die Reste $+1$ und $+2$ lassen, so können die erste Form nur die Zahlen $p'$ von der Form $3k+1$, die zweite Form nur die Zahlen $p'$ von der Form $3k+2$ haben. Je nachdem also $p'$ die Form $3k+1$ oder $3k+2$ hat, werden die beiden Zerfällungen von $p = 3^i p'$, welche wir aus einer Zerfällung von $p'$ abgeleitet haben, zu derselben oder zu verschiedenen Classen gehören.

Es bleibt noch zu zeigen übrig, dafs jede Zerfällung von $p$ in die Form $aa+2a'a'$, in welcher $a$ nicht durch 3 theilbar ist, wirklich aus einer Zerfällung von $p'$ durch die angegebenen Formeln abgeleitet werden kann. Man kann dieses so beweisen. Da $p$ durch $3^i$ theilbar und

$$\alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2 = \alpha^2(\beta^2+2\beta'^2) - 2\beta'^2(\alpha^2+2\alpha'^2) = 3^i aa - 2p\beta'\beta'$$

ist, so mufs auch die Zahl

$$a^2\beta^2 - 4a'^2\beta'^2 = (a\beta + 2a'\beta')(a\beta - 2a'\beta')$$

durch $3^i$ theilbar sein. Von den beiden Factoren $a\beta + 2a'\beta'$ und $a\beta - 2a'\beta'$ kann aber nur der eine durch 3 theilbar sein; denn wären sie beide durch 3 theilbar, so wäre auch ihre Summe $2a\beta$ durch 3 theilbar; was unmöglich ist, weil weder $a$ noch $\beta$ durch 3 theilbar sind. Weil nun das Product der beiden Factoren durch $3^i$ theilbar ist, der eine Factor aber durch 3 nicht theilbar ist, so mufs der andere Factor allein durch $3^i$ theilbar sein. Es sei $a\beta + 2a'\beta'$ dieser Factor, was man immer annehmen kann, da über das Zeichen von $a'$ nichts bestimmt worden ist, vielmehr dieses Zeichen, wenn man $a$ unverändert läfst, durch diese Bedingung erst bestimmt wird. Multiplicirt man diesen Factor mit $\beta'$ und setzt für $2\beta'\beta'$ seinen Werth $3^i - \beta\beta$, so erhält man

$$\beta'(a\beta + 2a'\beta') = -\beta(a'\beta - a\beta') + 3^i a',$$

und aus dieser Gleichung folgt, weil $a\beta + 2a'\beta'$ durch $3^i$ theilbar, aber $\beta$ durch 3 nicht theilbar ist, dafs auch $a'\beta - a\beta'$ durch 3 theilbar ist. Es sei

$$\frac{a\beta + 2a'\beta'}{3^i} = \alpha, \qquad \frac{a'\beta - a\beta'}{3^i} = \alpha',$$

so wird

$$\frac{(a + a'\sqrt{-2})(\beta - \beta'\sqrt{-2})}{3^i} = \alpha + \alpha'\sqrt{-2},$$

und dem eben Bewiesenen zufolge sind die Gröfsen $\alpha$ und $\alpha'$ ganze Zahlen. Aendert man das Zeichen der Wurzelgröfse, und multiplicirt die dadurch entstehende neue Gleichung mit der vorstehenden, so erhält man

$$\frac{(aa + 2a'a')(\beta\beta + 2\beta'\beta')}{3^{2i}} = \frac{p}{3^i} = p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha';$$

welches die verlangte Zerfällung von $p'$ ist. Von dieser Zerfällung aus gelangt man wieder zu der gegebenen Zerfällung von $p = aa + 2a'a'$ durch die Gleichung

$$(\alpha + \alpha'\sqrt{-2})(\beta + \beta'\sqrt{-2}) = a + a'\sqrt{-2}.$$

Man sieht also, dafs man jede Zerfällung von $p$ in die Form $aa + 2a'a'$, in welcher $a$ nicht durch 3 theilbar ist, immer aus einer Zerfällung von $\frac{1}{3^i}p = p'$ auf die oben angegebene Art ableiten kann. Man wird also *alle* Zerfällungen von $p$, welche die verlangte Form haben, aus den Zerfällungen von $p'$ erhalten.

Wir haben gesehn, dafs man aus jeder Zerfällung von $p'$ zwei Zerfällungen von $p$ erhält, welche zu derselben oder zu verschiedenen Classen

gehören, je nachdem $p'$ die Form $3k+1$ oder $3k+2$ hat; ferner, dafs die so erhaltenen Zerfällungen von $p$ alle hier betrachteten ergeben. Wir nennen aber eben $B$ die Anzahl aller Zerfällungen von $p$ von der ersten Classe, und $B'$ die aller Zerfällungen von $p$ von der zweiten Classe: wobei jedoch, wenn $p' = aa$, die Zerfällung

$$p = 3^i . p' = aa 3^{i-1} + 2aa 3^{i-1}$$

nicht mitgerechnet ist, welche nur Statt findet, wenn $p$ das Dreifache eines Quadrates ist, da $i$ ungerade sein mufs, wenn $p = 3^i aa$ die Form $24k+3$ haben soll. Hat $p'$ die Form $3k+2$, so enthalten die erste und zweite Classe gleich viel Zerfällungen, weil aus jeder Zerfällung von $p'$ sich für jede der beiden Classen eine Zerfällung von $p$ ergiebt. Man hat daher, wenn $p' = \frac{1}{3^i} . p$ die Form $3k+2$ hat,

$$B = B',$$

wodurch sich die Formel (11) auf

$$12. \quad A = A'$$

reducirt. Wenn $p'$ die Form $3k+1$ hat, werden $B$ und $B'$ gerade Zahlen sein, wenn nicht $p$ das Dreifache eines Quadrates ist, weil sich aus jeder Zerfällung von $p'$ zwei Zerfällungen von $p$ ergeben, die zu derselben Classe gehören.

Man kann aus der oben gefundenen Formel

$$\{\Sigma(-1)^m x^{(6m+1)^2}\}^3 = \Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{bb},$$

in welcher $m$ alle positiven und negativen Zahlen, $b$ alle positiven ungeraden Zahlen bedeutet, noch Folgerungen ganz anderer Art ziehen, die ich kurz andeuten will. Man sieht durch diese Formel, dafs man das Dreifache eines ungeraden Quadrates immer auf mehrere Arten in drei Quadrate von der Form $(6m+1)^2$ zerfällen kann, so dafs, wenn $N$ irgend eine ungerade Zahl ist, man immer der Gleichung

$$3NN = (6m+1)^2 + (6m'+1)^2 + (6m''+1)^2$$

genügen kann, und zwar auf mehrere Arten, so dafs man, den Fall $b = 1$ ausgenommen, nie allein die Zerfällung in drei gleiche Quadrate hat. Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$3NN = (6m+1)^2 + 2(3m'+3m''+1)^2 + 18(m'-m'')^2,$$

und daher

$$NN = \{2(m+m'+m'')+1\}^2 + 2(2m-m'-m'')^2 + 6(m'-m'')^2.$$

Eine ähnliche Formel würde aus jeder Zerfällung von $p = 24k+3$ in die Form

$$(6m+1)^2 + (6m'+1)^2 + (6m''+1)^2$$

für $\frac{1}{3}p = 8k+1$ gefunden werden. Es sei

$$2(m+m'+m'')+1 = n, \quad 2m-m'-m'' = n', \quad m'-m'' = n'',$$

so hat man

$$NN = nn + 2n'n' + 6n''n''$$

und daher

$$\frac{NN-nn}{2} = n'n' + 3n''n''.$$

Da man immer voraussetzen kann, dafs die Zahlen $m$, $m'$, $m''$ nicht alle drei einander gleich sind, so wird man auch immer in der vorstehenden Gleichung annehmen können, dafs $n'$ und $n''$ nicht alle beide verschwinden. Es wird also immer $N > n$ sein.

Von der Summe und Differenz zweier ungeraden Zahlen ist die eine immer durch 4 theilbar, während die andre durch 4 dividirt den Rest 2 läfst. Ich will annehmen, dafs $N-n$ durch 4 theilbar sei: wäre $N+n$ durch 4 theilbar, so hätte man im Folgenden nur $-n$ statt $n$ zu setzen.

Man betrachte jetzt den besondern Fall, wo $N$ eine Primzahl ist, in welchem $\frac{N-n}{2}$ und $\frac{N+n}{2}$ und daher auch die Zahlen $\frac{N-n}{4}$ und $\frac{N+n}{2}$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Da beide Zahlen zu einander Primzahlen und Theiler einer Zahl von der Form $n'n'+3n''n''$ sind, so hat, nach sonst bekannten Sätzen der Arithmetik, jede dieser Zahlen $\frac{N-n}{4}$ und $\frac{N+n}{2}$ dieselbe Form. Man kann daher setzen

$$\frac{N+n}{2} = \alpha\alpha + 3\gamma\gamma,$$

$$\frac{N-n}{4} = \beta\beta + 3\delta\delta,$$

woraus für jede Primzahl $N$ die Gleichung,

$$N = \alpha\alpha + 2\beta\beta + 3\gamma\gamma + 6\delta\delta$$

folgt, in welcher $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ganze Zahlen sind. Zufolge der bekannten

Verallgemeinerung eines *Euler*schen Satzes, produciren Zahlen von der Form

$$\alpha\alpha + B\beta\beta + C\gamma\gamma + BC\delta\delta$$

wieder diese Form, wenn man sie mit einander multiplicirt. Die Form, in welche wir jede Primzahl $N$ zerfällt haben, gehört aber offenbar dieser Form an. Da nun auch die Primzahl 2 dieselbe Form hat, und man jede Zahl als Product von Primzahlen betrachten kann, so kann man auch jeder Zahl die Form

$$\alpha\alpha + 2\beta\beta + 3\gamma\gamma + 6\delta\delta$$

geben, in welcher $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ganze Zahlen sind.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie ich in dieser Abhandlung angestellt habe, kann man an andere Formeln der „Fundamenta" anknüpfen.

---

## 3.

# Von dem Krümmungs-Schwerpuncte ebener Curven.

(Von Hrn. Prof. *Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 5. April 1838 in der hiesigen Akad. d. Wissensch. gehaltenen Vorlesung.)

---

Bei Untersuchungen über Maximum und Minimum in Rücksicht geometrischer Gegenstände wurde ich auf nachstehende Aufgaben geführt:

*a.* „*Wenn aus einem beliebigen Puncte P in der Ebene einer gegebenen und stetig convexen Curve* 𝔙 *auf alle Tangenten der letzteren Perpendikel gefället werden, so liegen die Fufspuncte in irgend einer Curve V; denjenigen Punct S zu finden, dessen Fufspuncten-Curve v den kleinsten Inhalt hat?*"

*b.* „*Wenn die gegebene Curve* 𝔙 *in ihrer Ebene auf einer festen Geraden G so lange rollt, bis sie sich ganz umgedreht hat, so beschreibt jeder mit ihr verbundene Punct P irgend eine Curve W; denjenigen Punct S anzugeben, welcher die Curve w vom kleinsten Inhalte beschreibt?*" Und

*c.* „*Die analoge Frage, wenn die Curve* 𝔙 *auf einer festen Curve* 𝔘 *so lange rollt, bis ihr ganzer Umfang die letztere berührt hat.*"

Es zeigte sich, dafs den beiden ersteren Aufgaben ein und derselbe bestimmte Punct *S* genügt, und dafs überhaupt das Gesetz Statt findet: *dafs für irgend einen Punct P die Curve W allemal gerade doppelt so grofsen Inhalt hat, als die Curve V.*" Jener ausgezeichnete Punct *S* aber, welcher die Curven (*v* und *w*) vom kleinsten Inhalte erzeugt, hat in Bezug auf die gegebene Curve 𝔙 die merkwürdige Eigenschaft: „*dafs er ihr Schwerpunct ist, wenn die Gewichte ihrer einzelnen Puncte (die sie in unendlich kleine gleiche Elemente theilen) sich verhalten, wie die respectiven Krümmungen, oder wie die umgekehrten Werthe der zugehörigen Krümmungsradien.*" Deshalb ist der Punct *S* „*Krümmungs-Schwerpunct*" der Curve 𝔙 genannt worden. Von ihm und von dem Inhalte der ihm entsprechenden Curve *v* oder *w* hängt der Inhalt der jedem anderen Puncte *P* entsprechenden Curve *V* oder *W* ab, und zwar nach dem Gesetz: „*dafs Puncten, welche gleich weit von S entfernt sind, Curven von*

*gleichem Inhalte entsprechen; und dafs die Inhalts-Zunahme dem Quadrate jener Entfernung proportional ist.*"

Bei der dritten Aufgabe ($\gamma$) ist zwar derjenige Punct $\mathfrak{S}$, welcher die Curve $w$ vom kleinsten Inhalte beschreibt, im Allgemeinen von dem vorigen ($S$) verschieden, indessen hängt er doch wesentlich von diesem ab, und seine Eigenschaft ist der des letztern ganz analog.

Ist die gegebene Curve $\mathfrak{B}$ nicht geschlossen, oder wird nur ein beliebiger Bogen $AB$ derselben berücksichtiget, so dafs nur auf die Tangenten dieses Bogens Perpendikel gefället werden, oder nur dieser Bogen auf der Basis rollt: so giebt es gleichwohl einen bestimmten Punct $R$, welchem die kleinste Figur $v$ oder $w$ entspricht, und derselbe hängt wesentlich von dem, dem Bogen $AB$ entsprechenden Puncte $S$ oder $\mathfrak{S}$ ab (aufserdem noch von der Sehne $AB$ und bestimmten Winkeln). Auch ist dann eben so der Inhalt der jedem anderen Puncte $P$ entsprechenden Figur $V$ oder $W$ von dem Abstande des Punctes $P$ von $R$ abhängig, nämlich die Inhalts-Zunahme $V-v$ oder $W-w$, ist allemal gleich dem Quadrate dieses Abstandes multiplicirt in einen constanten Coefficienten. Dadurch wird die Quadratur aller solchen Curven $V$ oder $W$ auf die von $v$ oder $w$ zurückgeführt. Wiewohl man sich vielfach mit dergleichen Curven beschäftigt hat, so findet doch, meines Wissens, dieses einfache Gesetz sich nirgends aufgestellt. Trotz dem ist der Beweis desselben, so wie der zuvor angedeuteten Sätze, keinesweges schwierig; sondern es kam vielmehr nur auf das Auffinden der Sätze selbst an*). Jetzt werden sie sich auf verschiedene Arten leicht beweisen lassen. Hier geschieht es auf geometrischem Wege, durch blofs elementare Betrachtungen, und zwar ohne Voraussetzung der erforderlichen, anderweitig bekannten Hülfssätze. Nämlich die Betrachtung nimmt, der Hauptsache nach, folgenden Gang.

Zuerst werden aus einem einfachen Fundamentalsatze die wesentlichsten Eigenschaften des Puncts der mittleren Entfernung oder des Schwerpuncts eines Systems gegebener Puncte entwickelt. Sodann wendet sich die Betrachtung zu den Fufspuncten-Vielecken $V$ in Bezug auf ein gegebenes Vieleck $\mathfrak{B}$, wobei die wichtigsten Resultate auf jene Eigenschaften

---

*) Die obigen Aufgaben habe ich bereits in Bd. XIV. S. 88 d. Journ. zur Lösung vorgelegt und dabei zugleich einige der eben erwähnten Resultate angedeutet; sie blieben aber, wie es scheint, unbeantwortet.

des Schwerpunctes sich stützen. Diese Resultate gelten zugleich auch für die Fufspuncten-Curven $V$ in Bezug auf eine gegebene Curve 𝔙; was unmittelbar folgt, wenn man jenes Vieleck 𝔙 in eine Curve übergehen läfst, d. h. wenn man die Zahl der Seiten unendlich grofs und jede Seite unendlich klein werden läfst. Nun wird weiter das Vieleck 𝔙 auf einer festen Geraden rollend fortbewegt und dabei die von den mit ihm verbundenen Puncten beschriebenen Figuren $W$ berücksichtiget: so zeigt sich, dafs auch hierbei die Hauptresultate sich gleicherweise auf die Eigenschaft des Schwerpuncts gründen, und dafs dieselben bestehen bleiben, wenn das rollende Vieleck in eine Curve 𝔙 übergeht. Endlich läfst man das Vieleck 𝔙 auf einem festen Vielecke 𝔘 rollen, wobei sich wiederum analoge Resultate ergeben, die auch fortbestehen, wenn die Vielecke in Curven 𝔙 und 𝔘 übergehen *). In diesem letzten Falle gelangt man zu den allgemeinsten Resultaten (§. XXXIV.); sie umfassen gewissermafsen alle vorhergehenden und gestatten aufserdem noch zahlreiche andere specielle Folgerungen (§. XXXV.); auch folgt daraus unmittelbar die Quadratur vieler Curven, wie z. B. der verschiedenen Arten Cykloiden, des Raumes zwischen parallelen Curven, u. s. w.

Beiläufig bemerke ich noch, dafs der gegenwärtigen Untersuchung eine andere zur Seite steht, welche sich mit den folgenden Aufgaben, und Dem, was unmittelbar damit zusammenhängt, beschäftigt, nämlich:

α. In der Ebene einer gegebenen Curve 𝔙 denjenigen Punct $M$ zu bestimmen, dessen Fufspuncten-Curve $v$, in Rücksicht auf jene, unter allen die kürzeste ist?

β. Wenn in der Ebene eine gegebene Curve 𝔙 auf einer festen Geraden $G$ rollt, denjenigen, mit ihr verbundenen Punct $M$ anzugeben, welcher die kürzeste Curve $w$ beschreibt? Und

γ. Dasselbe, wenn die Curve 𝔙 auf einer festen Curve 𝔘 rollt?

Auch hier findet sich: *dafs ein und derselbe Punct M den beiden ersteren Aufgaben zugleich genügt;* oder noch mehr, es findet sich das allgemeine Gesetz: *„dafs die irgend einem Puncte P entsprechende Fufs-*

*) Zu diesem Gange der Betrachtung gaben die beiden speciellen Sätze von *Querret*, *Sturm* und *Lhuilier* den ersten Anlafs, welche in Bd. I. S. 51 dieses Journals sich angeführt finden, und welche zunächst den daselbst (so wie Bd. II. S. 265.) bewiesenen allgemeinen Satz zur Folge hatten, als dessen weitere Entwicklung die vorliegende Abhandlung zum Theil anzusehen ist.

*puncten-Curve V* (α) *gerade eben so lang ist, als die von ihm beim Rollen* (β) *beschriebene Curve W.*" Dies führt zur Vergleichung der Länge vieler, anscheinend sehr verschiedener Curvenpaare und gewährt dadurch einige interessante Sätze.

Für alle drei Aufgaben läfst sich die charakteristische Eigenschaft des Punctes $M$ auf geometrischem Wege angeben.

Durch diese Untersuchung gelangt man auch unmittelbar zur Rectification einer bestimmten Reihe von Curven.

---

## Vom Puncte der mittlern Entfernung.

### §. I.

*Fundamentalsatz.* „*Zieht man aus drei beliebigen Puncten A, M, B* (Fig. 1.) *einer Geraden AB drei parallele Strahlen* $AC = a$, $MN = m$, $BD = b$ *in beliebiger Richtung nach einer andern Geraden X, so ist, wenn man* $AM = b_1$ *und* $BM = a_1$ *setzt:*

$$1. \quad a a_1 + b b_1 = (a_1 + b_1) m."$$

Denn zieht man die Gerade $BC$, welche $MN$ in $E$ schneidet, so ist wegen der parallelen Strahlen:

$$ME : a = a_1 : a_1 + b_1 \quad \text{und} \quad NE : b = b_1 : a_1 + b_1,$$

woraus, da $ME + EN = MN = m$ ist, jene Gleichung (1) folgt.

Hiebei ist noch zu bemerken:

*a*) Der Satz findet Statt, mögen die Puncte $A$, $M$, $B$ auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Geraden $X$ liegen. Nur sind im letztern Falle Strahlen, die auf verschiedenen Seiten von $X$ liegen, als entgegengesetzt, die einen als positiv, die andern als negativ zu betrachten. Dieser Gegensatz kann entweder in der Gleichung (1) durch die Zeichen $+$ und $-$ angezeigt, oder unmittelbar in der Figur berücksichtigt werden. Hier soll fortan dieses Letztere geschehn, und also auch im Falle der (Fig. 2.), statt der jenen Zeichen gemäfsen Gleichung $bb_1 - aa_1 = (a_1 + b_1)m$, ebenfalls die obige Gleichung (1) geschrieben werden.

*b*) Geht insbesondere die Gerade $X$ durch den Punct $M$, so hat man:

$$2. \quad a a_1 + b b_1 = 0.$$

*c*) Der Satz ist von dem Winkel unabhängig, welchen die Strahlen $a$, $m$, $b$ mit der Geraden $X$ bilden. Der Einfachheit wegen soll daher dieser Winkel fortan ein rechter sein. Bei einigen spätern Sätzen ist übrigens nur dieser Fall allein zulässig; andere Sätze hingegen würden einen beliebigen Winkel gestatten, und dadurch etwas allgemeiner werden; was indessen unerheblich ist.

## §. II.

Sind $\alpha$ und $\beta$ zwei beliebige gleichartige Gröfsen oder Zahlen, und ist:

$$3. \quad \alpha : \beta = a_1 : b_1,$$

so folgt aus jener Gleichung (1):

$$4. \quad \alpha a + \beta b = (\alpha + \beta) m.$$

Werden daher die Puncte $A$ und $B$ als fest, und die Gröfsen $\alpha$ und $\beta$ als ihnen zugeordnete gegebene positive Coefficienten betrachtet, so ergeben sich aus der Gleichung (4) nachfolgende Sätze:

*a*) Sind in einer Ebene zwei feste Puncte $A$ und $B$ nebst zugehörigen Coefficienten $\alpha$ und $\beta$ gegeben, und sind $a$ und $b$ die Abstände der beiden Puncte von einer beliebigen Geraden $X$, so ist die Summe $(\alpha a + \beta b)$ stets gleich dem Producte $(\alpha + \beta) m$ aus der Summe $(\alpha + \beta)$ der Coefficienten in den Abstand $m$ eines dritten bestimmten Punctes $M$ von jener Geraden $X$. Dieser dritte Punct $M$ liegt in der Geraden, die $A$ und $B$ verbindet, und theilt sie in Abschnitte, die sich umgekehrt verhalten wie die ihren Endpuncten zugeordneten Coefficienten (3).

*b*) Soll die Summe $(\alpha a + \beta b)$ einer Constanten $K$ gleich sein, so dafs:

$$5. \quad \alpha a + \beta b = (\alpha + \beta) m = K,$$

so ist auch das Perpendikel $m$ constant, so dafs der Ort seines Fufspuncts $N$ eine Kreislinie ist, welche $M$ zum Centrum und die Gerade $X$ in allen ihren Lagen zur Tangente hat.

*c*) Ist insbesondere $K = 0$, also:

$$6. \quad \alpha a + \beta b = 0,$$

so geht die Gerade $X$, weil $m = 0$, in allen ihren Lagen durch den Punct $M$.

## §. III.

„*Sind in einer Ebene irgend n beliebige Puncte A, B, C, D, .... nebst zugehörigen (positiven) Coefficienten α, β, γ, δ, .... gegeben, so giebt es immer einen andern bestimmten Punct S von der Beschaffenheit, dafs wenn aus jenen Puncten sowohl als aus ihm Perpendikel a, b, c, d, .....s auf jede beliebige Gerade X gefällt werden, dann jedesmal folgende Gleichung besteht:*

7. $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \ldots = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots) s.$

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich leicht durch wiederholte Anwendung des obigen Satzes (§. II. *a*), nämlich wie folgt:

Es seien zunächst nur drei Puncte *A, B, C* gegeben. In der Geraden *AB* construire man den Punct *M*, für welchen $AM:BM = \beta:\alpha$ ist, so kann in Rücksicht jeder Geraden *X* stets gesetzt werden: $\alpha a + \beta a = (\alpha + \beta) m$. Nun suche man in der Geraden *MC* den Punct *N*, für welchen $MN:CN = \gamma:(\alpha + \beta)$, so ist in Rücksicht jeder Geraden *X*:

$$(\alpha + \beta) m + c\gamma = (\alpha + \beta + \gamma) n,$$

und mithin

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = (\alpha + \beta + \gamma) n;$$

was unserm Satze gemäfs ist, indem der Punct *N* und das aus ihm auf die Gerade *X* gefällte Perpendikel *n* beziehlich die Stelle von *S* und *s* vertreten.

Wäre nun noch ein vierter Punct *D* gegeben, so suche man in der Geraden *ND* den Punct *P*, für welchen $NP:DP = \delta:(\alpha + \beta + \gamma)$. Dann hat man für jede Gerade *X*:

$$(\alpha + \beta + \gamma) n + \delta d = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) p$$

und folglich

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) p;$$

was wiederum dem Satze gemäfs ist, indem *P* und *p* die Stelle von *S* und *s* einnehmen.

Es ist klar, dafs man ähnlicherweise zur Bestätigung des Satzes gelangt, wenn 5, 6, .... *n* Puncte gegeben sind, und dafs durch dieses Verfahren nicht nur die Existenz des eigenthümlichen Punctes *S* erwiesen, sondern derselbe auch zugleich gefunden wird.

## §. IV.

Vermöge der eben bewiesenen Eigenschaft heifst der Punct $S$ „*Punct der mittlern Entfernung*" in Rücksicht auf die gegebenen Puncte $A$, $B$, $C$, .... und deren Coefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... Er ist, wie man sieht, identisch mit dem Mittelpuncte paralleler Kräfte, welche auf die gegebnen Puncte wirken und sich verhalten, wie deren respective Coefficienten; oder identisch mit dem Schwerpuncte der gegebenen Puncte, wenn diese mit Gewichten belastet sind, die sich wie jene Coefficienten verhalten. Der Kürze wegen mag daher der Punct $S$ künftig *Schwerpunct* genannt werden, ohne dafs dabei an die statische Eigenschaft gedacht werden soll.

Dafs die Bedingungen des vorstehenden Satzes (§. III.) nur von einem einzigen Puncte $S$ erfüllt werden können, geht aus dem Beweise selbst klar hervor, kann aber auch, wie folgt, indirecte bewiesen werden. Angenommen nämlich, es gäbe noch einen zweiten Punct $S_1$ von gleicher Beschaffenheit, so müfste in Rücksicht jeder Geraden $X$:

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\ldots = (\alpha+\beta+\gamma+\delta\ldots)s = (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)s_1$$

und mithin $s=s_1$ sein. Daher müfste die Gerade $SS_1$ mit jeder beliebigen Geraden $X$ parallel sein; eine offenbare Unmöglichkeit. Also: „*Ein gegebenes System von Puncten $A$, $B$, $C$, .... und zugehörigen Coefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... hat nur einen einzigen Punct der mittlern Entfernung, oder nur einen einzigen Schwerpunct $S$.*"

Daher gelangt man durch die obige Construction (§. III.), man mag nun die gegebenen Puncte in dieser oder jener beliebigen Reihenfolge combiniren, stets zu demselben Puncte $S$. Hieraus ergiebt sich unmittelbar eine Reihe von Sätzen über die geradlinigen Vielecke (welche durch die jedesmaligen gegebenen Puncte bestimmt werden). Diese Sätze sollen an einem andern Orte ausführlich entwickelt werden.

## §. V.

Soll die Summe der Producte aus den Perpendikeln in die respectiven Coefficienten einen gegebenen oder constanten Werth $K$ haben: soll also

8. $\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\ldots = (\alpha+\beta+\gamma+\delta\ldots)s = K$

sein, so ist der Ort der Geraden $X$ eine Kreislinie, die $S$ zum Mittelpuncte hat. Der Radius $s$ dieses Kreises ändert sich zugleich mit der Summe $K$, und wird im directen Verhältnifs mit ihr kleiner und gröfser.

Ist insbesondere $K = 0$, also:

$$9.\quad \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots\ldots = (\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots) s = 0,$$

so ist auch $s = 0$, d. h. die Gerade $X$ geht stets durch den Schwerpunct $S$; und umgekehrt, geht die Gerade $X$ durch $S$, so ist jene Summe $K$ stets $= 0$.

Aus diesem besondern Falle ergeben sich weiter nachstehende Folgerungen.

## §. VI.

Zieht man aus dem Puncte $S$ Strahlen $a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots$ nach den Puncten $A, B, C, \ldots\ldots$, und bezeichnet die Winkel, welche diese Strahlen mit einer durch $S$ gehenden Geraden $X$, nach einerlei Richtung genommen, bilden, mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots$, so hat man:

$$10.\quad a = a_1 \sin \mathfrak{a};\quad b = b_1 \sin \mathfrak{b};\quad c = c_1 \sin \mathfrak{c}\quad \text{etc.}$$

und werden diese Werthe der Perpendikel $a, b, c, \ldots\ldots$ in die vorige Gleichung (9.) gesetzt, so erhält man folgende neue Gleichung:

$$11.\quad \alpha a_1 \sin \mathfrak{a} + \beta b_1 \sin \mathfrak{b} + \gamma c_1 \sin \mathfrak{c} + \ldots\ldots = 0,$$

welche, in Worten ausgedrückt, heifst:

*„Der Schwerpunct $S$ eines Systems von Puncten $A, B, C, \ldots\ldots$ und zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ hat die Eigenschaft, dafs, wenn man die aus ihm nach jenen Puncten gezogenen Strahlen $a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots$ mit den Sinus der Winkel $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots$, die sie mit irgend einer durch $S$ gehenden Geraden $X$ bilden, und mit den zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ multiplicirt, — dafs dann die Summe aller dieser Producte beständig $= 0$ ist."*

Der Satz gilt auch, wenn statt der Sinus der Winkel $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots$ die Cosinus derselben genommen werden; was aus der Betrachtung zweier unter sich senkrechter Geraden $X$ klar hervorgeht. Man hat also auch:

$$12.\quad \alpha a_1 \cos \mathfrak{a} + \beta b_1 \cos \mathfrak{b} + \gamma c_1 \cos \mathfrak{c} + \ldots\ldots = 0.$$

Dieser Satz hat bekanntlich auch eine statische Bedeutung. Wenn in den Richtungen von $a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots$ Kräfte auf den Punct $S$ wirken, die den Producten $\alpha a_1, \beta b_1, \gamma c_1, \ldots\ldots$ proportional sind, so herrscht Gleichgewicht.

## §. VII.

Zieht man ferner aus irgend einem Puncte $P$ der durch $S$ gehenden Geraden $X$ Strahlen $a, b, c, \ldots\ldots$ nach den Puncten $A, B, C, \ldots\ldots$ [die oben durch $a, b, c, \ldots\ldots$ bezeichneten Perpendikel kommen hier nicht

in Betracht], so hat man, wenn $PS = s$ gesetzt wird:

$$13. \quad a^2 = a_1^2 + s^2 - 2a_1 s \cos \mathfrak{a}, \quad b^2 = b_1^2 + s^2 - 2b_1 s \cos \mathfrak{b}, \quad c^2 = c_1^2 + s^2 - 2c_1 s \cos \mathfrak{c} \text{ etc.}$$

woraus durch Multiplication mit den respectiven Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und nachherige Addition entsteht:

$$14. \quad \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \ldots = \alpha a_1^2 + \beta b_1^2 + \gamma c_1^2 + \ldots + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) s^2 - 2s(\alpha a_1 \cos \mathfrak{a} + \beta b_1 \cos \mathfrak{b} + \gamma c_1 \cos \mathfrak{c} + \ldots),$$

und mithin zufolge der Gleichung (12.):

$$15. \quad \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \ldots = \alpha a_1^2 + \beta b_1^2 + \gamma c_1^2 + \ldots + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) s^2,$$

oder in abkürzenden Zeichen geschrieben:

$$16. \quad \Sigma(\alpha a^2) = \Sigma(\alpha a_1^2) + s^2 \Sigma(\alpha).$$

Das heifst:

*a.* „*Ist in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Puncten A, B, C, .... und zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gegeben, und man zieht aus einem andern beliebigen Puncte P (oder S) nach allen jenen Puncten Strahlen a, b, c, .... (oder $a_1, b_1, c_1, \ldots$), multiplicirt die Quadrate dieser Strahlen mit den zugehörigen Coefficienten, so ist die Summe dieser Producte dann ein Minimum, wenn der gewählte Punct der Schwerpunct S der gegebenen Puncte ist. Ist der gewählte Punct aber irgend ein anderer P, so ist die ihm entsprechende Summe $\Sigma \alpha a^2$ um das $(\alpha + \beta + \gamma \ldots)$fache Quadrat seines Abstandes s vom Schwerpuncte S gröfser, als jenes Minimum $\Sigma \alpha a_1^2$.*"

*b.* „*Soll die genannte Summe der Producte $\Sigma \alpha a^2$ constant, etwa $= \Sigma$ sein, so dafs $\Sigma \alpha a_1^2 + s^2 \Sigma \alpha = \Sigma$, so ist der Ort des Puncts P eine Kreislinie, welche allemal S zum Mittelpuncte und s zum Radius hat.*" Und umgekehrt: „*Puncten, welche gleichweit vom Schwerpuncte S abstehen, entsprechen gleiche Summen.*" Und ferner: „*die Summe $\Sigma$ und der Radius s ändern sich gleichzeitig, und nehmen zugleich zu oder ab.*"

Hienach hat der Punct *S* die dritte wesentliche Eigenschaft: dafs er der *Punct kleinster Quadrate der Entfernungen* ist in Rücksicht der gegebenen Puncte und Coefficienten *).

*) Aus der obigen Gleichung (16) — welche auf gleiche Weise statt findet, die gegebenen Puncte *A, B, C*, .... mögen in einer Ebene oder im Raume beliebig liegen — folgen leicht noch einige andere Relationen; wie z. B. die nachstehenden.

Läfst man den willkürlichen Punct *P* mit einem der gegebenen *n* Puncte *A, B, C*, ...., z. B. mit *A* zusammenfallen, so ist $a = 0$, $b = AB$, $c = AC$, $d = AD, \ldots$, $s = a_1 = AS$, und die obige Gleichung (16) wird für diesen Fall:

$$\text{I.} \quad \beta.(AB)^2 + \gamma(AC)^2 + \delta(AD)^2 + \ldots = \Sigma(\alpha a_1^2) + a_1^2 . \Sigma(\alpha).$$

## §. VIII.

Zu der vorstehenden Reihe von Sätzen kann man auch durch eine andere elementare Entwicklung gelangen, welche sich auf einen eben so

---

Für jeden der gegebenen n Puncte findet eine analoge Gleichung statt. Wird jede dieser Gleichungen mit dem dem jedesmaligen Puncte $A, B, C, \ldots$ zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ multiplicirt und werden sodann alle Gleichungen addirt, so kommt:

$$\text{II.} \quad \Sigma[\alpha\beta\cdot(AB)^2] = \Sigma\alpha\cdot\Sigma\alpha a_1^2;$$

d. h.: „wird das Quadrat jeder der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Geraden, welche die gegebenen n Puncte paarweise verbinden, in die dem jedesmaligen Punctenpaare zugehörigen Coefficienten multiplicirt, so ist die Summe aller dieser Producte $\Sigma[\alpha\beta(AB)^2]$ gleich einem Producte, dessen einer Factor die Summe der Coefficienten $\Sigma(\alpha)$, und der andere die Summe der Producte $\Sigma\alpha a_1^2$, aus den Quadraten der Abstände der gegebenen Puncte von ihrem Schwerpuncte $S$ in die respectiven Coefficienten ist."

Wird die Gleichung (II.) mit der obigen (16) verbunden und die Größe $\Sigma(\alpha a_1^2)$ fortgeschafft, so erhält man:

$$\text{III.} \quad s.\Sigma(\alpha) = \sqrt{(\Sigma(\alpha).\Sigma\alpha a^2) - \Sigma[\alpha\beta(AB)^2]}.$$

Diese Gleichung, durch $\Sigma(\alpha)$ dividirt, giebt den Abstand $s$ des willkürlichen Punctes $P$ von dem Schwerpuncte $S$; ein Ausdruck, welchen *Lagrange* zuerst aufgestellt und auf eigenthümliche (doch nicht einfache) Art bewiesen hat (*Mechan. analyt. t. I. sect. III.* nº. 20.). Denkt man sich nach den Richtungen der Strahlen $a, b, c, \ldots$ Kräfte $\alpha a, \beta b, \gamma c, \ldots$ wirkend, so giebt, wie leicht zu sehen, die vorstehende Gleichung (III.) die Größe der Resultante $s.\Sigma(\alpha)$, und zwar hat sie die Richtung des Strahles $s$, so daſs sie also jedesmal durch den Schwerpunct $S$ geht. Demnach wird sowohl jener Abstand $s$ als diese Resultante $s\Sigma(\alpha)$ gefunden, sobald die Abstände der n Puncte $A, B, C, \ldots$ von einander und von dem Puncte $P$, nebst den zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gegeben sind.

Für jeden der n Puncte $A, B, C, \ldots$ findet eine Gleichung von der Form (I.) statt. Werden diese n Gleichungen addirt, so erhält man:

$$\text{IV.} \quad \Sigma[(\alpha+\beta)(AB)^2] = n.\Sigma(\alpha a_1^2) + \Sigma(\alpha).\Sigma(a_1^2);$$

d. h.: „wird das Quadrat des Abstandes je zweier der gegebenen n Puncte $A, B, C, \ldots$ mit der Summe der den beiden Puncten zugehörigen Coefficienten multiplicirt, so ist die Summe der Producte, $\Sigma[(\alpha+\beta).(AB)^2]$, gleich der nfachen Summe der Producte aus den Quadraten der Abstände $(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ der gegebenen Puncte von ihrem Schwerpuncte $S$ in die zugehörigen Coefficienten, $n\Sigma(\alpha a_1^2)$, mehr dem Producte aus der Summe der Coefficienten in die Summe der letztgenannten Quadrate $\Sigma(\alpha).\Sigma(a_1^2)$."

Aus (II.) und (IV.) die Größe $\Sigma(\alpha a_1^2)$ eliminirt, giebt:

$$\text{V.} \quad \Sigma(a_1^2).(\Sigma(\alpha))^2 = \Sigma(\alpha).\Sigma[(\alpha+\beta)(AB)^2] - n.\Sigma[\alpha\beta(AB)^2],$$

wodurch z. B. die Summe der Quadrate $\Sigma(a_1^2)$ der Abstände des Schwerpuncts $S$ von den n Puncten $A, B, C, \ldots$ gefunden wird, wenn diese Puncte nebst den zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gegeben sind.

Für den besondern Fall, wo die Coefficienten einander gleich, also $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1$ gesetzt werden können, reduciren sich die Gleichungen (II., IV. und V.) auf folgende:

$$\text{VI.} \quad \Sigma(AB)^2 = n.\Sigma(a_1^2),$$

welche zeigt: „daſs die nfache Summe der Quadrate der Strahlen $a_1, b_1, c_1, \ldots$, die den Schwerpunct $S$ mit den gegebenen Puncten $A, B, C, \ldots$ verbinden, gleich ist der Summe der Quadrate der Abstände dieser letztern Puncte von einander." — Dieser Satz, auf regelmäßige Vielecke angewendet, giebt unmittelbar einige bekannte Sätze. Analoge Sätze folgen aus ihm über regelmäßige Polyeder.

Unter derselben Beschränkung reducirt sich die Gleichung (III.) auf folgende:

$$\text{VII.} \quad (ns)^2 = n.\Sigma(a^2) - \Sigma(AB)^2.$$

einfachen Fundamentalsatz gründet, als die vorige (§. I.). Die Sätze gehen dann in umgekehrter Ordnung auseinander hervor, so dafs man zuerst auf die eben ausgesprochenen Resultate (§. VII.) geführt wird und sofort aus diesen die ihnen im Obigen vorangehenden Sätze ableiten kann. Für Freunde einfacher geometrischer Betrachtungen möchte eine kurze Andeutung dieser andern Entwicklungsart nicht uninteressant sein; deshalb Folgendes.

## §. IX.

***Fundamentalsatz.*** *„Zieht man aus der Spitze P eines beliebigen Dreieckes APB (Fig. 3.) nach irgend einem Puncte M der Grundlinie AB die Gerade PM = m, bezeichnet die Abschnitte AM und BM der Grundlinie beziehlich durch $b_1$ und $a_1$ und die Schenkel AP und BP durch a und b, so ist immer:*

$$17.\quad a_1 a^2 + b_1 b^2 = (a_1 + b_1) m^2 + (a_1 + b_1) a_1 b_1.$$

Denn zufolge einer trigonometrischen Grundgleichung hat man, wenn $\varphi$ den Winkel *AMP* bezeichnet:

$$18.\quad \cos\varphi = \frac{m^2 + b_1^2 - a^2}{2 m b_1} = -\frac{m^2 + a_1^2 - b^2}{2 m a_1},$$

woraus leicht jene Gleichung (17) folgt. Der Beweis kann übrigens auch geometrisch, durch den sogenannten verallgemeinerten pythagoräischen Lehrsatz, eben so einfach geführt werden.

## §. X.

Setzt man

$$19.\quad a_1 : b_1 = \alpha : \beta,$$

wo $\alpha$ und $\beta$ beliebige gleichartige Gröfsen oder Zahlen sind, so läfst sich dadurch die obige Gleichung (§. IX. 17) in folgende verwandeln:

$$20.\quad \alpha a^2 + \beta b^2 = (\alpha + \beta) m^2 + (\alpha + \beta) a_1 b_1,$$

woraus man unter andern nachstehende Sätze schliefst:

*a. „Sind in einer Ebene zwei feste Puncte A und B, nebst zugehörigen Coefficienten $\alpha$, $\beta$ gegeben, und werden die Quadrate ihrer Abstände a, b von einem beliebigen Puncte P mit den respectiven Coefficienten multiplicirt: so ist die Summe der Producte $\alpha a^2 + \beta b^2$, stets um die Constante $(\alpha + \beta) a_1 b_1$ gröfser, als das Product $(\alpha + \beta) m^2$, dessen einer Factor die Summe $(\alpha + \beta)$ der Coefficienten und der andere das Quadrat des Abstandes m des Punctes P von einem dritten, festen Puncte M ist. Dieser dritte bestimmte Punct M liegt auf der Geraden, welche*

*A* und *B* verbindet und theilt sie in Abschnitte, die sich umgekehrt verhalten, wie die ihren Endpuncten zugehörigen Coefficienten." (19.)

*b.* Sind die Puncte *A* und *B*, nebst den Coefficienten $\alpha$ und $\beta$ gegeben, und soll die Summe $\alpha a^2+\beta b^2$ constant, etwa $= K$ sein: so ist auch $m$ constant und mithin der Ort des Puncts *P* eine Kreislinie, deren Mittelpunct *M* ist. Umgekehrt entsprechen Puncten *P*, die gleichweit von *M* abstehen, gleiche Summen $\alpha a^2+\beta b^2$. Auch nehmen diese Summe und der Radius $m$ des Kreises gleichzeitig zu und ab, so dafs also

*c.* Die Summe $\alpha a^2+\beta b^2$ ein Minimum, $=\alpha a_1^2+\beta b_1^2$ wird, wenn $m=0$ ist, d. h. wenn der Punct *P* auf den festen Punct *M* fällt.

## §. XI.

*a.* „Sind in einer Ebene irgend eine Anzahl beliebiger Puncte *A, B, C, .....* nebst zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gegeben, so giebt es einen andern bestimmten Punct *S*, von der Beschaffenheit, dafs, wenn man aus jedem beliebigen Puncte *P* Strahlen $a, b, c, \dots s$ nach allen Puncten zieht, immer:

21. $\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2+\dots = (\alpha+\beta+\gamma+\dots)s^2+K$

ist, wo *K* eine constante, aber von den gegebenen Elementen abhängige Gröfse bezeichnet."

Der Beweis dieses Satzes ist dem des entsprechenden Satzes in (§. III.) analog. Er beruht nämlich blofs auf wiederholter Anwendung des vorigen Satzes (§. X.). Denn, seien zunächst nur drei Puncte *A*, *B*, *C* gegeben, so hat man in Rücksicht der Puncte *A* und *B*:

$$\alpha a^2+\beta b^2 = (\alpha+\beta)m^2+(\alpha+\beta)a_1 b_1 = (\alpha+\beta)m^2+(\alpha+\beta)AM.BM,$$

und ferner in Rücksicht der Puncte *M* und *C*, denen die Coefficienten $(\alpha+\beta)$ und $\gamma$ zugehören:

$$(\alpha+\beta)m^2+\gamma c^2 = (\alpha+\beta+\gamma)n^2+(\alpha+\beta+\gamma)MN.CN;$$

woraus durch Verbindung beider Gleichungen folgt:

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2 = (\alpha+\beta+\gamma)n^2+(\alpha+\beta+\gamma)MN.CN+(\alpha+\beta)AM.BM:$$

was dem Satze gemäfs ist, da die zwei letzten Glieder rechts constant sind. Der Punct *N* nämlich liegt auf der Geraden *MC* und theilt sie in Abschnitte *MN* und *CN*, die sich verhalten wie $\gamma$ zu $(\alpha+\beta)$, gerade eben so wie in (§. III.); $n$ ist der Strahl, der *N* mit dem beliebigen Puncte *P* verbindet.

Gleicherweise gelangt man zum Beweise des Satzes für vier, fünf, .... $n$ Puncte.

Aus dem vorstehenden Satze ergeben sich ferner folgende Sätze:

*b. „Soll die Summe der Producte, $\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2+\dots$ constant, etwa $=\Sigma$ sein, so dafs*

22. $\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2+\dots=\Sigma=(\alpha+\beta+\gamma+\dots)s^2+K$,

*so ist der Ort des Punctes P eine Kreislinie, welche stets den festen Punct S zum Mittelpuncte und s zum Radius hat. Die Summe Σ und der Radius s des Kreises nehmen gleichzeitig zu, oder ab."* Daher folgt weiter.

*c. „Die Summe Σ wird ein Minimum, wenn $s=0$, d. h. wenn P auf den bestimmten Punct S fällt. Also entspricht unter allen Puncten der Ebene dem Puncte S die kleinste Summe, und zwar ist in diesem Falle:*

23. $\Sigma=\alpha a_1^2+\beta b_1^2+\gamma c_1^2+\dots=K$,

*wo $a_1$, $b_1$, $c_1$, .... die Strahlen sind, welche S mit den gegebenen Puncten A, B, C, .... verbinden (§. VI.), und wodurch die Constante K auf eine zweite Art bestimmt wird."*

## §. XII.

Wie man sieht sind wir auf diesem zweiten Wege zu denselben Sätzen gelangt, welche sich in (§. VII.) befinden. Die diesen letztern vorangehenden Sätze kann man nun, wie schon (§. VIII.) erwähnt worden, umgekehrt aus den vorstehenden leicht erhalten.

Ferner lassen sich aus der gegenwärtigen Betrachtung unmittelbar eine grofse Reihe von Sätzen über die geradlinigen Vielecke und den Kreis entwickeln, welche von den früher erwähnten (§. IV.) verschieden sind, ihnen jedoch zum Theil, als in gewissem Sinne entsprechend, an die Seite gesetzt werden können. Diese Sätze sind wegen ihrer Einfachheit und ihres innigen Zusammenhangs unter sich besonders geeignet, beim Unterrichte das Interesse der Schüler zu erwecken und dieselben zur Selbstthätigkeit anzuregen; wovon mich frühere Erfahrungen überzeugt haben. Ich werde dieselben an geeignetem Orte abhandeln; hier liegen sie aufser unserm eigentlichen Zwecke. Aber auch ein grofser Theil der in dieser Abhandlung enthaltenen Sätze lassen sich ohne Schwierigkeit dem Schulpensum einverleiben, und zwar um so leichter, wenn sie mit den hier übergangenen Sätzen, so wie mit denjenigen, welche, bei den nachfolgenden Betrachtungen als von unserm nächsten Zwecke abliegend, unberücksichtigt bleiben müssen, im Zusammenhange vorgetragen werden.

## §. XIII.

In Bezug auf die obigen Sätze (§. XI. oder VII.) kann noch Folgendes bemerkt werden.

Sind die Summen der Producte $\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \ldots.$ für zwei gegebene Puncte $P$ und $P_1$ bekannt: sind sie z. B. $\Sigma$ und $\Sigma_1$, so hat man vermöge (§. XI. 22.):

$$\Sigma - \Sigma_1 = (\alpha + \beta + \gamma + \ldots.)(s^2 - s_1^2),$$

oder

$$24. \quad s^2 - s_1^2 = \frac{\Sigma - \Sigma_1}{(\alpha + \beta + \gamma + \ldots.)},$$

wo $s$ und $s_1$ die Strahlen sind, welche die gegebenen Puncte $P$ und $P_1$ mit dem Schwerpuncte $S$ verbinden. Diese Strahlen $s$ und $s_1$ werden durch die Gleichung (24) nicht bestimmt. Sieht man sie aber als veränderlich an, als Strahlen, welche die Puncte $P$ und $P_1$ mit irgend einem Puncte $S_1$ verbinden, so ist, da der Ausdruck rechts (24) constant oder gegeben ist, der Ort des Punctes $S_1$ eine leicht zu construirende Gerade, welche auf der Geraden $PP_1$ senkrecht steht und durch den Schwerpunct $S$ geht. Kennt man daher noch von einem dritten gegebnen Puncte $P_2$ (welcher jedoch nicht in der geraden $PP_1$ liegen darf) die ihm entsprechende Summe $\Sigma_2$, so ist der Schwerpunct $S$ bestimmt und leicht zu finden. Nämlich er mufs dann in noch zwei Geraden liegen, welche mittelst der Gleichungen

$$s^2 - s_2^2 = \frac{\Sigma - \Sigma_2}{(\alpha + \beta + \gamma + \ldots.)} \quad \text{und} \quad s_1^2 - s_2^2 = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{(\alpha + \beta + \gamma + \ldots.)}$$

gefunden werden. Der gemeinsame Durchschnitt dieser beiden Geraden mit der ersten (24) ist der verlangte Schwerpunct $S$.

Ferner mag noch erwähnt werden, dafs wenn statt der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$, welche einem gegebenen Systeme von Puncten $A, B, C, \ldots.$ angehören, andere genommen werden, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots.$, die sich unter einander so verhalten, wie jene ersten: dafs dann der Schwerpunct $S$ des Systems für beide Fälle derselbe ist. Denn alsdann lassen sich die neuen Coefficienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots.$ immer durch $x\alpha, x\beta, x\gamma, \ldots.$ ausdrücken, wo $x$ irgend eine bestimmte Zahlengröfse bezeichnet.

# Von den Fufspuncten-Vielecken und Fufspuncten-Curven.

## *A.* Von den Fufspuncten-Vielecken.

### §. XIV.

Erklärung. Fället man auf alle Seiten eines gegebenen Vielecks $\mathfrak{V}$, aus einem in seiner Ebene liegenden Puncte $P$ Perpendikel und verbindet deren Fufspuncte der Reihe nach paarweise durch Gerade, so entsteht ein neues Vieleck $V$, welches dem gegebenen eingeschrieben und mit demselben von gleicher Gattung ist. Dieses neue Vieleck $V$ soll fortan „*Fufspuncten-Vieleck des Punctes $P$ in Bezug auf das gegebene Vieleck $\mathfrak{V}$*" heifsen.

Jedem Puncte $P$ in der Ebene des gegebenen Vielecks $\mathfrak{V}$ entspricht also ein bestimmtes Fufspuncten-Vieleck $V$, selbst in dem Falle, wo der Punct $P$ mit einer Ecke des gegebenen Vielecks $\mathfrak{V}$ zusammen, oder in eine Seite desselben fällt. Dabei kann unter besondern Umständen das Fufspuncten-Vieleck in gewisse Grenzfälle übergehn.

### §. XV.

*„In der Ebene eines gegebenen Vieleckes $\mathfrak{V}$ ist der Ort aller Puncte $P$, deren Fufspuncten-Vielecke $V$ in Bezug auf $\mathfrak{V}$ einen gleichen gegebenen Inhalt haben sollen, eine bestimmte Kreislinie, deren Radius mit diesem Inhalte sich gleichzeitig ändert, deren Mittelpunct aber stets einer und derselbe feste Punct $S$ ist. Dieser Punct $S$ ist nämlich der Schwerpunct der Ecken des gegebenen Vieleckes $\mathfrak{V}$, insofern jeder derselben der Sinus des doppelten Nebenwinkels von dem an ihr liegenden Winkel des gegebenen Vielecks $\mathfrak{V}$ als Coefficient zugeordnet wird."*

Es sei etwa $ABCD$ (Fig. 4.) das gegebene Vieleck $\mathfrak{V}$, und aus einem beliebigen Puncte $P$ seien auf die Seiten desselben die Perpendikel $PA_1$, $PB_1$, $PC_1$, $PD_1$ gefällt, so ist $A_1B_1C_1D_1$ das dem Puncte $P$ entsprechende veränderliche Fufspuncten-Vieleck $V$. Bezeichnen wir ferner durch $a, b, c, d$ die veränderlichen Strahlen $PA, PB, PC, PD$, welche von dem Puncte $P$ nach den Ecken des gegebenen Vielecks $V$ gehen, und durch $A, B, C, D$ die Nebenwinkel der diesen Ecken anliegenden Winkel $DAB, ABC, BCD, CDA$: so hat man vermöge der constanten

(und theils rechten) Winkel der Vierecke $AD_1PA_1$, $BA_1PB_1$, .... etc., zwischen dem Inhalte dieser Vierecke und dem der entsprechenden Dreiecke $D_1PA_1$, $A_1PB_1$, .... etc. folgende Gleichungen:

$$25. \quad \begin{cases} 2.D_1PA_1 - AD_1PA_1 = \frac{1}{4}a^2\sin 2A, \\ 2.A_1PB_1 - BA_1PB_1 = \frac{1}{4}b^2\sin 2B, \\ 2.B_1PC_1 - CB_1PC_1 = \frac{1}{4}c^2\sin 2C, \\ 2.C_1PD_1 - DC_1PD_1 = \frac{1}{4}d^2\sin 2D. \end{cases}$$

Nun machen aber die in diesen Gleichungen enthaltenen Dreiecke zusammen das Vieleck $A_1B_1C_1D_1$, und die vorkommenden Vierecke zusammen das Vieleck $ABCD$ aus; also folgt durch Addition derselben:

$$26. \quad 2A_1B_1C_1D_1 - ABCD = \tfrac{1}{4}(a^2\sin 2A + b^2\sin 2B + c^2\sin 2C + d^2\sin 2D).$$

Es ist klar, dafs man allemal eine ähnliche Gleichung erhält, so viele Seiten auch immer das gegebene Vieleck $\mathfrak{B}$ haben mag. Daher ist allgemein, wenn $\mathfrak{B}$ den Inhalt des gegebenen und $V$ den Inhalt des Fufspuncten-Vieleckes bezeichnet,

$$27. \quad 4(2V - \mathfrak{B}) = a^2\sin 2A + b^2\sin 2B + c^2\sin 2C + \ldots = \Sigma(a^2\sin 2A).$$

Durch diese Gleichung wird die Richtigkeit des Satzes vollständig dargethan. Denn soll der Punct $P$ so gewählt sein, dafs der Inhalt $V$ seines Fufspunct-Vieleckes eine gegebene constante Gröfse sei, so ist auch die Differenz $(2V - \mathfrak{B})$ constant; und dann stimmt die Gleichung (27) ganz mit der frühern in (§. XI. 22) oder (§. VII. 16) überein, indem die bekannten Gröfsen $\sin 2A$, $\sin 2B$, .... etc. die Stelle der frühern Coefficienten $\alpha$, $\beta$, .... etc. vertreten. Deshalb mufs auch im gegenwärtigen Falle der Ort des Punctes $P$ eine Kreislinie sein, welche den im Satze beschriebenen Schwerpunct $S$ zum Mittelpuncte hat.

## §. XVI.

Um den aufgestellten Satz ausführlicher zu erörtern, werde die letzte Gleichung (27) nach dem Muster der Gleichung (16) in (§. VII.) umgewandelt, so erhält man:

$$28. \quad \begin{aligned} 4(2V - \mathfrak{B}) &= a_1^2\sin 2A + b_1^2\sin 2B + c_1^2\sin 2C + \ldots \\ &\quad + s^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \ldots) \\ &= \Sigma(a_1^2\sin 2A) + s^2\Sigma(\sin 2A), \end{aligned}$$

wo nämlich $a_1$, $b_1$, $c_1$, .... und $s$ die Strahlen sind, welche den beschriebenen Schwerpunct $S$ mit den Ecken $A$, $B$, $C$, .... und mit dem beliebigen Puncte $P$ verbinden.

Bezeichnet man also mit $v$ den Inhalt desjenigen Fufspuncten-Vielecks, welches dem Schwerpuncte $S$ selbst entspricht, so ist für diesen Fall $s = 0$, und mithin:

$$29. \quad 4(2v - \mathfrak{B}) = \Sigma(a_1^2 \sin 2A).$$

Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden (28) ab, so erhält man

$$30. \quad 4(V - v) = \tfrac{1}{2}s^2 . \Sigma(\sin 2A).$$

Hieraus sieht man: *„dafs die Inhalts-Zunahme des Fufspuncten-Vieleckes $V$ mit dem Quadrate des Abstandes $s$ des zugehörigen Punctes $P$ vom Schwerpuncte $S$ in gleichem Verhältnisse wächst oder schwindet."*

Ferner folgt daraus:

*„Dafs im Allgemeinen unter allen Fufspuncten-Vielecken dasjenige $v$, welches dem Schwerpuncte $S$ entspricht, entweder ein Minimum oder ein Maximum des Inhalts hat, je nachdem beziehlich die constante Gröfse $\Sigma(\sin 2A)$ positiv oder negativ ist."*

Ob aber diese Gröfse $\Sigma(\sin 2A)$ positiv oder negativ sei, hängt von folgenden Umständen ab. Nämlich: 1) sind die Winkel $A$, $B$, $C$, .... alle spitz, so ist die Gröfse offenbar positiv, und dann findet also für das Fufspuncten-Vieleck von $S$ ein Minimum des Inhalts Statt. 2) Sind dagegen unter den Winkeln $A$, $B$, $C$, .... einige stumpf, so kann möglicher Weise $\Sigma(\sin 2A)$ negativ, also der Inhalt des Fufspuncten-Vielecks von $S$ ein Maximum werden. Dieser Fall kann besonders eintreten, wenn das gegebene Vieleck $\mathfrak{B}$ ein nicht convexes ist; er kann aber auch bei convexen Vielecken Statt finden, und tritt insbesondere beim Dreieck immer ein, (denn wenn das gegebene Vieleck $\mathfrak{B}$ ein Dreieck ist, so sind mindestens zwei von den drei Winkeln $A$, $B$, $C$ stumpf, und man überzeugt sich leicht, dafs dabei immer $\Sigma(\sin 2A)$ negativ ausfällt).

Ist insbesondere $\Sigma(\sin 2A) = 0$, so findet weder ein Minimum noch ein Maximum Statt, sondern in diesem Falle ist der Inhalt des Fufspuncten-Vielecks $V$ für alle Puncte $P$ constant.

## §. XVII.

Für spätere Untersuchungen ist es zweckmäfsig die Bedeutung des Ausdruckes:

$$31. \quad \tfrac{1}{2}s^2\Sigma(\sin 2A) = \tfrac{1}{2}s^2 \sin 2A + \tfrac{1}{2}s^2 \sin 2B + \tfrac{1}{2}s^2 \sin 2C + \ldots,$$

welcher die vierfache Differenz zwischen den Inhalten der Fufspuncten-Vielecke eines beliebigen Puncts $P$ und des Puncts $S$ repräsentirt (30)

näher anzugeben. Wir beschränken uns hiebei auf den bestimmten Fall, wo das gegebene Vieleck 𝔙 convex ist, und wo überdies die Nebenwinkel $A, B, C, \ldots$ seiner sämmtlichen Winkel spitz, also $\Sigma(\sin 2A)$ positiv ist. In diesem Falle ist bekanntlich die Summe der Nebenwinkel $A, B, C, \ldots$ gleich $2\pi$, und daher:

$$32.\quad 2A + 2B + 2C + 2D + \ldots = 4\pi.$$

Wird bemerkt, dafs $\frac{1}{2}s^2 \sin 2A$ der Flächen-Inhalt eines gleichschenkligen Dreieckes ist, dessen Schenkel $= s$ und dessen Winkel an der Spitze $= 2A$ ist, so folgt, dafs die Gröfse $\frac{1}{2}s^2\Sigma(\sin 2A)$ in (31) als die Inhaltssumme von $n$ gleichschenkligen Dreiecken anzusehen ist, deren Schenkel alle $= s$ und deren Winkel an der Spitze beziehlich $2A, 2B, 2C, \ldots$ sind. Man denke sich ein Vieleck 𝔘 von der Beschaffenheit, dafs es, einem Kreise vom Radius $s$ eingeschrieben, in demselben zwei Umläufe macht *), und dafs die über seinen Seiten 𝔄, 𝔅, ℭ, .... stehenden Centriwinkel jenen Winkeln $2A, 2B, 2C, \ldots$ beziehlich gleich (und zusammen $= 4\pi$) sind: so ist der Inhalt dieses Vielecks offenbar die Summe der genannten Dreiecke; denn jenes wird durch die nach seinen Ecken gehenden Radien in der That in diese zerlegt. Also ist:

$$33.\quad \tfrac{1}{2}s^2.\Sigma(\sin 2A) = \mathfrak{U},$$

und daher (30):

$$4(V - v) = \mathfrak{U}, \quad \text{oder}$$

$$34.\quad V = v + \tfrac{1}{4}.\mathfrak{U}.$$

Somit hat man für den gegenwärtigen Fall folgenden Satz:

*„Ist in Rücksicht eines gegebenen Vielecks 𝔙 der Inhalt des dem Schwerpuncte S entsprechenden Fufspuncten-Vieleckes v bekannt, so kann der Inhalt jedes Fufspuncten-Vielecks V, welches einem beliebigen, von S um die Entfernung s abstehenden Puncte P entspricht, dadurch gefunden werden, dafs man zu jenem Inhalte v den vierten Theil des Inhalts eines andern bestimmten Vielecks 𝔘 addirt. Dieses andere Vieleck 𝔘 ist einem Kreise vom Radius s eingeschrieben, macht in demselben zwei Umläufe, und über seinen Seiten stehen Centriwinkel, die den doppelten Nebenwinkeln der Winkel des gegebenen Vielecks 𝔙 gleich sind."*

*) Leser, welche mit solchen Vielecken nicht vertraut sind, können sich einen Begriff davon machen, wenn sie z. B. in einem beliebigen Fünfecke im Kreise die fünf Diagonalen in einem Zuge ziehn; denn diese sind sofort die Seiten eines Fünfecks von zwei Umläufen.

## §. XVIII.

**Anmerkung.** Auch hier müssen zahlreiche specielle Sätze übergangen werden, welche sich unmittelbar aus dem Vorstehenden ableiten liefsen. Nur folgende im Eingange erwähnten Sätze von *Querret, Sturm* und *Lhuilier* über das beliebige Dreieck und das regelmäfsige Vieleck ($n$ Eck) mögen hier Platz finden.

1. Bei einem beliebigen Dreieck $\mathfrak{B}(ABC)$ kann leicht directe nachgewiesen werden, dafs der Mittelpunct des ihm umschriebenen Kreises zugleich der Schwerpunct $S$ der Ecken ist, wenn diesen die Sinus der doppelten Nebenwinkel als Coefficienten zugeordnet sind. Dasselbe kann aber auch aus dem obigen Satze (§. XVII.) geschlossen werden. Denn fällt der Punct $P$ mit einer der Ecken des Dreiecks zusammen, so wird der Inhalt des Fufspuncten-Dreiecks jedesmal $=0$; daher liegen die drei Ecken in einem Ortskreise, dessen Mittelpunct der genannte Schwerpunct $S$ sein mufs. Ferner schliefst man hieraus den bekannten Satz: „dafs wenn aus irgend einem Puncte des dem Dreiecke umschriebenen Kreises Perpendikel auf die drei Seiten des Dreiecks gefällt werden, dann die Fufspuncte dieser Perpendikel allemal in einer Geraden liegen. Es mufs nämlich wieder der Inhalt des Fufspuncten-Dreiecks $=0$ sein.

2. Der citirte Satz über jedes regelmäfsige Vieleck $\mathfrak{B}$ folgt gleichfalls sehr leicht. Nämlich einmal daraus, dafs alle Winkel des Vielecks und also auch alle Coefficienten $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ etc. unter sich gleich sind, mithin der Mittelpunct des Vielecks zugleich der ihm zugehörige Schwerpunct $S$ sein mufs. Zweitens daraus, dafs allen Ecken des Vielecks $\mathfrak{B}$, wenn der Punct $P$ der Reihe nach in sie verlegt wird, Fufspuncten-Vielecke $V$ von gleichem Inhalte, und zwar congruente, entsprechen, so dafs also der durch die Ecken gehende Kreis ein Ortskreis (für $P$) ist, und als solcher den Schwerpunct $S$ zum Mittelpuncte haben mufs. Eben so würden den Mitten der Seiten des gegebenen Vieleckes $\mathfrak{B}$ congruente Fufspuncten-Vielecke $V$ entsprechen; was zu ähnlichen Schlüssen berechtigte.

## §. XIX.

Kennt man in Bezug auf ein gegebenes Vieleck $\mathfrak{B}$ die Inhalte der Fufspuncten-Vielecke $V$, $V_1$, $V_2$ irgend dreier gegebener Puncte $P$, $P_1$, $P_2$ und bezeichnet man durch $s$, $s_1$, $s_2$ die Abstände dieser Puncte vom Schwer-

puncte S, so hat man folgende Gleichungen (§. XVII. und XIII.):

$$35. \quad \begin{cases} V - V_1 = \frac{1}{8}(s^2 - s_1^2)\Sigma(\sin 2A), \\ V - V_2 = \frac{1}{8}(s^2 - s_2^2)\Sigma(\sin 2A), \\ V_1 - V_2 = \frac{1}{8}(s_1^2 - s_2^2)\Sigma(\sin 2A). \end{cases}$$

Sieht man $s$, $s_1$, $s_2$ als veränderlich an, dagegen $V$, $V_1$, $V_2$ und $\Sigma(\sin 2A)$ als constant oder die Puncte $P$, $P_1$, $P_2$ als fest, so werden durch diese Gleichungen drei Gerade $X_2$, $X_1$, $X$ bestimmt, welche auf den Seiten des Dreieckes $PP_1P_2$ senkrecht stehen und sich im Schwerpuncte $S$ gegenseitig schneiden (§. XIII.). Durch je zwei derselben wird also, im Allgemeinen, der Schwerpunct $S$ gefunden.

### B. Von den Fufspuncten-Curven.

### §. XX.

Das der vorigen Betrachtung zu Grunde liegende Vieleck 𝔅 kann man in der Vorstellung sich so verändern lassen, dafs es immer mehr sich irgend einer Curve nähert und endlich in diese übergeht. Läfst man nämlich die Seitenzahl des Vieleckes immer mehr zunehmen, jede einzelne Seite aber zugleich schwinden, so nähert sich das Vieleck, wenn die Seitenzahl sehr grofs und jede Seite sehr klein geworden ist, offenbar irgend einer Curve; und wird die Seitenzahl unendlich grofs und jede Seite unendlich klein (wie man zu sagen pflegt), so kann schlechthin das Vieleck als eine Curve angesehen werden. Eben so kann man umgekehrt jede gegebene Curve 𝔅 als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten, die alle unendlich klein sind. Dabei ist klar: dafs die verlängerten Seiten des Vielecks in die Tangenten der Curve übergehen, und dafs die oben betrachteten Nebenwinkel $A$, $B$, $C$, .... bei der Curve unendlich klein werden, indem sie nämlich hier die äufsern Winkel sind, unter welchen sich die zunächst auf einander folgenden Tangenten der Curve gegenseitig schneiden, oder, wenn man sich kurz fassen will, als die Winkel angesehen werden können, welche die einzelnen Tangenten in ihren Berührungspuncten mit der Curve selbst bilden. Ferner ist klar, dafs beim Uebergang des Vielecks 𝔅 in eine Curve, auch das irgend einem Puncte $P$ zugehörige Fufspuncten-Vieleck $V$ in eine Curve übergeht, welche daher gleicherweise: *„Fufspuncten-Curve des Punctes $P$ in Bezug auf die gegebene Curve* 𝔅*"* heifsen soll. Sie ist nämlich der Ort der Fufspuncte aller aus

dem Puncte $P$ auf die Tangenten der Curve 𝔅 gefällten Perpendikel. Dafs diese Fufspuncte in der That eine continuirliche Curve bilden, erhellet auch unmittelbar aus der Anschauung. Denn wenn ein rechter Winkel sich so bewegt, dafs, während der eine Schenkel als Tangente an der Curve 𝔅 fortschreitet, der andere beständig durch den festen Punct $P$ geht, so beschreibt sein Scheitel eine Curve: die genannte Fufspuncten-Curve $V$.

Da auf diese Weise die Vielecke 𝔅 und $V$ in die Curven 𝔅 und $V$ übergehen, so müssen nothwendig die oben über jene aufgestellten Sätze auch für diese ihre Gültigkeit behalten. Daher kann z. B. unmittelbar geschlossen werden: $a$) dafs es für jede geschlossene und convexe Curve 𝔅 einen Punct $S$ geben mufs, dessen Fufspuncten-Curve $v$ in Bezug auf jene unter allen den kleinsten Inhalt hat, und dafs allen um einen gleichen Abstand $s$ von $S$ entfernten Puncten $P$ Fufspuncten-Curven $V$ von gleichem Inhalt entsprechen, und auch umgekehrt; $b$) dafs unter den genannten Gröfsen (𝔅, $v$, $s$, $V$ etc.) auch die obigen Gleichungen (§. XVI. und XVII.) bestehen; $c$) dafs ferner, wenn die gegebene Curve 𝔅 einen Mittelpunct besitzt, derselbe auch zugleich jener eigenthümliche Punct $S$ sein mufs (§. XVIII. 2.) u. s. w.

Aus diesen angedeuteten Sätzen liefsen sich nun z. B. in Bezug auf den Kreis und die Ellipse unmittelbar eine Reihe von Sätzen ableiten. Denn da man in Bezug auf den Kreis die Fufspuncten-Curve $v$ seines Mittelpuncts $S$, und bei der Ellipse die Fufspuncten-Curve $V$ ihres Brennpunctes $P$, so wie dessen Abstand $s$ vom Mittelpunct $S$ kennt, so kann für beide leicht der Inhalt der Fufspuncten-Curve jedes beliebigen Punctes $P$ gefunden werden. Auf diese Sätze werden wir später zurückkommen. Zunächst aber ist die Eigenschaft des Punctes $S$ bei allgemeinen Curven bestimmter anzugeben und dessen Beziehung zu der Curve selbst genauer zu erforschen.

## §. XXI.

Da die Bestimmung des Punctes $S$ beim Vielecke 𝔅 von den Sinus der doppelten Nebenwinkel $2A$, $2B$, $2C$, .... abhängt, diese Winkel aber bei der Curve 𝔅 unendlich klein, ihre Sinus mithin unbrauchbar werden, so kommt es darauf an, zu erforschen, welche andere bestimmte Gröfsen an die Stelle dieser Sinus treten können.

Zu diesem Zwecke nehmen wir das ursprüngliche Vieleck 𝔅 gleichseitig an; was unbeschadet der Allgemeinheit der daraus zu folgernden Resultate geschehen darf. Es sei also z. B. $ZABCD$.... (Fig. 5.) ein Theil eines beliebigen gleichseitigen, convexen Vielecks 𝔅. Aus den Mitten $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, .... der Seiten errichte man auf diese die Perpendikel $A_1R$, $B_1RS$, $C_1ST$, ...., nehme jedes davon bis zu dem Puncte $R$, $S$, $T$, ...., wo es von dem nachfolgenden geschnitten wird, und setze die Abschnitte $A_1R=\alpha_1$, $B_1S=\beta_1$, $C_1T=\gamma_1$, ....; ferner ziehe man die Strahlen $AR=\alpha$, $BS=\beta$, $CT=\gamma$ .... und bezeichne durch $h$ die halbe Seite des Vielecks, so dafs $h=AA_1=AB_1=BC_1=$ ...., so hat man z. B., vermöge des Viereckes $AA_1RB_1$, in welchem $RA_1=RB_1=\alpha_1$ und die Winkel bei $A_1$ und $B_1$ rechte sind, folgende Gleichung:

$$36.\quad \sin(2A) = 4\frac{h\alpha_1(\alpha_1^2-h^2)}{\alpha^4} = 4\frac{h}{\alpha}\left(\frac{\alpha_1^3}{\alpha^3}-\frac{h^2\alpha_1}{\alpha^3}\right).$$

Eben so ist

$$\sin 2B = 4\frac{h}{\beta}\left(\frac{\beta_1^3}{\beta^3}-\frac{h^2\beta_1}{\beta^3}\right);\qquad \sin 2C = 4\frac{h}{\gamma}\left(\frac{\gamma_1^3}{\gamma^3}-\frac{h^2\gamma_1}{\gamma^3}\right);\ \text{etc.}$$

und daher ist z. B.

$$37.\quad \frac{\sin(2A)}{\sin(2C)} = \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\alpha_1^3}{\alpha^3}-\frac{h^2\alpha_1}{\alpha^3}\right):\left(\frac{\gamma_1^3}{\gamma^3}-\frac{h^2\gamma_1}{\gamma^3}\right).$$

Es kommt nun darauf an, den Werth dieses Verhältnisses (37) für den Fall zu bestimmen, wo das Vieleck 𝔅 in eine Curve übergegangen ist. Da, um zu diesem Falle zu gelangen, die halbe Seite $h$ immer kleiner und zuletzt unendlich klein werden mufs, so nähern sich $\alpha_1$ und $\alpha$, $\gamma_1$ und $\gamma$ immer mehr der Gleichheit, bis zuletzt schlechterdings $\alpha_1=\alpha$ und $\gamma_1=\gamma$ zu setzen ist. Dann wird aber zugleich $\alpha_1^3:\alpha^3=1$, $\gamma_1^3:\gamma^3=1$ und, weil $h$ gegen $\alpha$ und $\gamma$ unendlich klein ist, $h^2\alpha_1:\alpha^3=0$ und $h^2\gamma_1:\gamma^3=0$. Demnach hat man als Grenzwerth des Verhältnisses (37), oder für die Curve 𝔅:

$$38.\quad \sin(2A):\sin(2C) = \gamma:\alpha = \frac{1}{\alpha}:\frac{1}{\gamma}.$$

In diesem Falle aber sind die Strahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... die Krümmungsradien der Curve 𝔅 in den Puncten $A$, $B$, $C$, ....; was aus der Construction erhellet. Denn es ist z. B. $R$ der Mittelpunct und $\alpha$ der Radius eines Kreises, der durch drei auf einander folgende Ecken $Z$, $A$, $B$ des Vielecks 𝔅 geht, und welcher beim Uebergang des Vielecks in die Curve zum Krümmungskreise dieser letztern im Puncte $A$ wird. Somit sind wir zu folgendem Resultate gelangt (38):

*„Die Sinus der doppelten Winkel* $2A$, $2B$, $2C$, ...., *welche die Tangenten einer Curve* 𝔅 *in ihren Berührungspuncten mit der Curve selbst bilden (oder unter welchen sich die auf einander folgenden Tangenten schneiden), verhalten sich umgekehrt wie die Krümmungsradien* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...., *oder direct wie die Krümmungen der Curve in den betreffenden Berührungspuncten."*

Dieses Resultat kann auch aus folgender Betrachtung abgeleitet werden. Da der durch $A$ bezeichnete Winkel (Nebenwinkel von $ZAB$) dem Winkel $A_1RB_1$ gleich und dieser durch den Strahl $RA = a$ gehälftet ist, so hat man

$$\sin A = 2\sin(\tfrac{1}{2}A).\cos(\tfrac{1}{2}A) = 2\frac{h\alpha_1}{\alpha^2},$$

und eben so

$$\sin B = 2\frac{h\beta_1}{\beta^2}; \qquad \sin C = 2\frac{h\gamma_1}{\gamma^2}; \text{ etc.}$$

Daher ist z. B

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\gamma}{\alpha}.\frac{\alpha_1\gamma}{\alpha\gamma_1},$$

und für den Fall, wo das Vieleck in eine Curve übergeht, also $\alpha_1 = \alpha$ und $\gamma_1 = \gamma$ wird, erhält man:

$$39. \quad \sin A : \sin C = \gamma : \alpha = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\gamma}.$$

Hiemit sind wir zu dem zweiten Resultate gelangt: *„dafs auch die Sinus der einfachen Winkel, welche die Tangenten in ihren Berührungspuncten mit der Curve* 𝔅 *bilden, sich verhalten, wie die diesen Puncten zugehörigen Krümmungen der Curve."*

Dieses Resultat steht mit dem vorigen (39) nicht im Widerspruche; vielmehr wird das eine durch das andere bestätigt. Denn weil

$$\sin(2A) : \sin(2C) = \sin A \cos A : \sin C \cos C,$$

für sehr kleine oder unendlich kleine Winkel $A$ und $C$ aber schlechthin gesetzt werden darf:

$$\cos A : \cos C = 1,$$

so ist (für die Curve 𝔅):

$$40. \quad \sin(2A) : \sin(2C) = \sin A : \sin C;$$

woraus das Gesagte folgt. Endlich mag noch, behufs späterer Betrachtungen, bemerkt werden, dafs sehr kleine Winkel (in Bogen oder Zahlen ausgedrückt) sich verhalten, wie ihre Sinus; so dafs also:

$$41. \quad \sin A : \sin C = A : C = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\gamma},$$

wornach drittens: „*auch die Winkel, welche die Tangenten an die Curve* 𝔙 *mit ihr bilden, sich wie die den Berührungspuncten zugehörigen Krümmungen der Curve verhalten.*"

### §. XXII.

Durch das obige Resultat sind wir nunmehr in Stand gesetzt, bei jeder Curve 𝔙 den Punct $S$ vermittelst gewisser anschaulicher und endlicher Gröfsen zu bestimmen. Nämlich es können zur Bestimmung von $S$ statt der unendlich kleinen Coefficienten $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$, .... die ihnen proportionalen umgekehrten Werthe $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, .... der respectiven Krümmungshalbmesser $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... der Curve 𝔙 genommen werden (§. XV.). Hienach steht der bestimmte Punct $S$ in folgender Beziehung zu der Curve 𝔙. „*Er ist ihr Schwerpunct, wenn sie in unendlich kleine gleiche Elemente getheilt und in den Theilungspuncten mit Gewichten belastet gedacht wird, welche sich verkehrt verhalten, wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser, oder direct wie die zugehörigen Krümmungen.*" Aus diesem Grunde soll der Punct $S$ künftig „*Krümmungs-Schwerpunct*" der Curve 𝔙 genannt werden.

Es wird hiemit wiederum augenscheinlich (§. XX.), dafs, wenn die Curve 𝔙 einen Mittelpunct hat, dann ihr Krümmungs-Schwerpunct $S$ mit diesem zusammenfallen mufs.

### §. XXIII.

Dafs die früher über das Vieleck 𝔙 aufgestellten Gleichungen und Sätze auch für den Grenzfall, wo dasselbe in eine Curve 𝔙 übergeht, noch gültig sein müssen, ist einleuchtend und früher schon erwähnt worden (§. XX.). Daher hat man auch für die Curve, in den nämlichen Zeichen und im nämlichen Sinne verstanden, unmittelbar folgende Gleichungen (27., 28. und 34.):

42. $4(2V - \mathfrak{V}) = \Sigma(a^2 \sin 2A)$.

43. $4(2V - \mathfrak{V}) = \Sigma(a_1^2 \sin 2A) + s^2 . \Sigma(\sin 2A)$.

44. $4(V - v) = \frac{1}{2} s^2 \Sigma(\sin 2A) = U$.

Diese Gleichungen, in Worten ausgesprochen, enthalten zunächst folgende Sätze:

*a) Soll in Rücksicht einer gegebenen geschlossenen und überall convexen Curve* 𝔙 *der Inhalt der irgend einem veränderlichen Puncte* $P$ *entsprechenden Fufspuncten-Curve* $V$ *constant bleiben, so ist der Ort des Punctes* $P$ *eine bestimmte Kreislinie, deren Radius* $s$ *mit jenem Inhalte* $V$ *zugleich gröfser oder kleiner wird, deren Mittelpunct aber immer ein- und derselbe feste Punct, nämlich der Krümmungs-Schwerpunct* $S$ *der gegebenen Curve* 𝔙 *ist."* Und umgekehrt: *„Beschreibt man aus dem Krümmungs-Schwerpuncte* $S$ *der gegebenen Curve* 𝔙 *irgend einen Kreis, so entsprechen allen auf dieser Kreislinie liegenden Puncten* $P$ *Fufspuncten-Curven* $V$ *von gleichem Inhalte."*

*b) „Unter allen Fufspuncten-Curven* $V$ *einer gegebenen geschlossenen und überall convexen Curve* 𝔙 *hat diejenige den kleinsten Inhalt* $v$, *welche dem Krümmungs-Schwerpuncte* $S$ *der Curve* 𝔙 *entspricht."*

Um die Inhalts-Zunahme genauer angeben zu können, welche die einem Puncte $P$ entsprechende Fufspuncten-Curve $V$ erfährt, wenn er sich vom Krümmungs-Schwerpuncte $S$ entfernt, mufs die Gröfse $\frac{1}{2}s^2\Sigma(\sin 2A)$ oder das Vieleck $U$ näher bestimmt werden. Da dieses Vieleck $U$ nach dem Frühern (§. XVII.) einem Kreise eingeschrieben ist, der $s$ zum Radius hat, da es in demselben zwei Umläufe macht, und da die Centriwinkel $2A$, $2B$, $2C$, ...., welche seinen Seiten 𝔄, 𝔅, ℭ, .... gegenüberstehen, in dem gegenwärtigen Falle (für die Curve 𝔙) alle unendlich klein sind: so folgt, dafs in diesem Falle auch die Seiten 𝔄, 𝔅, ℭ, .... alle unendlich klein sind, und dafs daher der Umfang des Vielecks mit demjenigen des Kreises zusammenfällt, aber diesen zweimal umfafst. Somit besteht auch der Inhalt des Vielecks 𝔘 aus der zweifachen Kreisfläche, oder es ist:

45. $U = \frac{1}{2}s^2\Sigma(\sin 2A) = 2\pi s^2$ und $\Sigma(\sin 2A) = 4\pi$,

und daher hat man statt der Gleichungen (44 und 45) folgende:

46. $$4(2V - 𝔙) = \Sigma(a_1^2 \sin 2A) + 4\pi s^2.$$

47. $$V = v + \frac{1}{2}\pi s^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung (47) schliefst man folgende Sätze:

*c) „In Rücksicht der gegebenen geschlossenen und convexen Curve* 𝔙 *ist der Inhalt* $V$ *der Fufspuncten-Curve eines beliebigen Puncts* $P$ *immer so grofs, als der Inhalt* $v$ *der dem Krümmungs-Schwerpuncte* $S$ *entsprechenden Fufspuncten-Curve, mehr die halbe Kreisfläche, welche den Abstand* $PS = s$ *beider Puncte* $P$ *und* $S$ *von einander zum Radius hat."*

Kennt man also in Bezug auf die gegebene Curve 𝔅 den Inhalt $v$ der Fufspuncten-Curve, welche dem Krümmungs-Schwerpuncte $S$ entspricht, so kann sogleich der Inhalt $V$ der Fufspuncten-Curve jedes andern beliebigen Puncts $P$ gefunden werden, in so fern nur dessen Abstand $s$ vom Schwerpuncte $S$ bekannt ist. Und umgekehrt: kennt man in Bezug auf eine Curve 𝔅 und für irgend einen Punct $P$ die Gröfsen $V$ und $s$, so wird dadurch augenblicklich auch $v$, und somit dann auch der Inhalt der Fufspuncten-Curve für jeden anderen Punct gefunden, wofern sein Abstand von $S$ gegeben ist.

*d) „Kennt man in Rücksicht einer gegebenen Curve 𝔅 die Inhalte $V$, $V_1$, $V_2$ der Fufspuncten-Curven irgend dreier gegebener Puncte $P$, $P_1$, $P_2$, die nicht in einer Geraden liegen, so ist dadurch der Krümmungs-Schwerpunct $S$ der gegebenen Curve 𝔅, so wie der Inhalt $v$ seiner Fufspuncten-Curve, bestimmt, und leicht zu finden."*

Denn zu diesem Behufe hat man nach (§. XIX.) und vermöge (47) folgende drei Gleichungen

$$48. \quad \begin{cases} V - V_1 = \frac{1}{2}\pi(s^2 - s_1^2), \\ V - V_2 = \frac{1}{2}\pi(s^2 - s_2^2), \\ V_1 - V_2 = \frac{1}{2}\pi(s_1^2 - s_2^2), \end{cases}$$

wodurch drei Gerade $X^2$, $X_1$, $X$ bestimmt werden, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt der gesuchte Krümmungs-Schwerpunct $S$ ist.

## §. XXIV.

## Besondere Fälle.

Ist insbesondere die gegebene Curve ein Kreis oder eine Ellipse, so läfst sich in Folge der vorstehenden Sätze leicht der Inhalt $V$ der Fufspuncten-Curve jedes beliebigen Puncts $P$ angeben. Nämlich wie folgt.

### *A.* Wenn die gegebene Curve 𝔅 ein Kreis ist.

Es ist klar, und bereits oben erwähnt worden (§. XXII.), dafs der Krümmungs-Schwerpunct $S$ des Kreises mit seinem Mittelpuncte zusammen fällt. Daher fällt auch die Fufspuncten-Curve des Punctes $S$ mit dem Kreise selbst zusammen, und ihr Inhalt ist gleich der Kreisfläche. Wird also der Radius des gegebenen Kreises 𝔅 mit $r$ bezeichnet so hat man:

$$49. \quad v = \pi r^2$$

und weiter (47):

$$50. \quad V = \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi s^2$$

d. h. *„der Inhalt der Fufspuncten-Curve V irgend eines Punctes P, in Bezug auf den gegebenen Kreis* 𝔅, *ist gleich der Summe dieser Kreisfläche und der halben Kreisfläche* $\frac{1}{2}\pi s^2$, *welche den Abstand s des Puncts P vom Mittelpuncte S des gegebenen Kreises zum Radius hat."*

Ueber die Form und sonstigen Eigenschaften dieser Fufspuncten-Curve $V$ mag Folgendes angegeben werden; was leicht wahrzunehmen ist.

Die Curve $V$ berührt den Kreis 𝔅 in den beiden Endpuncten des durch $P$ gehenden Durchmessers, welchen sie zur Symmetralaxe hat, liegt sonst ganz aufserhalb 𝔅, ist auf einen endlichen Raum beschränkt und kehrt in sich zurück. Sie ist vom vierten Grade, und $P$ ist ein singulärer Punct derselben, nämlich $\alpha$) ein reeller oder $\beta$) ein imaginairer Doppelpunct, je nachdem beziehlich $P$ aufserhalb oder innerhalb des Kreises 𝔅 liegt, oder endlich $\gamma$) ein Rückkehrpunct, wenn $P$ auf der Kreislinie 𝔅 selbst liegt. Im Falle ($\alpha$) schneidet sich die Curve in $P$, und die beiden Tangenten die von $P$ aus an den Kreis 𝔅 gelegt werden können, sind die Normalen der Curve $V$ im Puncte $P$, so dafs sie den Winkel bestimmen, unter welchem die Curve sich in $P$ schneidet. Ist $s^2 = 2r^2$, so ist dieser Winkel ein rechter. Die Curve bildet ferner zwei Blätter oder Schleifen, von denen die eine die andere nebst dem Kreise 𝔅 umschliefst. Der Inhalt der Curve besteht aus demjenigen beider Schleifen, so dafs also der von der kleinern Schleife eingeschlossene Raum hiebei zweimal in Betracht kommt. Ist $s^2 = 2r^2$, so ist der Inhalt der Curve $= 2\pi r^2$.

In Rücksicht aller drei Fälle sind die verschiedenen Curven $V$, wie sich später zeigen wird (§. XXXVI.), identisch mit den verschiedenen Epicykloïden, welche entstehen, wenn ein Kreis vom Radius $\frac{1}{2}r$ auf einem ihm gleichen Kreise rollt. So ist namentlich im Falle ($\gamma$), wo $P$ in der Kreislinie liegt, oder wo $s = r$ ist, die Curve $V$ die sogenannte *Cardioïde* und ihr Inhalt ist:

$$51. \quad V = \tfrac{3}{2}\pi r^2 = 6\pi(\tfrac{1}{2}r)^2$$

d. h. *„anderthalb mal so grofs, als die gegebene Kreisfläche* 𝔅," oder sechsmal so grofs, als die Kreisfläche, deren Radius $= \frac{1}{2}r$ ist; was mit dem bekannten Ausdrucke für die Cardioïde übereinstimmt. Von den beiden mondförmigen Räumen, welche in diesem Falle zwischen den Umfängen von 𝔅 und $V$ liegen, ist jeder $= \frac{1}{4}\pi r^2$, d. i. ein Viertheil der Kreisfläche 𝔅. Eben so kommen im Falle ($\beta$) zwischen 𝔅 und $V$ zwei mondförmige Räume vor, von denen jeder $= \frac{1}{4}\pi s^2$ ist.

*B.* **Wenn die gegebene Curve $\mathfrak{B}$ eine Ellipse ist.**

Auch bei der Ellipse fällt offenbar der Krümmungs-Schwerpunct $S$ mit dem Mittelpuncte zusammen. Es seien also $a$ und $b$ die halben Axen der Ellipse, $s_1$ der Abstand ihres Brennpunctes $P_1$ vom Mittelpuncte $S$, und $V_1$ der Inhalt der Fufspuncten-Curve des einen oder des andern Brennpunctes $P_1$, welche bekanntlich ein Kreis ist, der die grofse Axe $=2a$ zum Durchmesser hat, so ist also:

$$52. \quad V_1 = \pi a^2;$$

und hieraus wird zunächst geschlossen (§. XXIII.):

*„Nimmt man in der Kreislinie, welche mit einer Ellipse $\mathfrak{B}$ concentrisch ist, und durch deren Brennpuncte geht, irgend einen Punct $P_1$ an, so ist der Inhalt seiner Fufspuncten-Curve $V_1$ in Bezug auf die Ellipse gleich derjenigen Kreisfläche, welche die grofse Axe $2a$ der Ellipse zum Durchmesser hat."*

Nun kann ferner der Inhalt jeder andern Fufspuncten-Curve für die Ellipse gefunden werden. Nämlich für die Fufspuncten-Curve $v$ des Mittelpuncts $S$, der um $s_1 = \sqrt{(a^2-b^2)}$ vom Brennpuncte $P_1$ absteht, hat man nach (§. XXIV. 47):

$$53. \quad v = V_1 - \tfrac{1}{2}\pi s_1^2 = \tfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2) = \pi g^2,$$

das heifst:

*„Der Inhalt der dem Mittelpuncte $S$ der Ellipse $\mathfrak{B}$ entsprechenden Fufspuncten-Curve $v$ ist halb so grofs, als die Summe der beiden Kreisflächen, welche die Axen $(2a, 2b)$ der Ellipse zu Durchmessern haben; oder er ist gleich derjenigen Kreisfläche, welche einen der beiden gleichen conjugirten Durchmesser $(2g)$ der Ellipse zum Durchmesser hat."*

Die Curve $v$ berührt die Ellipse $\mathfrak{B}$ in den vier Scheiteln der Axen; aufserdem liegt sie ganz aufserhalb derselben, so dafs zwischen beiden Curven vier mondförmige Räume entstehen, welche nothwendig einander gleich sind. Der Inhalt eines jeden sei $=m$, so hat man, da der Inhalt der Ellipse $=\pi . ab$ ist:

$$54. \quad 4m = \tfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2) - \pi ab = \tfrac{1}{2}\pi(a-b)^2 \text{ und } m = \tfrac{1}{8}\pi(a-b)^2$$

d. h. *„die Summe der vier Möndchen ist gleich der halben Kreisfläche, welche die Differenz beider Axen der Ellipse zum Durchmesser hat, und jedes einzelne derselben ist dem achten Theile dieser Kreisfläche gleich."*

Für den Inhalt $V$ der Fufspuncten-Curve jedes beliebigen Puncts $P$ in Bezug auf die Ellipse ergiebt sich nun aus (47 u. 53) der folgende Ausdruck:

$$55. \quad V = \tfrac{1}{2}\pi(a^2 + b^2 + s^2),$$

d. h.: „*Der Inhalt V der Fufspuncten-Curve eines beliebigen Punctes P in Bezug auf eine gegebene Ellipse* $\mathfrak{B}$ *ist gleich der halben Summe dreier Kreisflächen, welche die halben Axen der Ellipse und den Abstand s des Puncts P vom Mittelpuncte S der Ellipse zu Radien haben.*"

Diese allgemeine Fufspuncten-Curve $V$ der Ellipse $\mathfrak{B}$ hat analoge Form und Eigenschaften mit der Fufspuncten Curve des Kreises ($A$), so weit nämlich die Verschiedenheit der Ellipse und des Kreises eine solche Analogie verstatten. Z. B. die Curve $V$ ist auf einen endlichen Raum beschränkt und in sich zurückkehrend, und liegt aufserhalb der Ellipse. Sie berührt jedoch diese im Allgemeinen und höchstens in vier Puncten. Liegt der Punct $P$ aufserhalb der Ellipse $\mathfrak{B}$, so ist er ein reeller Doppel- oder Durchschnittspunct der Curve $V$; die aus ihm an die Ellipse $\mathfrak{B}$ gezogenen Tangenten sind zugleich in ihm die Normalen der Curve $V$ und bestimmen daher den Winkel, unter welchem sie sich schneidet. Der Inhalt der Curve $V$ besteht hiebei aus der Summe der Räume oder Blätter, welche die beiden von ihr gebildeten Schleifen umschliefsen. Soll insbesondere die Curve im Puncte $P$ sich unter einem rechten Winkel schneiden, so ist der Ort des Punctes $P$ derjenige Kreis, welcher zugleich der Ort des Scheitels eines rechten Winkels ist, dessen Schenkel die Ellipse berühren; also ein mit der Ellipse concentrischer Kreis, dessen Radius $s = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ ist. Daher ist in diesem Falle der Inhalt der Curve $V$ constant, nämlich (55):

$$56. \quad V = \pi s^2 = \pi(a^2 + b^2),$$

d. h. „*er ist gleich der Summe beider Kreisflächen, welche die Axen der Ellipse zu Durchmessern haben, oder gleich der Fläche des zugehörigen Ortskreises.*" Liegt ferner der Punct $P$ innerhalb der Ellipse $\mathfrak{B}$, so ist von der Curve $V$ nur noch eine Schleife vorhanden, welche die Ellipse $\mathfrak{B}$ umschliefst, so dafs zwischen beiden Curven (je nach der Anzahl ihrer Berührungspuncte: 4, 3 oder 2) mondförmige Räume entstehen, deren Summe $M$ jedesmal genau bestimmt ist. Nämlich es ist:

$$57. \quad M = \tfrac{1}{2}\pi(a - b)^2 + \tfrac{1}{2}\pi s^2,$$

worin auch das besondere obige Beispiel (54) als der Fall inbegriffen ist, wo $s = 0$ wird.

Die sämmtlichen Curven $V$, welche hier als Fufspuncten-Curven der Ellipse erscheinen, können auch auf ähnliche Art wie die Epicykloiden erzeugt werden, indem man eine Ellipse auf einer ihr gleichen rollen läfst; was sich unten zeigen wird (§. XXXVI).

Anmerkung. Beiläufig mag noch Folgendes bemerkt werden. Wird eine gegebene Ellipse $v$ als die Fufspuncten-Curve ihres Mittelpuncts $S$ in Bezug auf eine unbekannte Curve $\mathfrak{B}$ angesehen, so kann sofort der Inhalt $V$ der Fufspuncten-Curve jedes beliebigen Puncts $P$ in Bezug auf die unbekannte Basis $\mathfrak{B}$ angegeben werden. Nämlich: wenn $a$ und $b$ die halben Axen der Ellipse sind und $s$ der Abstand $PS$ ist, so hat man

$$58. \quad V = v + \tfrac{1}{2}\pi s^2 = \pi ab + \tfrac{1}{2}\pi s^2;$$

denn unter den vorausgesetzten Umständen ist offenbar $S$ auch der Mittelpunct der unbekannten Curve $\mathfrak{B}$. — Gleicherweise lassen sich andere Sätze aufstellen.

## §. XXV.

### Ausgedehntere Sätze.

Die über das Fufspuncten-Vieleck $V$ und über die Fufspuncten-Curve $V$ aufgestellten Sätze führen, wenn sie auf mehrere gegebene Figuren zugleich angewandt werden, zu zusammengesetzteren Sätzen.

Es seien z. B. in einer Ebene irgend eine Anzahl $n$ beliebiger und beliebig liegender Curven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \ldots \mathfrak{B}_n$ gegeben (alle jedoch geschlossen und überall convex §. XXIII.); ihre Krümmungs-Schwerpuncte seien $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$ und der Punct mittler Entfernung dieser $n$ Puncte heifse $S$. Ferner mögen $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ die Inhalte der Fufspuncten-Curven dieses Punctes $S$, so wie $V_1, V_2, \ldots V_n$ die Inhalte der Fufspuncten-Curven eines beliebigen, von $S$ um $s$ abstehenden Punctes $P$ in Bezug auf die gegebenen Curven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_n$ bezeichnen. Dann folgt aus dem Bisherigen (§. VII. u. §. XXIII. 47.) nachstehende Gleichung:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + n(\tfrac{1}{2}\pi s^2),$$

oder

$$60. \quad \Sigma(V_1) = \Sigma(v_1) + n\tfrac{1}{2}\pi s^2,$$

d. h. *a)* „*Sind in einer Ebene n beliebige und beliebig liegende, geschlossene und überall convexe Curven* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, .... $\mathfrak{B}_n$ *gegeben, so ist der Ort aller Puncte P, für welche die Summe der n Fufspuncten-Curven* $V_1$, $V_2$, .... $V_n$ *constant sein soll, jedesmal ein Kreis, dessen Radius s mit jener Summe zugleich wächst oder schwindet, dessen Mittelpunct aber immer ein- und derselbe feste Punct, nämlich der Schwerpunct S der (mit gleichen Coefficienten behafteten) Krümmungs-Schwerpuncte* $S_1$, $S_2$, .... $S_n$ *der gegebenen Curven* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, .... $\mathfrak{B}_n$ *ist.*" Und ferner:

*b)* „*Die diesem Schwerpuncte S entsprechende Summe* $\Sigma(v_1)$ *der Fufspuncten-Curven ist unter allen die kleinste, und wird von der irgend einem andern Puncte P zugehörigen Summe* $\Sigma(V_1)$ *um n mal die halbe Kreisfläche übertroffen, welche den Abstand s des Punctes P von S zum Radius hat.*"

Aehnlicher Weise hat man, wenn statt der Curven $n$ beliebige convexe Vielecke $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, .... $\mathfrak{B}_n$ gegeben sind:

61. $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$,

wo die Vielecke $U_1$, $U_2$, .... $U_n$, nach der Art wie oben (§. XVII.) das Vieleck $U$, alle demselben Kreise vom Radius $s$ eingeschrieben sind, so dafs:

62. $U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \frac{1}{2}s^2[\Sigma(\sin 2A_1) + \Sigma(\sin 2A_2) + \ldots + \Sigma(\sin 2A_n)]$.

Eben so finden analoge Formeln Statt, wenn die gegebenen Figuren $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, .... $\mathfrak{B}_n$ theils Vielecke, theils Curven sind.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

---

# 4.
# Anwendungen der Statik auf die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften.

(Vom Hrn. Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

---

Unter den Aufgaben der elementaren Statik ist die wichtigste unstreitig diejenige, welche die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften verlangt, die nach gegebenen Richtungen auf gegebene Puncte eines freibeweglichen festen Körpers wirken: zwischen Kräften also, deren Angriffspuncte in unveränderlichen Entfernungen von einander stehen. Diese Bedingung für die Angriffspuncte läfst sich auch dadurch ausdrücken, dafs sie eine sich immer gleich und ähnlich bleibende Figur bilden sollen; und man kann hierdurch veranlafst werden, nach den Bedingungen des Gleichgewichts zu fragen, wenn die Angriffspuncte nur dergestalt mit einander verbunden sind, dafs sie auch in jede andere der anfänglichen blofs ähnliche Figur gebracht werden können.

Die hierdurch sich bildende Aufgabe habe ich für den Fall, wenn die Puncte und die auf sie wirkenden Kräfte in einer Ebene enthalten sind, bereits in meinem „Lehrbuche der Statik" zu lösen gesucht. Ich dachte mir nämlich ein System von Geraden, welche sich unter unveränderlichen Winkeln in einem beweglichen Puncte treffen, mit einem andern Systeme von derselben Beschaffenheit dergestalt verbunden, dafs eine Gerade des einen Systems mit einer Geraden des anderen zusammenfiel und längs derselben verschiebbar war, und suchte nun die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche ich auf die gegenseitigen Durchschnitte der Geraden des einen und andern Systems wirken liefs; denn offenbar mufsten diese Puncte bei der angenommenen Beweglichkeit eine sich ähnlich bleibende Figur bilden.

Es giebt aber, wie ich in meinem „Barycentr. Calcul" gezeigt habe, aufser der Gleichheit und Aehnlichkeit und der blofsen Aehnlichkeit noch einige andere Verwandtschaften, in denen Figuren zu einander stehen können, und welche gleichfalls in das Gebiet der niedern Geometrie gehören; namentlich die blofse Gleichheit, die Affinität und die Verwandtschaft der Collineation.

Man kann daher auf analoge Weise die Bedingungen des Gleichgewichts zu erforschen suchen, wenn die Beweglichkeit der Angriffspuncte der Kräfte dadurch bestimmt wird dafs sie eine sich immer blofs gleich, oder affin, oder collinear verwandt bleibende Figur bilden sollen. Da je zwei einander gleiche und ähnliche Figuren auch in jeder entferntern Verwandtschaft zu einander stehen, so werden die bekannten Bedingungen des Gleichgewichts, welche bei Unveränderlichkeit der gegenseitigen Entfernungen der Angriffspuncte Statt finden, auch bei jeder entferntern Verwandtschaft, an welche die Beweglichkeit der Angriffspuncte gebunden wird, wiederkehren, zu ihnen aber neue, von der Natur der jedesmaligen Verwandtschaft abhängige, hinzutreten, und dieses in desto gröfserer Zahl, je entfernter die Verwandtschaft, und je gröfser folglich die Beweglichkeit der Puncte ist.

Die im Obigen gedachte Untersuchung in Betreff sich ähnlich bleibender ebener Figuren habe ich daher späterhin noch auf die Aehnlichkeit im Raume und auf die entfernteren Verwandtschaften ausgedehnt, und dieses vorzüglich mit aus dem Grunde, weil zu erwarten stand, auf diesem Wege zu einigen neuen Eigenschaften der Verwandtschaften selbst zu gelangen. Ich veröffentliche jetzt diese Untersuchungen in der Hoffnung, dafs es vielleicht auch Andern angenehm sein dürfte, die Gleichgewichtsbedingungen, welche bei den entferntern Verwandtschaften hinzutreten, und die etwaigen daraus gezogenen geometrischen Folgerungen kennen zu lernen. Uebrigens habe ich mich hier stets des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, als des einfachsten dabei anzuwendenden Mittels, bedient und mit Hülfe desselben die frühere Untersuchung sich ähnlich bleibender Figuren von Neuem angestellt.

## I. Bedingungen des Gleichgewichts bei sich ähnlich bleibenden Figuren.

1. In Bezug auf zwei rechtwinklige Coordinatensysteme in einer Ebene seien $x$, $y$ und $t$, $u$ die Coordinaten eines Punctes der Ebene. Man hat alsdann:

$$x = f + t\cos\alpha - u\sin\alpha,$$
$$y = g + t\sin\alpha + u\cos\alpha,$$

wo $f$ und $g$ die Coordinaten des Anfangspunctes des Systems der $t$ und $u$,

in Bezug auf das System der $x$ und $y$ sind, $\alpha$ aber der Winkel der Axe der $t$ mit der Axe der $x$ ist.

Setzen wir nun, dafs auf gleiche Weise noch mehrere andere Puncte der Ebene auf beide Coordinatensysteme bezogen seien, dafs diese Puncte gegen das System der Axen $t$ und $u$ eine unveränderliche Lage haben, dafs aber dieses Axensystem sammt den Puncten seiner Lage gegen das in der Ebene ruhig bleibende System der Axen $x$ und $y$ beliebig ändern könne: so sind in den obigen Gleichungen $t$ und $u$ constant, dagegen $f$, $g$, $\alpha$ beliebig veränderlich, und damit auch $x$ und $y$ veränderlich.

Wir wollen jetzt die Lage der Puncte gegen die Axen der $t$ und $u$ nicht mehr constant, jedoch nur dergestalt veränderlich annehmen, dafs die von ihnen mit den Axen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt. Zu dem Ende haben wir nur für $t$ und $u$ .... $\frac{t}{n}$ und $\frac{u}{n}$ zu schreiben, wo $n$, eben so wie $f$, $g$ und $\alpha$, von einem Puncte zum andern gleich grofs, aber mit der Zeit beliebig veränderlich ist. Hiermit werden die obigen Gleichungen, wenn wir noch $a$ und $b$ für $nf$ und $ng$ setzen:

$$1.\quad \begin{cases} nx = a + t\cos\alpha - u\sin\alpha, \\ ny = b + t\sin\alpha + u\cos\alpha. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen, in denen nur $t$ und $u$ constant sind, werden daher Puncte $(x, y)$ in der Ebene bestimmt, die ihre Lage dergestalt auf jede Weise ändern können, dafs die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt.

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt:

$$2.\quad \begin{cases} ndx + xdn = da - (ny - b)d\alpha, \\ ndy + ydn = db + (nx - a)d\alpha. \end{cases}$$

Wirkt nun auf jeden Punct $(x, y)$ des Systems eine Kraft $(X, Y)$, d. h. eine Kraft, welche, nach den Axen der $x$, $y$ zerlegt, die Kräfte $X$ und $Y$ giebt, so hat man nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als Bedingung des Gleichgewichts zwischen allen diesen Kräften die Gleichung $\Sigma(Xdx + Ydy) = 0$, und wenn man darin für $dx$ und $dy$ ihre Werthe aus (2) substituirt:

$$(da + bd\alpha)\Sigma X + (db - ad\alpha)\Sigma Y + nd\alpha\Sigma(Yx - Xy) \\ - dn\Sigma(Xx + Yy) = 0.$$

Da aber die Differentiale $da$, $db$, $d\alpha$ und $dn$ von einander ganz unab-

hängig sind so zerfällt diese Gleichung in folgende vier einzelne:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) \quad 0, \quad \Sigma(Xx + Yy) = 0.$$

Die drei ersten derselben sind die bekannten Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die gegenseitige Lage der Angriffspuncte der Kräfte unveränderlich ist. Die vierte konnte wegen der gemachten Voraussetzung hinzu dafs die gegenseitige Lage der Puncte zwar veränderlich sein soll, jedoch nur so, dafs die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt.

2. Zusatz. nach dem §. 122 meines Lehrbuchs der Statik ergehen sich diese vier Gleichchungen als Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf Puncte in einer Ebene wirken, auch in dem Falle, wenn die gegenseitige Lage der Puncte unveränderlich ist und wenn das Gleichgewicht nicht blofs bei einer bestimmten Lage des Systems der Puncte in der Ebene Statt findet, sondern auch noch bei jeder beliebigen Drehung in der Ebene, während die Kräfte mit parallel bleibenden Richtungen und unveränderten Intensitäten auf dieselben Puncte zu wirken fortfahren, noch besteht. Hiernach kann man folgende zwei Sätze (ebend. §§. 235. u. 236.) aufstellen:

*„Sind mehrere Puncte in einer Ebene dergestalt beweglich, dafs die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt, und halten sich Kräfte, welche auf sie in der Ebene wirken, das Gleichgewicht, so herrscht auch noch Gleichgewicht bei jeder andern Lage, welche man den Puncten zufolge ihrer Beweglichkeit geben kann, wenn nur die Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben;"* und umgekehrt:

*„Sind Kräfte, welche auf fest mit einander verbundene Puncte in einer Ebene wirken, im Gleichgewichte, und dauert dasselbe noch fort, wenn das System der Puncte in seiner Ebene beliebig verschoben wird, die Kräfte aber parallel mit ihren anfänglichen Richtungen fortwirken, so wird das Gleichgewicht auch nicht unterbrochen, wenn man den Puncten eine solche gegenseitige Beweglichkeit noch beilegt, bei welcher die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt."*

3. Um von dieser Theorie eine Anwendung auf die einfachsten Fälle zu machen, wollen wir zuerst setzen, das System bestehe nur aus zwei Puncten $(x, y)$ und $(x_1, y_1)$, auf welche resp. die Kräfte $(X, Y)$ und $(X_1, Y_1)$ wirken. Die vier Bedingungen des Gleichgewichts sind alsdann:

$$X + X_1 = 0, \quad Y = Y_1 = 0, \quad Yx - Xy + Y_1 x_1 - X_1 y_1 = 0$$
$$Xx + Yy + X_1 x_1 + Y_1 y_1 = 0.$$

Die Elimination von $X_1$ und $Y_1$ aus diesen Gleichungen giebt:

$$Y(x-x_1)-X(y-y_1)=0, \quad X(x-x_1)+Y(y-y_1)=0,$$

und wenn wir hieraus noch $X$ und $Y$ wegschaffen:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=0,$$

folglich $x_1=x$ und $y_1=y$; d. h. die beiden Angriffspuncte müssen zusammenfallen. Auch folgt dieses schon aus der Natur der Sache selbst. Denn ein System von zwei nicht zusammenfallenden Puncten bleibt bei jeder Aenderung ihrer gegenseitigen Lage sich ähnlich. Zwei Kräfte aber, angebracht an zwei Puncten, deren gegenseitige Lage beliebig veränderlich ist, können nicht im Gleichgewichte sein.

Anders verhält es sich, wenn zu den zwei Puncten ein dritter $(x_2, y_2)$, getrieben von der Kraft $(X_2, Y_2)$, hinzukommt. Die vier Gleichgewichtsbedingungen sind in diesem Falle:

$$(A.) \quad \begin{cases} X+X_1+X_2=0, \quad Y+Y_1+Y_2=0, \\ Yx-Xy+Y_1x_1-X_1y_1+Y_2x_2-X_2y_2=0, \\ Xx+Yy+X_1x_1+Y_1y_1+X_2x_2+Y_2y_2=0. \end{cases}$$

Man multiplicire von diesen Gleichungen die erste, zweite und vierte resp. mit $-f$, $-g$ und 1, addire sie hierauf und setze zur Bestimmung von $f$ und $g$:

$$(a.) \quad X(x-f)+Y(y-g)=0, \quad X_1(x_1-f)+Y_1(y_1-g)=0,$$

so ist auch

$$(b.) \quad X_2(x_2-f)+Y_2(y_2-g)=0.$$

Betrachtet man nun $f$, $g$ als die Coordinaten eines Punctes und bezeichnet die Puncte $(x, y)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(f, g)$ mit $A$, $A_1$, $A_2$, $F$ und die drei Kräfte $(X, Y)$ etc. mit $P$, $P_1$, $P_2$, so sind nach $(a.)$ die Linien $FA$ und $FA_1$ resp. auf $P$ und $P_1$ rechtwinklig, d. h. $F$ ist der Durchschnitt der auf $P$ und $P_1$ in $A$ und $A_1$ errichteten Perpendikel. Den so bestimmten Punct $F$ mufs aber nach $(b.)$ auch das auf $P_2$ in $A_2$ errichtete Perpendikel treffen, und die Bedingung wegen der dauernden Aehnlichkeit besteht hiernach darin, dafs sich die drei auf den Kräften in ihren Angriffspuncten errichteten Perpendikel in einem Puncte $F$ schneiden.

Noch anders kann diese Bedingung ausgedrückt werden, wenn man sich erinnert, dafs die Richtungen dreier sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte sich in einem Puncte begegnen (eine Eigenschaft, welche auch unmittelbar aus den drei ersten der obigen vier Gleichungen $(A.)$ hergeleitet werden kann). Ist nun $K$ dieser gemeinschaftliche Punct der

Richtungen von $P$, $P_1$, $P_2$, $+$ sind dem Vorigen zufolge $FAK$, $FA_1K$, $FA_2K$ rechte Winkel, und $K$ liegt folglich mit $A$, $A_1$, $A_2$ in einem Kreise.

„Sollen demnach in einer Ebene drei Kräfte an drei Puncten, welche ein sich ähnlich bleibendes Dreieck zu bilden genöthigt sind, im Gleichgewichte sein, so muſs, nächst den Bedingungen des Gleichgewichts für den Fall, wenn die Puncte in unabänderlicher Entfernung von einander sind, auch noch die erfüllt werden, daſs die drei Puncte mit demjenigen, in welchem sich die Richtungen der drei Kräfte schneiden, in einem Kreise liegen."

Eine leichte Folgerung hieraus ist, daſs die Winkel, welche die Kräfte mit einander bilden, den Supplementen der Winkel des Dreiecks $AA_1A_2$ gleich sind, nämlich der Winkel der Kräfte an $A_1$ und $A_2$, $=$ $180° - A_1AA_2$, etc. und daſs deshalb, und weil beim Gleichgewichte zwischen drei Kräften jede Kraft dem Sinus des von den beiden andern Kräften gebildeten Winkels proportional ist, die Kräfte sich wie die ihren Angriffspuncten $A$, $A_1$, $A_2$ gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks $AA_1A_2$ verhalten.

Man bemerke hierbei noch, wie von dem Umstande, daſs der gegenseitige Durchschnitt der drei Kräfte mit ihren Angriffspuncten in einem Kreise liegt, die Fortdauer des Gleichgewichts bei der Drehung des Dreiecks $AA_1A_2$ in seiner Ebene eine unmittelbare Folge ist. Ob nämlich das Dreieck gedreht wird, während jede Kraft ihrer anfänglichen Richtung parallel bleibt, oder ob das Dreieck in Ruhe bleibt und jede Kraft um einen gleich groſsen Winkel um ihren Angriffspunct gedreht wird, kommt hier, wo es sich nur um die gegenseitige Lage handelt, offenbar auf dasselbe hinaus. Wenn aber drei von $A$, $A_1$, $A_2$ ausgehende Geraden um diese Puncte um gleich groſse Winkel gedreht werden, so rücken ihre Durchschnitte mit dem durch $A$, $A_1$, $A_2$ zu beschreibenden Kreise um gleich groſse Bogen fort. Wenn folglich diese drei Geraden sich anfangs in einem Puncte $K$ des Kreises schnitten, so wird dieses auch nach der Drehung noch der Fall sein; folglich u. s. w.

4. Die im Vorigen für eine Ebene angestellten Untersuchungen wollen wir jetzt auf den Raum ausdehnen. Seien daher bei einem System von Puncten im Raume die Coordinaten eines derselben in Bezug auf zwei rechtwinklige Axensysteme $x$, $y$, $z$ und $t$, $u$, $v$, so kann man setzen:

$$x = f + \alpha t + \alpha' u + \alpha'' v,$$
$$y = g + \beta t + \beta' u + \beta'' v,$$
$$z = h + \gamma t + \gamma' u + \gamma'' v,$$

wo $\alpha = \cos x' t$, $\alpha' = \cos x u$, etc. und $f, g, h$, die Coordinaten des Anfangspunctes des Systems der $t, u, v$ in Bezug auf das System der $x, y, z$ sind.

Hieraus läfst sich, wie im Obigen weiter folgern, dafs, wenn man,

1. $nx = a + \alpha t + \alpha' u + \alpha'' v, \quad ny = b + \beta t + \quad nz = \quad +$

setzt und dabei $t, u, v$ constant, $n, a, b, c$ aber und $\alpha, \beta', \gamma''$, wovon übrigen $\alpha', \alpha'', \beta$, etc. auf bekannte Weise abhängen veränderlich annimmt: dafs dann das System der Puncte, zu welchen $(x, y, z)$ gehört, bei beliebiger Aenderung von $n, a, b, c, \alpha, \beta'', \gamma''$ seine Lage sowohl als Gröfse beliebig ändert, sich dabei aber stets ähnlich bleibt.

Ist nun $(X, Y, Z)$ die auf den Punct $(x, y, z)$ wirkende Kraft, und soll zwischen ihr und den an den übrigen Puncten des Systems angebrachten Kräften Gleichgewicht herrschen, so mufs bei allen Verrückungen, deren das System fähig ist,

$$\Sigma(X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

sein. Es findet sich aber, wenn man hierin für $dx, dy, dz$ ihre aus der Differentiation von (1) fliefsenden Werthe setzt:

$$2. \quad \Sigma(Xx + Yy + Zz)\,dn - \Sigma X(da + t\,d\alpha + u\,d\alpha' + \ldots)$$
$$- \Sigma Y(db + t\,d\beta + \ldots) - \Sigma Z(dc + \ldots) = 0.$$

Da das Differential $dn$ von den übrigen hierin vorkommenden Differentialen unabhängig ist, so ergiebt sich, als erste Bedingung des Gleichgewichts,

$$\Sigma(Xx + Yy + Zz) = 0.$$

Um die übrigen Bedingungsgleichungen zu erhalten, hat man in dem übrigen Theile der Gleichung (2) die Coordinaten $t, u, v$ mittelst (1) durch $x, y, z$ auszudrücken und dann noch die 9 Differentiale $da, d\alpha, \ldots d\gamma''$ auf drei von einander unabhängige zu reduciren. Ohne aber diese etwas weitläufige Rechnung anzustellen, sieht man schon im Voraus, dafs die auf solche Weise zu erhaltenden Bedingungsgleichungen keine andern als die bekannten sechs sein können, welche Statt finden müssen, wenn die gegenseitige Lage der Angriffspuncte unveränderlich ist. Denn da der übrige Theil der Gleichung (2) von $n$ unabhängig ist, so müssen die aus ihm zu folgernden Gleichungen einerlei sein mit denen, welche man erhält, wenn man $n$ constant setzt. Ist aber $n$ constant, so bleibt sich das System der Puncte $(x, y, z)$ nicht blofs ähnlich, sondern auch gleich; folglich u. s. w.

Der Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht an einem sich ähnlich bleibenden Systeme von Puncten im Raume giebt es demnach in Allem sieben: nämlich die bekannten sechs

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(Yz - Zy) = 0, \quad \Sigma(Zx - Xz) = 0, \quad \Sigma(Xy - Yx) = 0,$$

und die vorhin zuerst gefundene:

$$\Sigma(Xx + Yy + Zz) = 0.$$

5. **Zusätze.** *a)* Bezeichnet $A$ den Punct $(x, y, z)$ des Systems, $P$ die auf ihn wirkende Kraft $(X, Y, Z)$, und $O$ den Anfangspunct der Coordinaten, so ist der summatorische Ausdruck

$$\Sigma(Xx + Yy + Zz) = \Sigma OA.P \cos OA^{\wedge}P;$$

er ist folglich unabhängig von dem durch $O$ gelegten Systeme der Coordinatenaxen. was auch für Kräfte $P$ auf die Puncte $A$ wirken mögen. Gegenwärtig aber, wo zugleich $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$ sein soll, ist jener Ausdruck auch von dem Anfangspuncte der Coordinaten unabhängig. Denn für einen neuen Anfangspunct, dessen Coordinaten in Bezug auf den alten, $= a, b, c$ sind, wird der Ausdruck

$$= \Sigma(X(x-a) + Y(y-b) + Z(z-c)):$$

und dieser ist von dem vorigen $\Sigma(Xx + \ldots.)$ um $a\Sigma X + b\Sigma y + c\Sigma Z$, das heifst um nichts verschieden.

Die specielle Bedingung, unter welcher Kräfte an einem Systeme von Puncten, welches sich immer ähnlich bleiben soll, im Gleichgewichte sind, kann hiernach folgendergestalt ausgedrückt werden:

„Wählt man beliebig einen Punct $(O)$ und multiplicirt jede Kraft $(P)$ in den Abstand $OP \cos OA\,P$ ihres Angriffspunctes $(A)$ von einer durch den erstern Punct $(O)$ perpendiculär auf die Richtung der Kraft gelegten Ebene, so mufs die Summe dieser Producte Null sein."

*b)* Sind sämmtliche Kräfte mit einander parallel, und nimmt man mit ihnen die Axe der $z$ parallel an, so werden $X$ und $Y$ Null, und die obigen 7 Bedingungsgleichungen reduciren sich auf folgende vier:

$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma Zx = 0, \quad \Sigma Zy = 0, \quad \Sigma Zz = 0;$$

d. h. der Angriffspunct jeder Kraft ist der Mittelpunct der jedesmal übrigen.

Denn sind aufser $Z$ die übrigen Kräfte $Z_1$, $Z_2$, .... und $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, etc. ihre Angriffspuncte, so kann man statt der letzten vier Gleichungen auch schreiben:

$$Z + \Sigma Z_1 = 0, \quad Zx + \Sigma Z_1 x_1 = 0, \quad Zy + \Sigma Z_1 y_1 = 0,$$
$$Zz + \Sigma Z_1 z_1 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{\Sigma Z_1 x_1}{\Sigma Z_1}, \quad y = \frac{\Sigma Z_1 y_1}{\Sigma Z_1} \quad z = \frac{\Sigma Z_1 z_1}{\Sigma Z}$$

Die so bestimmten Werthe von $x$, $y$, $z$, sind aber die Coordinaten des Mittelpuncts der Kräfte $Z_1$, $Z_2$, ....

*c)* Liegen daher die Angriffspuncte aller parallelen Kräfte, bis auf einen, in einer Ebene, so mufs auch der letztere in dieser Ebene enthalten sein, wenn das System unter der Bedingung bleibender Aehnlichkeit im Gleichgewichte verharren soll. Denn der Mittelpunct eines Systems paralleler Kräfte, deren Angriffspuncte in einer Ebene liegen, ist gleichfalls in dieser Ebene begriffen.

Uebrigens sieht man von selbst, wie die jetzt gemachten Schlüsse mit gehöriger Modification auf den früher behandelten Fall anwendbar sind, wo die Puncte und die auf sie wirkenden Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten waren.

6. Eine besondere Betrachtung wollen wir noch dem einfachen Falle widmen, wenn das System aus vier Kräften $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ besteht, welche auf vier nicht in einer Ebene liegende Puncte $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ wirken. Durch einen beliebigen fünften Punct $O$ lege man vier Ebenen perpendicular auf die Richtungen von $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ und nenne $D$, $D_1$, $D_2$, $D_3$ die Durchschnitte dieser Ebenen mit den Richtungen von $P$, $P_1$, .... Alsdann ist nach No. 5. *a.* die specielle Bedingung des Gleichgewichts, welche bei der Annahme dauernder Aehnlichkeit des Systems der Angriffspuncte erfüllt werden mufs:

$$DA.P + D_1A_1.P_1 + D_2A_2.P_2 + D_3A_3.P_3 = 0.$$

Man wähle nun zum Puncte $O$ denjenigen, in welchem sich drei auf $P$, $P_1$, $P_2$ resp. in $A$, $A_1$, $A_2$ perpendiculär gelegte Ebenen schneiden, so sind $DA$, $D_1A_1$, $D_2A_2$ einzeln Null. Zufolge der Bedingungsgleichung mufs daher bei dem also bestimmten $O$ auch $D_3A_3 = 0$ sein, d. h. die durch $O$ perpendicular auf $P_3$ gesetzte Ebene mufs $P_3$ in $A_3$ treffen, und wir schliefsen hieraus:

„Sind vier Puncte im Raume dergestalt beweglich, dafs die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt, und sollen vier auf sie wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so mufs aufser den zum Gleichgewichte nöthigen Erfordernissen, wenn die Puncte fest mit einander verbunden sind, auch noch die Bedingung erfüllt werden, dafs die vier

Ebenen, welche durch die vier Puncte, jede perpendicular auf der Richtung der den Punct treibenden Kraft gelegt werden, sich in einem Puncte ($O$) schneiden."

Zum Gleichgewichte zwischen vier Kräften, deren Angriffspuncte fest mit einander verbunden sind, ist unter anderen erforderlich, dafs jede Gerade, welche die Richtungen dreier der vier Kräfte schneidet, auch der Richtung der vierten begegnet (Lehrb. der St. §. 99. *a.*). Wenn daher drei Richtungen, welche nicht in einer Ebene enthalten sind, sich in einem Puncte $K$ schneiden, so mufs auch die vierte Richtung den Punct $K$ treffen. Bei dieser speciellen Lage der Richtungen läfst sich die besondere Bedingung des Gleichgewichts, wegen der Aehnlichkeit, auf analoge Weise als wie oben beim Gleichgewichte zwischen drei Kräften, ausdrücken. Es müssen nämlich die vier Winkel $OAK$, $OA_1K$, $OA_2K$, $OA_3K$ rechte Winkel sein, d. h. „es mufs der gemeinschaftliche Durchschnitt der vier Richtungen in der durch die vier Angriffspuncte zu beschreibenden Kugelfläche liegen."

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

---

# 5.

# Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen.

(Vom Herrn Prof. E. E. Kummer, Dr. phil. zu Liegnitz.)

---

Die Reihen der reciproken Potenzzahlen von der Form $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\dots$ können, wie bekannt, wenn der Potenz-Exponent $n$ eine gerade Zahl ist, durch die Potenzen der Zahl $\pi$ summirt werden. Für ungerade Potenz-Exponenten aber hat man bis jetzt vergeblich versucht, dieselben durch bekannte Gröfsen auszudrücken. Es war mir nicht unwahrscheinlich, dafs sich auch diese Reihen durch die Zahl $\pi$ und durch Logarithmen würden summiren lassen. Ich unternahm deshalb, zunächst nur auf den angegebenen besonderen Zweck ausgehend, eine Untersuchung der Reihe $\frac{x}{1^3}+\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{3^3}+\dots$ Da diese Reihe durch das dreifache Integral $\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-x}$ ausgedrückt wird, und da die Methoden, welche ich zur Untersuchung desselben anwendete, auch für bei weitem allgemeinere vielfache Integrale ausreichten, so stellte ich den besonderen Zweck alsbald bei Seite, und ging an die allgemeine Untersuchung der Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen. Die erste Integration einer rationalen Formel $\int P dx$ läfst sich bekanntlich immer vermittelst Logarithmen und Kreisbogen ausführen. Multiplicirt man aber ein solches Integral wieder mit einer rationalen Function $Q$ und integrirt zum zweitenmale, so erhält man die Form $\int Q\int P dx.dx$. Die in dieser allgemeinen Form enthaltenen Transcendenten nenne ich logarithmische Integrale zweiter Ordnung. Wird die allgemeine Form dieser Integrale wieder mit einer rationalen Formel $R$ multiplicirt und integrirt, so erhält man $\int R\int Q\int P dx.dx.dx$, und ich nenne die in dieser allgemeinen Form enthaltenen Transcendenten logarithmische Integrale dritter Ordnung. Multiplicirt man immer wieder mit einer rationalen Formel und integrirt, so erhält man eben so die allgemeinen Formen der logarithmischen Integrale vierter, fünfter u. s. w. Ordnung. Die logarith-

mischen Integrale erster Ordnung, welche nur Logarithmen und Kreisbogen sind, werden, als bekannt, übergangen. Ueber die logarithmischen Integrale zweiter Ordnung finden sich in *Legendre Exercices de Calcul intégral* nur einzelne Resultate, und erst in neuerer Zeit hat *Hill* dieselben zu einem besonderen Gegenstande von Untersuchungen gemacht. Dieser scharfsinnige Analytiker, angereizt durch die glänzenden Erfolge, welche die Theorie der elliptischen Functionen, oder allgemeiner die Theorie der in der Form $\int P\sqrt{Q}\,dx$ enthaltenen Transcendenten gehabt hat, hat eine ähnliche Untersuchung der durch die allgemeinen Formen $\int P \log Q\,d.x$ und $\int P.\operatorname{Arc\,tang} Q.dx$ ausgedrückten Transcendenten angestellt und hierüber zwei Abhandlungen herausgegeben. Die erste derselben ist in dem gegenw. *Journale der Mathematik Bd. III.* abgedruckt, die zweite aber, unter dem Titel *Specimen exercitii analytici functionem integralem* $\int \frac{dx}{x} \log(1+2x\cos a+x^2)$ *tum quoad amplitudinem tum quoad modulum comparandi modum exhibentis, Londini Gothorum 1830,* scheint, als akademische Gelegenheitsschrift, nur wenig bekannt zu sein. Eine neue Behandlung dieser logarithmischen Integrale zweiter Ordnung wird den ersten Theil der gegenwärtigen Abhandlung ausmachen. Obgleich nämlich *Hill* in seiner zweiten Abhandlung die eine dieser Transcendenten so vollständig behandelt hat, dafs wir, auf die wesentlichsten Eigenschaften derselben uns beschränkend, für dieselbe nur wenig neues hinzufügen können, so erschien uns dennoch auch diese einer neuen Behandlung werth, weil die von *Hill* gefundenen Resultate sich alle noch aufserordentlich vereinfachen lassen, und weil nach der Methode, welche wir zum Grunde legen, die Resultate, die bei *Hill* vereinzelt dastehen und fast alle nicht sowohl entwickelt, als vielmehr nur aufgestellt und mit besonderen Beweisen versehen werden, aus einer gemeinschaftlichen Quelle abgeleitet werden können. Aufserdem wird eine neue Behandlung dieser Transcendenten durch die Wichtigkeit des Gegenstandes gerechtfertigt. Denn wenn wir gleich nicht so weit gehen wie *Hill*, welcher diese Theorie für wichtiger und nützlicher hält als die Theorie der elliptischen Functionen, so glauben wir doch, dafs aus derselben der Analysis eine schöne Bereicherung erwachse. Der zweite Theil der gegenwärtigen Abhandlung wird die Theorie der logarithmischen Integrale dritter Ordnung enthalten. Für diese ist bisher noch fast gar nichts gethan worden, so dafs, mit Ausnahme geringer Einzelheiten, alles was wir

über dieselben sagen werden, für neu zu erachten ist. Für die logarithmischen Integrale höherer Ordnungen lassen wir die Allgemeinheit der Untersuchung fallen, da eine nur einigermafsen vollständige Theorie derselben uns zu weit führen würde, und da auch die Formeln, welche die Eigenschaften dieser logarithmischen Integrale ausdrücken, für jede höhere Ordnung bedeutend weitläuftiger werden. Deshalb beschränken wir uns hier darauf, für die logarithmischen Integrale vierter und fünfter Ordnung nur die Grundeigenschaften der einfachsten in ihnen enthaltenen Transcendenten zu entwickeln, die mit der Reihe $\frac{x}{1^n}+\frac{x^2}{2^n}+\frac{x^3}{3^n}+\ldots$ in einem solchen Zusammenhange stehen, dafs die gefundenen Eigenschaften derselben sich auch als Eigenschaften dieser merkwürdigen Reihe darstellen lassen.

## Erster Theil.

## Ueber die logarithmischen Integrale zweiter Ordnung.

### §. 1.

Logarithmische Integrale zweiter Ordnung sind nach unserer Erklärung die in der allgemeinen Form $\int Q\int P.dx.dx$, wo $P$ und $Q$ rationale Functionen von $x$ sind, enthaltenen Transcendenten; mit Ausschlufs der Logarithmen und Kreisbogen. Darum haben wir zunächst diese allgemeine Form in ihre einfachsten Bestandtheile zu zerlegen und so die einfachsten Formen der logarithmischen Integrale zweiter Ordnung zu suchen. Es kann zunächst angenommen werden, dafs $P$ und $Q$ rationale gebrochene Functionen von $x$ sind, von der Art, dafs sie keine ganzen Theile enthalten, oder, was dasselbe ist, dafs in den Nennern derselben höhere Potenzen von $x$ vorkommen als in den Zählern; denn ist dies nicht der Fall, so kann man die ganzen Theile davon absondern und $q+Q$ statt $Q$ und $p+P$ statt $P$ nehmen, wo $q$ und $p$ ganze rationale Functionen von $x$ sind; dadurch zerfällt dann das obige Integral in folgende vier:

$$\int q\int p dx.dx,\quad \int q\int P dx.dx,\quad \int Q\int p dx.dx,\quad \int Q\int P dx.dx$$

Da nun das Integral einer ganzen rationalen Function von $x$ wieder eine solche Function ist, so ist klar, dafs das erste Integral nur eine ganze

Function giebt, und dafs das zweite und dritte nur Logarithmen und Kreisbogen enthalten. Es bleibt daher nur das vierte Integral übrig, in welchem $P$ und $Q$ keine ganzen Theile mehr enthalten. Werden nun $P$ und $Q$ in Partialbrüche von der Form $\frac{a}{(b+cx)^m}$ zerlegt, wo $a$, $b$, $c$ auch imaginär sein können und $m$ eine ganze positive Zahl ist, so zerfällt das allgemeine Integral von selbst in eine Summe mehrerer einzelner Integrale von der Form

$$\int\frac{a.dx}{(b+cx)^m}\int\frac{e\,dx}{(f+gx)^n}.$$

Dieses Integral kann aber, wenn $m$ und $n$ nicht beide zugleich der Einheit gleich sind, immer rational oder durch Logarithmen und Kreisbogen integrirt werden, so dafs wieder nur der Fall $m=1$ und $n=1$ zu betrachten übrig bleibt. Für diesen Fall aber erhält man durch Ausführung der ersten Integration folgende Form:

$$\int\frac{l(f+gx)dx}{b+cx}.$$

Setzt man jetzt, um zu vereinfachen,

$$f+gx=kz, \qquad k=\frac{bg-fc}{c},$$

so wird $b+c.x=\frac{ck(1+z)}{g}$, und das Integral geht in folgende zwei über:

$$\frac{a}{c}\int\frac{lz\,dz}{1+z}+\frac{al(k)}{c}\int\frac{dz}{1+z}.$$

Da das zweite dieser Integrale nur einen Logarithmus giebt, so ist das Integral $\int\frac{lz.dz}{1+z}$ im Grunde das einzige in der obigen allgemeinen Form enthaltene. Da aber $z$ auch imaginär sein kann, so zerfällt dasselbe, wie wir alsbald zeigen werden, durch die Sonderung des realen und imaginären Theiles, in zwei verschiedene. Es ist zweckmäfsig, für dieses Integral ein besonderes Functionszeichen einzuführen, welches demselben namentlich dann zukommt, wenn $z$ real ist; wo dann der Buchstabe $x$ dafür gesetzt werden soll. Da ferner $lx$ nur für positive Werthe des $x$ real sein würde, so wollen wir dafür $l(\pm x)$ setzen, unter der Bedingung, dafs $+x$ immer positiv zu nehmen sei; denn die Bedingung, dafs $x$ nur positiv sein darf, würde den bald zu entwickelnden Formeln eine störende Beschränkung

auferlegen *). Als Functionszeichen für dieses Integral wähle ich den Buchstaben $\Lambda$, und nehme das Integral so, dafs es zugleich mit $x$ verschwindet, also so, dafs

$$\Lambda(x) = \int_0^x \frac{l(\pm x)\,dx}{1+x}.$$

Wenn aber $x$ imaginär ist, so nehme ich $x = x e^{\alpha i}$, wo $x$ und $\alpha$ real sind und $i = \sqrt{-1}$ ist. Hierdurch wird dieses Integral

$$\int \frac{(l(\pm x) + \alpha i)\, e^{\alpha i}\, dx}{1 + x e^{\alpha i}},$$

oder, durch Trennung der realen und imaginären Theile,

$$\int \frac{(x+\cos\alpha)\, l(\pm x) - \alpha \sin\alpha}{1+2x\cos\alpha + x^2} + i\int \frac{\sin\alpha\, l(\pm x) + \alpha(x+\cos\alpha)}{1+2x\cos\alpha+x^2}\, dx.$$

Sondert man hiervon wieder diejenigen Theile ab, welche durch Logarithmen und Kreisbogen sich integriren lassen, so bleiben nur die beiden Integrale

$$\int \frac{l(\pm x)\,(x+\cos\alpha)\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} \quad \text{und} \quad \int \frac{l(\pm x).\sin\alpha.\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}$$

als die einzigen realen Integrale übrig, welche in der oben aufgestellten allgemeinen Form enthalten sind; denn das Integral $\Lambda(x)$ ist nur ein specieller Fall des ersteren von diesen, welchen man erhält, wenn man $\alpha = 0$ nimmt. Wir nehmen auch diese Integrale so, dafs sie zugleich mit $x$ verschwinden und bezeichnen dieselben, als Functionen zweier veränderlichen Gröfsen, durch $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$, so dafs

$$D(x, \alpha) = \int_0^x \frac{l(\pm x)(x+\cos\alpha)\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2},$$

$$E(x, \alpha) = \int_0^x \frac{l(\pm x).\sin\alpha.\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}.$$

Die imaginäre Function $\Lambda(xe^{\alpha i})$ wird nun durch die Functionen $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$ auf folgende Art ausgedrückt:

$$\Lambda(xe^{\alpha i}) = D(x,\alpha) - \alpha \operatorname{Arc tang} \frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha} + iE(x,\alpha) + \frac{i\alpha}{2} l(1+2x\cos\alpha+x^2).$$

Es hat jetzt durchaus keine Schwierigkeiten, irgend ein gegebenes Integral von der Form $\int P \int Q\,dx\,dx$, unter welche Form auch die von *Hill* ge-

*) Ueberall wo Logarithmen aus der Integration rationaler Formeln entstehen, wie es hier durchgehends der Fall ist, kann man unter dem Logarithmenzeichen mit gleichem Rechte beide Vorzeichen + und — gelten lassen, und diese sind dann, wo es sich um reale Gröfsen handelt, so zu bestimmen, dafs die Quantität, deren Logarithmus zu nehmen ist, immer positiv sei. Deshalb ersuchen wir den Leser, zu den sämmtlichen Logarithmenzeichen, welche in dieser Abhandlung vorkommen werden, sich immer das Zeichen ± hinzuzudenken und es so zu bestimmen, dafs dadurch die Gröfse, vor welcher es steht, positiv werde.

wählten Formen $\int P \log Q\,dx$ und $\int P \operatorname{Arctang} Q\,dx$ gehören, durch rationale Functionen, durch Logarithmen und durch die beiden Functionen $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$ zu integriren. Zu diesem Zwecke darf man nur, wie wir es gezeigt haben, durch Zerlegung in Partialbrüche das Integral in Theile zerlegen, welche sich rational oder nur durch Logarithmen und durch die Function $\Lambda$ integriren lassen. Die Functionen $\Lambda$, welche unmögliche Gröfsen enthalten, zerlegt man alsdann nach der hier gegebenen Formel in Functionen $D$ und $E$ und Logarithmen und Kreisbogen; und eben so zerlegt man, nach bekannten Formeln, die unmöglichen Logarithmen in Logarithmen und Kreisbogen: alsdann verschwinden die unmöglichen Gröfsen von selbst und man hat die verlangte Integration ausgeführt.

Die beiden Integrale $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$ nehmen noch eine einfachere Form an, wenn statt $x$ eine andere veränderliche Gröfse $u$ eingeführt wird, welche durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} u = \frac{-x \sin\alpha}{1 + x\cos\alpha} \quad \text{oder} \quad x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$$

bestimmt ist. Hierdurch wird nämlich

$$D\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \alpha\right) = -\int_0 l\left(\frac{\pm\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)\operatorname{cotang} u\,.\,du,$$

$$E\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \alpha\right) = -\int_0 l\left(\frac{\pm\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right) du.$$

Diese Substitution zeigt auch, dafs das Integral $E(x, \alpha)$ sich in einfachere, nur von einem Elemente abhängige Integrale von der Form $\int l(\pm\sin u)\,du$ zerlegen läfst. Diese Integrale aber lassen sich wieder durch die specielle Function $E(-1, \alpha)$ ausdrücken, so dafs die allgemeine Function $E(x, \alpha)$ sich immer durch Functionen derselben Art ausdrücken läfst, in welchen das erste Element den bestimmten Werth $-1$ hat. Um dies zu zeigen differenziire man $E(x, \alpha)$ in Beziehung auf $\alpha$, welches

$$\frac{dE(x, \alpha)}{d\alpha} = \frac{x(x+\cos\alpha)\,l(\pm x)}{1+2x\cos\alpha+x^2} - \tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\alpha+x^2)$$

giebt. Hieraus folgt für $x = -1$

$$\frac{dE(-1, \alpha)}{d\alpha} = -\tfrac{1}{2}l(2-2\cos\alpha) = -l(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha),$$

also, durch Integration,

$$E(-1, \alpha) = -\int l(\sin\tfrac{1}{2}\alpha)\,.\,d\alpha - \alpha l2 + \text{const.},$$

und, wenn $\alpha = 2u$ gesetzt wird,

$$\int l(\sin u)\,du = -\tfrac{1}{2}E(-1, 2u) - u l2 + \text{const.}$$

Da aber

$$E(x, \alpha) = -\int l(\sin u).du + \int l\sin(u+\alpha).du,$$

so hat man

$$E(x, \alpha) = \tfrac{1}{4}E(-1, 2u) - \tfrac{1}{4}E(-1, 2u+2\alpha) + \text{const.}$$

und endlich, wenn die Constante durch $u=0$, und auch $x=0$, bestimmt wird, so hat man

$$E(x, \alpha) = \tfrac{1}{4}E(-1, 2u) + \tfrac{1}{4}E(-1, 2\alpha) - \tfrac{1}{4}E(-1, 2u+2\alpha)$$

$$\text{wenn } x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}.$$

Da die Integrale $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$ die einfachste Gestalt erhalten, wenn $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ gesetzt wird, so werden wir in der Folge einfacher

$$D\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \alpha\right) \text{ durch } D(u, \alpha)$$

$$E\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \alpha\right) \text{ durch } E(u, \alpha)$$

bezeichnen. Da jedoch einige der zu entwickelnden Formeln sich leichter ausdrücken lassen, wenn dem $x$ sein ursprünglicher Werth gelassen wird, so werden wir auch ferner von den Functionen $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$ Gebrauch machen. Zu erinnern ist, dafs man nicht meinen müsse, $D(x, \alpha)$ und $D(u, \alpha)$ seien einander gleich für $x=u$: sie sind vielmehr einander gleich, wenn $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ genommen wird. Eben so ist es mit $E(x, \alpha)$ und $E(u, \alpha)$. Diese Function ist zwar durch die einfachere, nur von einem Elemente abhängige Function $E(-1, \alpha)$ überflüssig gemacht; da sie aber viele einfache Eigenschaften hat, welche denen der Function $D(u, \alpha)$ analog sind, so werden wir auch sie beibehalten.

Die hier gegebene Zerlegung der allgemeinen Form des Integrales $\int P\int Q\,dx\,dx$ in seine einfachsten Bestandtheile enthält ungefähr die Resultate der ersten Abhandlung von *Hill;* denn die daselbst untersuchten allgemeinen Formen $\int P\,l\,Q\,dx$ und $\int P \operatorname{Arc tang} Q\,dx$ sind beide in der obigen Form enthalten. Den einfachsten Functionen aber, welche in dieser Form enthalten sind, haben wir etwas andere Gestalten geben müssen, nicht nur weil so die Eigenschaften derselben einfachere Ausdrücke annehmen, sondern auch um die Analogie mit den später zu entwickelnden logarithmischen Integralen von höheren Ordnungen zu erhalten.

§. 2.

Wir entwickeln nun zuerst die Grundformeln für die Function $\Lambda(x)$; denn wenn gleich dieselbe nur ein specieller Fall von $D(x, \alpha)$ ist, so dient sie doch der ganzen Theorie der logarithmischen Integrale zweiter Ordnung zur Grundlage, da die Grunformeln der Functionen $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$ sich leicht aus denen der Function $\Lambda(x)$ entwickeln lassen. Die im §. 1. gezeigte Zerlegung des Integrals $\int P \int Q\, dx\, dx$ in seine einfachsten Bestandtheile giebt hier sogleich eine Methode, welche hinreicht, eine unendliche Zahl von Formeln für die Function $\Lambda(x)$ zu finden. Setzt man nämlich statt $x$ irgend eine rationale Function $\frac{p}{q}$ von der Art, dafs $p$, $q$ und $p+q$ nur reale Factoren ersten Grades enthalten, so hat man

$$\Lambda\left(\frac{p}{q}\right) = \int \frac{l\left(\frac{p}{q}\right)(q\,\partial p - p\,\partial q)}{q(q+p)}.$$

Zerlegt man nun dieses Integral nach der oben gezeigten Methode in seine einfachen Bestandtheile, so erhält man $\Lambda\left(\frac{p}{q}\right)$ ausgedrückt durch ein Aggregat derselben Functionen $\Lambda$ und durch Logarithmen, welche alle real sind, indem wir vorausgesetzt haben, dafs $p$, $q$ und $p+q$ nur reale Factoren ersten Grades enthalten sollen. Die einfachsten Formeln dieser Art wird man unstreitig erhalten, wenn man für $p$ und $q$ ganze rationale Functionen ersten Grades nimmt. Es sei deshalb $p = a + bx$, $q = c + dx$, so wird

$$\Lambda\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right) = \int l\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)\frac{(bc-ad)\,\partial x}{(c+dx)(a+c+(b+d)x)},$$

und da

$$\frac{bc-ad}{(c+dx)(a+c+(b+d)x)} = \frac{b+d}{a+c+(b+d)x} - \frac{d}{c+dx},$$

so wird dieses Integral in folgende vier zerlegt:

$$\Lambda\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right) = \int \frac{l(a+bx).(b+d)\,\partial x}{a+c+(b+d)x} - \int \frac{l(c+dx)(b+d)\,\partial x}{a+c+(b+d)x}$$
$$- \int \frac{l(a+bx).d.\partial x}{c+dx} + \int \frac{l(c+dx).d.\partial x}{c+dx}.$$

Drückt man diese vier Integrale einzeln durch die Function $\Lambda$ und durch Logarithmen aus, so erhält man, nach einigen leichten Reductionen des logarithmischen Theiles,

$$\Lambda\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right) = \Lambda\left(\frac{(b+d)(a+bx)}{bc-ad}\right) - \Lambda\left(\frac{-(b+d)(c+dx)}{bc-ad}\right)$$
$$- \Lambda\left(\frac{d(a+bx)}{bc-ad}\right) + \tfrac{1}{2}\left(l\left(\frac{d(c+dx)}{bc-ad}\right)\right)^2 + \text{Const.}$$

Die große Allgemeinheit dieser Formel, welche fünf von einander unabhängige, nach Belieben zu bestimmende Größen enthält, ist nur scheinbar, da die Anzahl dieser Größen durch passende Substitutionen sich auf zwei einschränken läßt. Setzt man nämlich $\frac{d(a+bx)}{bc-ad} = -z$, $\frac{b+d}{d} = y$, so erhält die Formel die einfachere Gestalt:

$$\Lambda\left(\frac{z(1-y)}{1-z}\right) = \Lambda(-yz) - \Lambda\left(\frac{y(1-z)}{1-y}\right) - \Lambda(-z) + \tfrac{1}{2}\left(l\,\frac{1-z}{1-y}\right)^2 + \text{Const.}$$

Nimmt man Const. $= -\Lambda(-y) - C$ und verwandelt wieder $z$ in $x$, so kann man die Formel auch so darstellen:

$$\Lambda(-xy) = \Lambda(-x) + \Lambda(-y) + \Lambda\left(\frac{x(1-y)}{1-x}\right) + \Lambda\left(\frac{y(1-x)}{1-y}\right) - \tfrac{1}{2}\left(l\,\frac{1-x}{1-y}\right)^2 + C.$$

Die Constante $C$ in dieser Formel ist von $x$ unabhängig. Da man aber $x$ und $y$ mit einander vertauschen kann, ohne daß die Formel sich änderte, so muß diese Constante auch von $y$ unabhängig sein, und deshalb ist sie rein numerisch. Ehe wir diese Constante allgemein bestimmen, wollen wir den speciellen Fall betrachten, wo $y = x$ ist. Für diesen geht die Gleichung über in

$$\Lambda(-x^2) = 2\Lambda(-x) + 2\Lambda(x) + C.$$

Setzt man zur Bestimmung der Constante $x = 0$, so erhält man $C = 0$; und dieser Werth muß in dem ganzen Intervalle von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ gültig sein, weil in demselben keine Discontinuität eintritt. Man hat daher

$$1. \quad \Lambda(-x^2) = 2\Lambda(-x) + 2\Lambda(x).$$

Um nun die Constante der allgemeineren Formel zu bestimmen, muß man zunächst bemerken, daß die Continuität der darin vorkommenden Functionen unterbrochen wird, sobald $1-x$ oder $1-y$ aus dem Positiven in's Negative übergeht, und umgekehrt; sobald aber die Continuität unterbrochen wird, kann auch die Constante der Integration plötzlich ihren Werth ändern. Deshalb sind hier vier Fälle zu unterscheiden, für welche die Constante besonders zu bestimmen ist; 1) wenn $1-x$ positiv und $1-y$ positiv, 2) wenn $1-x$ positiv und $1-y$ negativ, 3) wenn $1-x$ negativ und $1-y$ positiv, 4) wenn $1-x$ negativ und $1-y$ negativ ist. In dem ersten Falle findet man, indem man $x = 0$ und $y = 0$ setzt, auch $C = 0$. In dem zweiten Falle setze man $x = 0$ und $y = 2$, so wird $C = -2\Lambda(-2)$, und man findet denselben Werth der Constante für den dritten Fall, wenn man $x = 2$ und $y = 0$ setzt. Um endlich die Constante für den vierten Fall zu bestimmen setze man $x = 2$ und $y = 2$, wodurch man erhält

$\Lambda(-4) = 2\Lambda(-2) + 2\Lambda(2) + C$. Dieser Werth der Constante wird vermöge Formel (1.) zu $C = 0$. Die Constante der allgemeinen Formel hat also nur die beiden verschiedenen Werthe $C = 0$ und $C = -2\Lambda(-2)$, und zwar den ersten, wenn $1-x$ und $1-y$ gleiche Vorzeichen haben, den zweiten, wenn die Vorzeichen dieser Gröfsen verschieden sind, oder. was dasselbe ist: er ist $C = 0$ wenn $\frac{1-x}{1-y}$ positiv und $C = -2\Lambda(-2)$ wenn $\frac{1-x}{1-y}$ negativ ist. Setzt man in der allgemeinen Formel für den zweiten dieser Fälle $1-x = +w$ und $1-y = -w$ und nimmt $w$ unendlich klein, so erhält man $C = -3\Lambda(-1)$. Es ist daher $2\Lambda(-2) = 3\Lambda(-1)$, und da $\Lambda(-1) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$, so ist $C = -\frac{\pi^2}{2}$. Wir haben daher folgende Grundformel für die Function $\Lambda$:

$$2.\quad \Lambda(-xy)$$
$$= \Lambda(-x) + \Lambda(-y) + \Lambda\left(\frac{x(1-y)}{1-x}\right) + \Lambda\left(\frac{y(1-x)}{1-y}\right) - \tfrac{1}{2}\left(l\,\frac{1-x}{1-y}\right)^2 + C;$$

wo $C = 0$ wenn $\frac{1-x}{1-y}$ positiv und $C = -\frac{\pi^2}{2}$ wenn $\frac{1-x}{1-y}$ negativ ist.

Diese Formel stimmt mit derjenigen überein, welche *Hill* in seiner zweiten Abhandlung aufgestellt und durch Differenziiren bewiesen hat. Da aber nach der von *Hill* gewählten Definition der Function $\Lambda(x)$ dieselbe imaginär wird, sobald $1-x$ negativ ist, so konnte er nur den einen Fall betrachten, wo $1-x$ und $1-y$ beide positiv sind. In dieser Formel sind alle bisher bekannten Eigenschaften der Function $\Lambda(x)$ als specielle Fälle enthalten; welche wir jetzt aus derselben ableiten wollen.

Setzt man $y = \frac{1}{x}$ und verwandelt sodann $x$ in $-x$, so erhält man

$$3.\quad \Lambda(x) + \Lambda\left(\frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{2}(l \pm x)^2 + K;$$

wo $K = -\frac{\pi^2}{6}$ wenn $x$ positiv und $K = \frac{\pi^2}{3}$ wenn $x$ negativ ist.

Setzt man $y = 0$, so erhält man

$$4.\quad \Lambda(-x) + \Lambda\left(\frac{x}{1-x}\right) = \tfrac{1}{2}(l(1-x))^2 + K;$$

wo $K = 0$ wenn $1-x$ positiv und $K = \frac{\pi^2}{2}$ wenn $1-x$ negativ ist.

Verwandelt man hierin $x$ in $1-x$, addirt die so erhaltene Formel zu jener und verwandelt die Summe der beiden Functionen $\Lambda\left(\frac{x}{1-x}\right) + \Lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)$ nach Formel (3), so erhält man

$$5.\quad \Lambda(-x) + \Lambda(x-1) = lx\,l(1-x) + \frac{\pi^2}{6}.$$

Subtrahirt man ferner (4) und (5) von einander und verwandelt $x$ in $1-x$, so hat man

6. $$\Lambda(-x)-\Lambda\left(\frac{1-x}{x}\right) = lx\,l(1-x)-\tfrac{1}{2}(lx)^2+K;$$

wo $K=\frac{\pi^2}{6}$ wenn $x$ positiv und $K=-\frac{\pi^2}{3}$ wenn $x$ negativ ist.

Verwandelt man endlich hierin wieder $x$ in $\frac{1}{1-x}$, so hat man

7. $$\Lambda(-x)-\Lambda\left(\frac{-1}{1-x}\right) = lx\,l(1-x)-\tfrac{1}{2}(l(1-x))^2+K;$$

wo $K=-\frac{\pi^2}{6}$ wenn $1-x$ positiv und $K=+\frac{\pi^2}{3}$ wenn $1-x$ negativ ist.

Diese Gleichungen (3 bis 7), welche wir aus der allgemeinen Formel (2) abgeleitet haben, enthalten die einfachsten Eigenschaften der Function $\Lambda(x)$, indem sie nur zwei solche Functionen mit einander verbinden, deren Summe oder Differenz sich durch Logarithmen ausdrücken läſst. Durch dieselben kann man aus dem einen bekannten Werthe der Function $\Lambda(-1)=\frac{\pi^2}{6}$ noch mehrere andere Werthe dieser Function ableiten. Setzt man in Formel (1) $x=1$, so hat man $2\Lambda(+1)+\Lambda(-1)=0$, also $\Lambda(+1)=-\frac{\pi^2}{12}$. Setzt man weiter in der Formel (5) $x=2$, so hat man $\Lambda(-2)=\frac{\pi^2}{6}-\Lambda(+1)$, also $\Lambda(-2)=\frac{\pi^2}{4}$. Setzt man endlich $x=\frac{1}{2}$ in Formel (5), so ist $\Lambda(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(l2)^2+\frac{\pi^2}{12}$. Auſser diesen lassen sich noch einige andere besondere Werthe der Function $\Lambda(x)$ durch Logarithmen und durch die Zahl $\pi$ ausdrücken. Nimmt man nämlich $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, welchen Werth ich kurz durch $r$ bezeichne, so ist $r^2=1-x$, $\frac{1-r}{r}=r$: also erhält man durch Formel (1) und (5)

$$\Lambda(-r^2) = 2\Lambda(-r)+2\Lambda(r)$$
$$\Lambda(-r)+\Lambda(-r^2) = 2(lr)^2+\frac{\pi^2}{6},$$

woraus durch Elimination des $\Lambda(-r^2)$ folgt:

$$3\Lambda(-r)+2\Lambda(r) = 2(lr)^2+\frac{\pi^2}{6}.$$

Ferner giebt Formel (6), wenn $x=r$ gesetzt wird,

$$\Lambda(-r)-\Lambda(r) = \tfrac{3}{2}(lr)^2+\frac{\pi^2}{6};$$



und aus diesen beiden Gleichungen erhält man sogleich die Werthe von $\Lambda(-r)$ und $\Lambda(+r)$, nämlich:

$$\Lambda\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\left(l\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{15},\quad \Lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(l\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{10}.$$

Hieraus aber kann man durch Anwendung der Formeln (3 bis 7) leicht folgende ableiten:

$$\Lambda\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right) = \left(l\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{15},\quad \Lambda\left(\frac{-\sqrt{5}-3}{2}\right) = \left(l\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{15}.$$

$$\Lambda\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \left(l\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{10},\quad \Lambda\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\left(l\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \frac{7\pi^2}{30}.$$

Einige andere Formeln, welche als specielle Fälle in der Formel (2) enthalten sind, in denen aber mehr als zwei Functionen $\Lambda$ vorkommen, sind folgende:

$$8.\quad \Lambda(-4x(1-x)) = 2\Lambda(-2x) + 2\Lambda(2x-2) - \frac{\pi^2}{2}.$$

$$9.\quad \Lambda(-x(1-x)) = \Lambda\left(\frac{x^2}{1-x}\right) - \Lambda\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) - 2lx\,l(1-x) + \tfrac{3}{2}(l(1-x))^2 + K;$$

wo $K=0$ wenn $1-x$ positiv und $K=-\frac{\pi^2}{2}$ wenn $1-x$ negativ ist.

$$10.\quad \Lambda\left(\frac{x^2}{4-4x}\right) = 2\Lambda\left(\frac{-x}{2}\right) + 2\Lambda\left(\frac{x}{2-2x}\right) - \tfrac{1}{2}(l(1-x))^2 + K;$$

wo $K=0$ wenn $1-x$ positiv und $K=-\frac{\pi^2}{2}$ wenn $1-x$ negativ ist.

$$11.\quad \Lambda(x^2) - \tfrac{1}{2}\Lambda(-x^2) = \Lambda\left(\frac{x(1+x)}{1-x}\right) + \Lambda\left(\frac{-x(1-x)}{1+x}\right) - \tfrac{1}{2}\left(l\,\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + K;$$

wo $K=0$ wenn $\frac{1-x}{1+x}$ positiv und $K=-\frac{\pi^2}{2}$ wenn $\frac{1-x}{1+x}$ negativ ist.

Die Formel (8) ist aus (2) entstanden, indem $x$ in $2x$ verwandelt und $y=2-2x$ gesetzt worden ist, und die Formel (9) durch den besonderen Werth $y=1-x$, mit Zuziehung der Formeln (3) und (5). Ferner ist (10) aus (2) entstanden, indem $x$ in $\frac{x}{2}$ verwandelt und $y=\frac{-x}{2-2x}$ gesetzt worden ist, und Formel (11) durch den besonderen Werth $y=-x$, mit Anwendung von Formel (1). Uebrigens ist klar, dafs sich diese Formeln aufserordentlich vervielfältigen lassen, da dem $y$ in der allgemeinen Formel alle beliebigen Werthe gegeben werden können. Man kann aber auch die in diesen Formeln vorkommenden Functionen $\Lambda$ mit Hülfe der obigen fünf einfachen Gleichungen umformen, und diese Verwandlungen lassen sich auch mit der allgemeinen Formel (2) selbst vornehmen, so dafs sie

viele verschiedene Gestalten annimmt. Verwandelt man z. B. die vierte und fünfte Function $\Lambda$ dieser Formel nach Formel (4), so erhält man

$$12.\quad \Lambda(-xy) =$$
$$\Lambda(-x)+\Lambda(-y)-\Lambda\left(\frac{-x(1-y)}{1-xy}\right)-\Lambda\left(\frac{-y(1-x)}{1-xy}\right)+l\left(\frac{1-x}{1-xy}\right).l\left(\frac{1-y}{1-xy}\right)+K,$$

wo immer $K=0$, mit Ausnahme des Falles, dafs $1-x$ und $1-y$ gleiche Vorzeichen haben und $1-xy$ das entgegengesetzte von dem wenn $K=\pi^2$ ist.

Besonders merkwürdig ist folgende Umgestaltung der Formel (2), bei welcher der logarithmische Theil ganz verschwindet. Um dieselbe zu erhalten verwandle man in der Formel (2) zunächst $y$ in $\frac{1}{y}$. Dieses giebt

$$\Lambda\left(-\frac{x}{y}\right) =$$
$$\Lambda(-x)+\Lambda\left(-\frac{1}{y}\right)+\Lambda\left(-\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)+\Lambda\left(-\frac{1-x}{1-y}\right)-\tfrac{1}{2}\left(l\,\frac{y(1-x)}{1-y}\right)^2+C.$$

Ferner verwandle man in dieser Formel wieder $x$ in $\frac{-x(1-y)}{1-x}$ und $y$ in $\frac{-y(1-x)}{1-y}$, so erhält man

$$\Lambda\left(-\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) =$$
$$\Lambda\left(\frac{x(1-y)}{1-x}\right)+\Lambda\left(\frac{1-y}{y(1-x)}\right)+\Lambda\left(-\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)+\Lambda\left(-\frac{1-y}{1-x}\right)-\tfrac{1}{2}(ly)^2+C.$$

Addirt man jetzt diese beiden Formeln und die ursprüngliche (2) und führt die Vereinfachungen aus, welche die Formel (3) gewährt, so erhält man

$$13.\quad \Lambda(-xy)+\Lambda\left(-\frac{x}{y}\right)+\Lambda\left(-\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) =$$
$$2\Lambda(-x)+2\Lambda\left(-\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)+2\Lambda\left(\frac{x(1-y)}{1-x}\right)+C,$$

und es ist $C=0$, mit Ausnahme des Falles, wenn $y$ und $1-x$ beide negativ sind, für welchen Fall $C=-2\pi^2$ ist. Setzt man in dieser Formel $x=\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\beta$, $y=-\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta}$, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$14.\quad \Lambda(\operatorname{tang}^2\alpha)+\Lambda(\operatorname{tang}^2\beta)+\Lambda(\operatorname{tang}^2(\alpha+\beta)) =$$
$$2\Lambda(-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta)+2\Lambda(-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}(\alpha+\beta))+2\Lambda(-\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}(\alpha+\beta))+C,$$

wo $C=0$ ist, mit Ausnahme des Falles, dafs $\operatorname{tang}\alpha$ und $\operatorname{tang}\beta$ gleiche Vorzeichen haben und $\operatorname{tang}(\alpha+\beta)$ das entgegengesetzte von dem wenn $C=-2\pi^2$ ist. Einen einfachen speciellen Fall der Formel (13) erhält man, wenn man $y=-1$ setzt, nämlich

15. $$\Lambda\left(\frac{4x}{(1-x)^2}\right) = 4\Lambda\left(\frac{2x}{1-x}\right) + 2\Lambda(-x) - 2\Lambda(x) + C;$$
wo $C=0$ wenn $1-x$ positiv und $C=-2\pi^2$ wenn $1-x$ negativ ist.

Alle bisher gefundenen Formeln haben wir dadurch abgeleitet dafs wir in dem Integrale, welches die Function $\Lambda(x)$ darstellt, statt $x$ eine rationale gebrochene Function ersten Grades substituirt und das Integral sodann nach der allgemeinen Methode der Zerlegung in mehrere andere zerfället haben. Wir haben ferner bemerkt, dafs die Methode mit demselben Erfolge auch angewendet werden kann, wenn für $x$ irgend eine rationale Function von höherem Grade gesetzt wird. Wählt man hierzu die allgemeine Form einer rationalen gebrochenen Function zweiten Grades, so erhält man eine andere noch allgemeinere Formel als die Formel (2), in welcher, wenn die überflüssige, nur scheinbare Allgemeinheit, welche die vielen von einander unabhängigen Gröfsenzeichen anzeigen, durch passende Substitutionen aufgehoben wird, noch vier von einander unabhängige Quantitäten übrig bleiben, die aber nicht weniger als 25 besondere Functionen $\Lambda$ enthält. Beschränkt man sich hierbei auf speciellere Fälle, so vermindert sich zwar bei passender Bestimmung einer oder mehrerer der unabhängigen Gröfsen die Anzahl der in der Formel enthaltenen Functionen $\Lambda$ beträchtlich: aber die einfachsten speciellen Fälle sind immer nur diejenigen, für welche die rationale Function zweiten Grades in eine ersten Grades übergeht; welche Fälle also schon in den hier gefundenen Formeln enthalten sein müssen. Wir wollen deshalb diese Formel, welche eine rationale Function zweiten Grades giebt, und um so mehr die höheren Graden entsprechenden übergehen und es bei den oben gefundenen Formeln, welche die einfachsten Eigenschaften der Function $\Lambda(x)$ ausdrücken, bewenden lassen.

## §. 3.

Wir haben nun noch zu zeigen, auf welche Weise die Werthe der Function $\Lambda(x)$ zu berechnen sind, und wollen deshalb zunächst den Gang dieser Function genauer untersuchen. Da der erste Differenzialquotient derselben, $\frac{l(\pm x)}{1+x}$ von $x=-\infty$ bis $x=+1$ negativ ist, von $x=+1$ bis $x=+\infty$ aber positiv, so nimmt die Function $\Lambda(x)$ in dem ganzen ersten Intervalle continuirlich ab; in dem zweiten Intervalle aber nimmt sie con-

tinuirlich zu, und für $x = 1$ hat sie ihr Minimum $A(1) = -\frac{\pi^2}{12}$ erreicht. Da ferner $A(0) = 0$ ist, so folgt, dafs $A(x)$ für alle negativen Werthe des $x$ positiv, für positive Werthe des $x$ aber $A(x)$ anfänglich negativ ist, bis es, wenn $x$ wächst, wieder positiv wird und dann mit $x$ zugleich ins unendliche wächst. Für sehr grofse positive Werthe des $x$ ist nämlich $A(x)$ sehr nahe gleich $\frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{\pi^2}{6}$, und für sehr grofse negative Werthe des $x$ sehr nahe gleich $\frac{1}{2}(l-x)^2 + \frac{\pi^2}{3}$; wie unmittelbar aus der Formel (3) hervorgeht. Damit man sich von dem Gange dieser Function eine genauere Vorstellung bilden könne, haben wir folgende Werthe derselben berechnet.

| | |
|---|---|
| $A(0) = 0{,}00000000000.$ | $A(-1) = 1{,}64493406685.$ |
| $A(1) = -0{,}82246703342.$ | $A(-2) = 2{,}46740110027.$ |
| $A(2) = -0{,}67524635647.$ | $A(-3) = 3{,}08168043373.$ |
| $A(3) = -0{,}41637539993.$ | $A(-4) = 3{,}58430948761.$ |
| $A(4) = -0{,}13878509442.$ | $A(-5) = 4{,}01487386385.$ |
| $A(5) = +0{,}13444649368.$ | $A(-6) = 4{,}39421319291.$ |
| $A(6) = +0{,}39666088475.$ | $A(-7) = 4{,}73487611794.$ |
| $A(7) = +0{,}64624435589.$ | $A(-8) = 5{,}04509611128.$ |
| $A(8) = +0{,}88332406176.$ | $A(-9) = 5{,}33061006760.$ |
| $A(9) = +1{,}10863277949.$ | $A(-10) = 5{,}59559784509.$ |
| $A(10) = +1{,}32308002285.$ | $A(-11) = 5{,}84321195371.$ |

Der zweite Werth des $x$, für welchen $A(x) = 0$ wird, liegt, wie man aus dieser Tabelle sieht, zwischen 4 und 5: derselbe ist, wie wir durch genaue Rechnung gefunden haben, $A(x) = 0$ für $x = 4{,}50374185563.$

Die Berechnung der numerischen Werthe der Function $A(x)$ wird durch die oben gefundenen Formeln aufserordentlich erleichtert. Zunächst zeigen dieselben, wie alle diese Functionen sich auf andere reduciren lassen, für welche $x$ in dem Intervalle $x = 0$ bis $x = -\frac{1}{2}$, oder auch in dem Intervalle $x = -\frac{1}{2}$ bis $x = -1$ liegt. Durch die Formel (3) kann man zunächst jede Function $A(x)$, in welcher $x$, vom Vorzeichen abgesehen, gröfser als 1 ist, in eine andere verwandeln, in welcher $x$ kleiner als 1 ist; es bleibt also nur das Intervall $x = -1$ bis $x = +1$. Durch die Formel (4) wird ferner jede Function $A(x)$, in welcher $x$ in den Grenzen $x = +1$ bis $x = 0$ liegt, in eine andere verwandelt, in welcher $x$ in den Grenzen $x = -1$ bis $x = 0$ liegt; und dieses Intervall wird endlich durch

die Formel (5) auf die Hälfte reducirt, so daſs man also die Function $\Lambda(x)$ nur für diejenigen Werthe des $x$ besonders zu berechnen hat, welche in den Grenzen $x = -\frac{1}{2}$ bis $x = 0$ liegen. Das Intervall $-\frac{1}{2}$ bis 0 läſst sich vermittelst der gefundenen Formeln weiter einschränken, auf $-\frac{1}{3}$ bis 0, dieses wieder auf $-\frac{1}{4}$ bis 0 und dieses wieder auf $-\frac{1}{5}$ bis 0 und so fort in's unendliche: oder es läſst sich jede Function $\Lambda(x)$ durch andere solche Functionen ausdrücken, deren Elemente negativ sind und von 0 so wenig verschieden, als man nur will. Um dies zu zeigen, nehme ich die Formel $\Lambda(-x^2) = 2\Lambda(-x) + 2\Lambda(x)$ und verwandele in derselben $\Lambda(-x)$ nach der Formel (4), wodurch ich erhalte

$$16. \quad \Lambda(x) = \Lambda\left(\frac{x}{1-x}\right) + \tfrac{1}{2}\Lambda(-x^2) - \tfrac{1}{2}(\Lambda(1-x))^2,$$

wenn $1-x$ positiv ist. Mit Hülfe dieser Formel wird jede Function $\Lambda(x)$, deren Element $x$ in den Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$ liegt, durch zwei andere ausgedrückt, deren Elemente in den Grenzen $-\frac{1}{3}$ und 0 liegen. Ferner wird durch dieselbe Formel jede Function $\Lambda(x)$, deren Element $x$ in den Grenzen $-\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{4}$ liegt, durch zwei andere ausgedrückt, deren Elemente in den Grenzen $-\frac{1}{4}$ und 0 liegen. Von diesem Intervalle wird wieder der Theil zwischen $-\frac{1}{4}$ und $-\frac{1}{5}$ durch den anderen Theil bestimmt, und es werden so nach einander noch von dem Intervalle $-\frac{1}{5}$ bis 0 die einzelnen Intervalle $-\frac{1}{5}$ bis $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{6}$ bis $-\frac{1}{7}$ u. s. w. abgesondert, so daſs nur das Intervall $-\frac{1}{n}$ bis 0 bleibt, in welchem man $n$ so groſs machen kann, als man will. Es lieſse sich, wie man leicht sieht, hierauf eine Methode der näherungsweisen Berechnung der Function $\Lambda(x)$ gründen, welche jedoch von keinem practischen Nutzen sein würde, da die Annäherung an den Grenzwerth $\Lambda(0)$ viel zu langsam ist. Eine oder zwei solche Reductionen aber, welche das Element $x$ der zu berechnenden Function kleiner als $-\frac{1}{3}$ oder kleiner als $-\frac{1}{4}$ machen, werden in vielen Fällen förderlich sein, da die Function $\Lambda(x)$ am leichtesten durch eine einfache, nach Potenzen von $x$ geordnete Reihe berechnet wird.

Um die Reihen-Entwickelungen des Integrals $\Lambda(x)$ zu erhalten, verwandle ich dasselbe durch theilweise Integration in

$$\Lambda(x) = lx\,l(1+x) - \int\frac{dx}{x}\,l(1+x).$$

Wird nun $l(1+x)$ in eine Reihe entwickelt und die Integration ausgeführt, so erhält man

$$17.\quad \Lambda(x) = lx\,l(1+x) - \left(\frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \ldots\right)$$

in den Grenzen $x = -1$ bis $x = +1$. Aus dieser Reihen-Entwickelung erhält man sogleich noch fünf andere, indem man mit Hülfe der fünf einfachen Gleichungen (3 bis 7, §. 2.) die Function $\Lambda(x)$ umformt und alsdann durch eine passende Substitution für $x$, $\Lambda(x)$ wieder herstellt. Diese Reihen sind

$$18.\quad \Lambda(x) = K + lx\,l(1+x) - \tfrac{1}{2}(lx)^2 + \left(\frac{1}{1^2 x} - \frac{1}{2^2 x^2} + \frac{1}{3^2 x^3} - \ldots\right);$$

wo $K = -\frac{\pi^2}{6}$ ist, in den Grenzen $x = +1$ bis $x = +\infty$,

und $K = +\frac{\pi^2}{3}$ in den Grenzen $x = -\infty$ bis $x = -1$;

$$19.\quad \Lambda(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{1+x}{1^2} + \frac{(1+x)^2}{2^2} + \frac{(1+x)^3}{3^2} + \ldots\right)$$

in den Grenzen $x = -2$ bis $x = 0$;

$$20.\quad \Lambda(x) = K + \tfrac{1}{2}(l(1+x))^2 + \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2^2(1+x)^2} + \frac{1}{3^2(1+x)^3} + \ldots\right),$$

wo $K = -\frac{\pi^2}{6}$ ist, in den Grenzen $x = 0$ bis $x = \infty$,

und $K = +\frac{\pi^2}{3}$ in den Grenzen $x = -\infty$ bis $x = -2$;

$$21.\quad \Lambda(x) = lx\,l(1+x) - \tfrac{1}{2}(l(1+x))^2 - \left(\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2^2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3^2(1+x)^3} + \ldots\right)$$

in den Grenzen $x = -\frac{1}{2}$ bis $x = +\infty$;

$$22.\quad \Lambda(x) = \frac{\pi^2}{6} + \tfrac{1}{2}(l-x)^2 + \left(\frac{1+x}{x} + \frac{(1+x)^2}{2^2 x^2} + \frac{(1+x)^3}{2^2 x^3} + \ldots\right)$$

in den Grenzen $x = -\infty$ bis $x = -\frac{1}{2}$.

Diese Reihen-Entwickelungen dienen zur unmittelbaren Berechnung der Function $\Lambda(x)$ für alle möglichen Werthe des $x$, und zwar dienen die Reihen (17) und (21) vorzüglich für den Fall, wenn $x$ dem Werthe 0 nahe liegt; die Reihen (19) und (22) für den Fall, wenn $x$ dem Werthe $-1$ nahe liegt, und die Reihen (18) und (20) für große positive und negative Werthe des $x$.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

---

# 6.

# Beiträge zur Combinationslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen.

(Von Herrn Dr. *Stern* in Göttingen.)

## Erste Abhandlung.

### 1.

Im 9ten Bande dieses Journals (S. 111 u. f.) hat Herr Prof. *Möbius* einige sehr merkwürdige Sätze mitgetheilt, welche sich auf das Verhältnifs der Anzahl der Gruppen in den geraden und ungeraden Classen der Variationen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen und zu bestimmten Producten beziehen. Die Untersuchung ist dadurch sehr erleichtert, dafs man die Anzahl der Gruppen, die in irgend einer Variationsclasse zu bestimmten Summen vorkommt, leicht angeben kann. Aus diesem Grunde kann man auch einige ähnliche Sätze ohne Schwierigkeit ableiten, wie z. B. folgende. *Bei den Combinationen ohne Wiederholung ist die Anzahl der Gruppen in den geraden Classen um* 1 *kleiner als die in den ungeraden.* Nennt man nemlich $D$ den Unterschied der Anzahl der Gruppen, die in den ungeraden und geraden Classen vorkommen, so hat man für $n$ Elemente

$$D = n - \frac{n.n-1}{2} + \frac{n.n-1.n-2}{2.3} - \ldots = 1-(1-1)^n = 1.$$

Ungleich schwieriger wird dagegen die Untersuchung über dieses Verhältnifs bei den Combinationen zu bestimmten Summen. Die Frage, wie man die Anzahl der in irgend einer Combinationsclasse vorkommenden Gruppen durch eine allgemeine, unabhängige Formel bestimmen könne, wird in den mir bekannten Werken über Combinationslehre entweder gar nicht berührt, oder es wird bemerkt, dafs eine solche Formel nicht vorhanden sei *). In der That kann aber diese Frage sehr einfach beantwortet werden; was ich hier zuerst zeigen will.

*) *Weingärtner* (Lehrbuch der combinatorischen Analysis Th. I. S. 296) sagt sogar, dafs sich schwerlich eine solche Formel geben lasse.

**2.**

Ich bezeichne die Combinationen ohne Wiederholung zur Summe $n$ und zur Classe $q$ durch $[{}^{n}\overset{q}{C}]$, ihre Anzahl durch ${}^{n}\overset{q}{C}$; die Anzahl der Combinationen aus allen Classen durch ${}^{n}C$; die Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zur Summe $n$ und zur Classe $q$ durch $[{}^{n}\overset{q}{C'}]$, ihre Anzahl durch ${}^{n}\overset{q}{C'}$; die Anzahl der Combinationen aus allen Classen durch ${}^{n}C'$. Ferner bezeichne ich durch $\overline{\frac{r}{s}}$ die gröfste ganze Zahl, die in dem Bruche $\frac{r}{s}$ enthalten ist; mithin, wenn $\frac{r}{s}$ selbst eine ganze Zahl ist, so ist $\overline{\frac{r}{s}} = \frac{r}{s}$; eben so bedeute $\overline{\frac{r+r'+r''+\dots}{s}}$ die gröfste ganze Zahl die in dem Bruche $\frac{r+r'+r''\dots}{s}$ enthalten ist.

**3.**

Aus der bekannten Gleichung

$$1.\quad {}^{n}\overset{q}{C'} = {}^{n-1}\overset{q-1}{C'} + {}^{n-q}\overset{q}{C'},$$

folgt unmittelbar diese andere

$$2.\quad {}^{n}\overset{q}{C'} = {}^{n-1}\overset{q-1}{C'} + {}^{n-q-1}\overset{q-1}{C'} + {}^{n-2q-1}\overset{q-1}{C'} + \dots,$$

welche abbricht, sobald man an ein Glied ${}^{n-rq-1}\overset{q-1}{C'}$ kommt, in welchem $n-rq-1$ Null oder negativ ist. Es ergiebt sich sogleich ${}^{n}\overset{1}{C'} = 1$. Um aber ${}^{n}\overset{2}{C'}$ zu finden, hat man bisher zwei Fälle unterschieden, und gerade hierin liegt der Grund, weswegen man keine allgemeine Formel finden konnte. Ist nemlich $n$ eine gerade Zahl, $= 2m$, so hat man ${}^{2m}\overset{2}{C'} = m$; ist dagegen $n = 2m+1$, so hat man ${}^{2m+1}\overset{2}{C'} = m$. Nach der oben angegebenen Bezeichnung dagegen lassen sich diese zwei Fälle in einen zusammenziehen und man hat

$$3.\quad {}^{n}\overset{2}{C'} = \overline{\frac{n}{2}}.$$

Hieraus ergiebt sich mittelst der Formel (2)

$$4.\quad {}^{n}\overset{3}{C'} = \overline{\frac{n-1}{2}} + \overline{\frac{n-4}{2}} + \overline{\frac{n-7}{2}} \dots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist $\overline{\frac{n-(3k+1)}{2}}$, und die Reihe bricht ab,

sobald $k = \overline{\frac{n-1}{3}}$ ist. Drückt man daher den Werth von ${}^{n}\overset{3}{C}'$ durch ein combinatorisches Aggregat aus, so hat man

$$5.\quad {}^{n}\overset{3}{C}' = \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{3}}}^{k} \overline{\frac{n-(3k+1)}{2}}.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich der Werth von ${}^{n}\overset{4}{C}'$ durch wiederholte Anwendung der Formel (1). Es ist nemlich

$${}^{n}\overset{4}{C}' = {}^{n-1}\overset{3}{C}' + {}^{n-5}\overset{3}{C}' + {}^{n-9}\overset{3}{C}' \dots = \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{4}}}^{k_{\prime}} {}^{n-(4k_{\prime}+1)}\overset{3}{C}',$$

also

$$6.\quad {}^{n}\overset{4}{C}' = \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{4}}}^{k_{\prime}} \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{3}}}^{k} \overline{\frac{n-(3k+1)-(4k_{\prime}+1)}{2}}.$$

Eben so findet man

$$7.\quad {}^{n}\overset{5}{C}' = \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{5}}}^{k_{\prime\prime}} \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{4}}}^{k_{\prime}} \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{3}}}^{k} \overline{\frac{n-(3k+1)-(4k_{\prime}+1)-(5k_{\prime\prime}+1)}{2}},$$

und allgemein

$$8.\quad {}^{n}\overset{q}{C}' = \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{q}}}^{k_{q-3}} \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{q-1}}}^{k_{q-4}} \dots \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{4}}}^{k_{\prime}} \sum_{0,\,\overline{\frac{n-1}{3}}}^{k} \overline{\frac{n-(3k+1)-(4k_{\prime}+1)-(5k_{\prime\prime}+1)\dots-(qk_{q-3}+1)}{2}};$$

welches die gesuchte unabhängige Formel für die Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung ist. Statt dieser Formel kann man auch die folgende schreiben:

$$9.\quad {}^{n}\overset{q}{C}' = \sum_{0,\,\overline{\frac{n-q+2}{q}}}^{k_{q-3}} \dots \sum_{0,\,\overline{\frac{n-q+2}{4}}}^{k'} \sum_{0,\,\overline{\frac{n-q+2}{3}}}^{k} \overline{\frac{n-q+2-3k-4k_{\prime}\dots-qk_{q-3}}{2}}.$$

Soll z. B. die Anzahl der Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zur sechsten Classe und zur Summe 15 gefunden werden, so hat man

$$\begin{aligned}{}^{15}\overset{6}{C}' &= \sum_{0,1}^{k_{\prime\prime\prime}} \sum_{0,2}^{k_{\prime\prime}} \sum_{0,2}^{k_{\prime}} \sum_{0,3}^{k} \overline{\frac{11-3k-4k_{\prime}-5k_{\prime\prime}-6k_{\prime\prime\prime}}{2}}\\ &= \overline{\frac{11}{2}} + \overline{\frac{11-3}{2}} + \overline{\frac{11-2.3}{2}} + \overline{\frac{11-3.3}{2}} + \overline{\frac{11-4}{2}} + \overline{\frac{11-8}{2}} + \overline{\frac{11-(3+4)}{2}}\\ &+ \overline{\frac{11-5}{2}} + \overline{\frac{11-(3+5)}{2}} + \overline{\frac{11-(4+5)}{2}} + \overline{\frac{11-6}{2}} + \overline{\frac{11-(3+6)}{2}}\\ &= 5+4+2+1+3+1+2+3+1+1+2+1 = 26.\end{aligned}$$

### 4.

Bekanntlich kann man auch die Summe der Anzahl der Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung, die in mehreren auf einander folgenden Classen, von der ersten an gerechnet, enthalten sind, dadurch finden, dafs man sie auf die Anzahl der Combinationen einer einzigen Classe zurückführt, und zwar ist

$$\sum_{1,q}^{r} {}^{n}\overset{r}{C}{}' = {}^{n+q}\overset{q}{C}{}':$$

mithin kann auch diese Summe auf eine unabhängige Weise gefunden werden. Besonders ist der Fall interessant, wenn man die Anzahl der Combinationen aus allen Classen sucht. Alsdann ist

$$10. \quad {}^{n}C' = {}^{2n}\overset{n}{C}{}' = \sum_{0,\,\frac{\overline{n+2}}{n}}^{k_{n-3}} \cdots\cdots \sum_{0,\,\frac{\overline{n+2}}{3}}^{k} \frac{\overline{n+2-3k-4k_{,}\ldots\ldots n k_{n-3}}}{2}.$$

Da nun, wie bekannt, die Entwickelung des Ausdrucks $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$ eine Reihe giebt, in welcher der zu $x^n$ gehörende Coefficient $= {}^{n}C'$ ist, so kann vermittelst der Formel (10) das allgemeine Glied dieser Reihe dargestellt werden; was bis jetzt noch unbekannt war.

### 5.

Es ist nun leicht, auch die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung zu einer bestimmten Summe und Classe durch eine unabhängige Formel zu finden. Denn bekanntlich ist

$$11. \quad {}^{n}\overset{q}{C} = {}^{n-\frac{q.\overline{q-1}}{2}}\overset{q}{C}{}',$$

mithin nach (10)

$$12. \quad {}^{n}\overset{q}{C} = \sum_{0,\,\frac{\overline{n-\frac{q.\overline{q+1}}{2}+2}}{q}}^{k_{q-3}} \cdots\cdots \sum_{0,\,\frac{\overline{n-\frac{q.\overline{q+1}}{2}+2}}{3}}^{k} \frac{\overline{n-\frac{q.\overline{q+1}}{2}+2-3k-4k_{,}\ldots\ldots q k_{q-3}}}{2}.$$

Man kann übrigens eine ähnliche Formel auch unmittelbar aus der Natur der Combinationen ohne Wiederholung ableiten. Man hat nemlich

$$13. \quad {}^{n}\overset{q}{C} = {}^{n-q}\overset{q-1}{C} + {}^{n-q}\overset{q}{C} = {}^{n-q}\overset{q-1}{C} + {}^{n-2q}\overset{q-1}{C} + {}^{n-3q}\overset{q-1}{C} \ldots\ldots$$

Nun ist

$${}^{n}\overset{1}{C} = 1 \quad \text{und} \quad {}^{n}\overset{2}{C} = \frac{\overline{n-1}}{2},$$



mithin

$$ {}^{n}\overset{3}{C} = \overline{\frac{n-4}{2}} + \overline{\frac{n-7}{2}} + \overline{\frac{n-10}{2}} \dots = \sum_{1,\overline{\frac{n-1}{3}}}^{k} \cdot \overline{\frac{n-1-3k}{2}}. $$

Eben so

$$ {}^{n}\overset{4}{C} = \sum_{1,\overline{\frac{n-1}{4}}}^{k_1} \sum_{1,\overline{\frac{n-1}{3}}}^{k} \overline{\frac{n-1-3k-4k_1}{2}}, $$

und allgemein

$$ 14. \quad {}^{n}\overset{q}{C} = \sum_{1,\overline{\frac{n-1}{q}}}^{k_{q-3}} \dots \sum_{1,\overline{\frac{n-1}{3}}}^{k} \overline{\frac{n-1-3k-4k'\dots-qk_{q-3}}{2}}. $$

Man sieht übrigens leicht, dafs die Formeln (12) und (14) identisch sind. Da nun, wie bekannt, in der Entwickelung des Productes $1+x.1+x^2.1+x^3\dots$ der zu $x^r$ gehörende Coefficient $= {}^{r}C$ ist, so kann man auch das allgemeine Glied dieser Reihe mit Hülfe der Formel (12) oder der Formel (14) darstellen.

6.

Man kann die vorhergehenden Formeln auch von den Summenzeichen befreien. Da man jedoch hiebei auf sehr verwickelte Ausdrücke kommt, so will ich den zu befolgenden Weg nur an einem einfachen Beispiele erläutern. Man hat bisher sechs verschiedene Formeln nöthig gehabt, um den Werth von ${}^{n}\overset{3}{C'}$ anzugeben: dieser Werth läfst sich aber durch eine einzige entwickelte Formel ausdrücken. In dem Ausdrucke

$$ \sum_{0,\overline{\frac{n-1}{3}}}^{k} \overline{\frac{n-(3k+1)}{2}} = \overline{\frac{n-1}{2}} + \overline{\frac{n-4}{2}} + \dots $$

kommen $\overline{\frac{n}{3}}$ Glieder vor, wenn man nur diejenigen zählt, welche nicht $=0$ sind, also die Endglieder wegläfst, deren Werth $\frac{0}{2}$ oder $\frac{1}{2}$ ist. Die Zähler der einzelnen Glieder sind abwechselnd gerade oder ungerade. Ist nun ein Zähler $n-m$ eine gerade Zahl, so ist $\overline{\frac{n-m}{2}} = \frac{n-m}{2}$, und wenn $n-m$ eine ungerade Zahl ist, $\overline{\frac{n-m}{2}} = \frac{n-m}{2} - \frac{1}{2}$. Es sind hier sechs verschiedene Fälle zu betrachten, je nachdem $n$ in der Form $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, $6m+5$ enthalten ist. Im ersten Falle enthält die Reihe $2m$ Glieder, also $m$ mit ungeraden Zählern; dasselbe gilt für

den zweiten und dritten Fall. Im vierten Falle enthält die Reihe $2m+1$ Glieder. Nun ist der Zähler des ersten Gliedes, also auch der des letzten, eine gerade Zahl: mithin sind $m$ Glieder mit ungeraden Zählern vorhanden. Im fünften Falle enthält die Reihe wieder $2m+1$ Glieder; von diesen haben $m+1$ Glieder ungerade Zähler. Im sechsten Falle sind unter den $2m+1$ vorhandenen Gliedern $m$ Glieder mit ungeraden Zählern. Die Anzahl der Glieder mit ungeraden Zählern ist also in allen Fällen $\overline{\frac{n+2}{6}}$, ausgenommen im letzten, in welchem sie $\overline{\frac{n+2}{6}}-1$ ist. Da aber der Ausdruck $\overline{\frac{n+1}{6}}-\overline{\frac{n}{6}}$ in allen übrigen Fällen gleich Null und nur dann $=1$ ist, wenn $n=6m+5$ ist, so ist allgemein die Anzahl der ungeraden Glieder $=\overline{\frac{n+2}{6}}-\overline{\frac{n+1}{6}}+\overline{\frac{n}{6}}$. Mithin ist

$$
\begin{aligned}
{}^{n}\overset{3}{C}{}' &= \overline{\frac{n-1}{2}}+\overline{\frac{n-4}{2}}+\dots\\
&= \frac{n-1}{2}+\frac{n-4}{2}+\dots-\tfrac{1}{2}\left(\overline{\frac{n+2}{6}}-\overline{\frac{n+1}{6}}+\overline{\frac{n}{6}}\right)\\
&= \frac{\overline{\frac{n}{3}}.n-\dfrac{3\left(\overline{\frac{n}{3}}\right)^2-\overline{\frac{n}{3}}}{2}-\left(\overline{\frac{n+2}{6}}-\overline{\frac{n+1}{6}}+\overline{\frac{n}{6}}\right)}{2}.
\end{aligned}
$$

## 7.

Die im Vorhergehenden angedeuteten Summenformeln scheinen indessen nicht geeignet zu sein, um über das in §. 1. angedeutete Verhältnifs Aufschlufs zu geben. Dennoch hat schon *Euler* den wichtigsten darauf bezüglichen Satz durch Induction gefunden (*Comm. acad. Petr. novi T. 3. p. 159*). Er heifst:

*Bei den Combinationen ohne Wiederholung zu einer bestimmten Summe ist die Anzahl der in den geraden Classen enthaltenen Gruppen der Anzahl der in den ungeraden Classen enthaltenen gleich, ausgenommen wenn diese Summe eine in der Form* $\frac{3z^2\pm z}{2}$ *enthaltene Zahl* (also eine Pentagonalzahl) *ist: alsdann nemlich enthalten die ungeraden oder die geraden Classen eine Gruppe mehr, je nachdem z eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.*

Die Richtigkeit dieses Satzes läſst sich leicht vermittelst eines anderen Satzes darthun, den *Euler (Comm. acad. Petr. T. 13. p. 93)* ebenfalls zuerst durch Induction gefunden, später aber bewiesen hat *(Comm. acad. Petr. novi T. 5. p. 78)* und welcher darin besteht, daſs das unendliche Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$ der Reihe $1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}\ldots.$ gleich ist, in welcher Reihe nur die Potenzen vorkommen, deren Exponenten in der Form $\frac{3z^2\pm z}{2}$ enthalten und deren Glieder mit den Coefficienten $(-1)^z$ multiplicirt sind, so daſs also das unendliche Product $=$ $\sum\limits_{0,\infty}^{z}(-1)^z x^{\frac{3z^2\pm z}{2}}$ ist. Das Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$ ist nemlich nur ein specieller Fall des allgemeineren $(1+a_1x^1)(1+a_2x^2)(1+a_3x^3)\ldots.$, in dessen Entwickelung der Coefficient $C_r$ irgend einer Potenz $x^r$ der Summe der ohne Wiederholung zur Summe $r$ aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots.$ gebildeten Combinationen gleich ist, wenn die einzelnen Gruppen durch Addition verbunden werden. Setzt man nun alle Elemente $=-1$, so erhält jede einzelne Gruppe den Werth $+1$, oder den Werth $-1$, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Elementen enthält. Da nun, unter dieser Voraussetzung, $C_r$ verschwindet, wenn $r$ nicht in der Form $\frac{3z^2\pm z}{2}$ enthalten ist, so folgt, daſs in diesem Falle $C_r$ eben so viele Gruppen mit einer geraden Anzahl von Elementen als Gruppen mit einer ungeraden Anzahl enthält; und da ferner, unter der Voraussetzung, daſs alle Elemente $=-1$ sind, $C_r=\pm1$ wird, wenn $r=\frac{3z^2\pm z}{2}$ ist, so folgt, daſs überhaupt in $C_r$, wenn $r=\frac{3z^2\pm z}{2}$ ist, eine Gruppe mit einer geraden oder ungeraden Anzahl von Elementen mehr vorhanden sein muſs, je nachdem $z$ gerade oder ungerade ist; was zu beweisen war.

(Die Fortsetzung folgt.)

---

# 7.

# Auszug aus einer der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 5ten März 1840 vorgelesenen Abhandlung.

(Von Hrn. Prof. G. *Lejeune Dirichlet*.)

---

Die vorgelesene Abhandlung ist als die Fortsetzung einer früheren zu betrachten, welche in dem Jahrgange von 1837 gedruckt ist und worin der erste strenge Beweis des Satzes gegeben worden ist, dafs jede arithmetische Reihe, deren erstes Glied und deren Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. In der neuen Abhandlung wird dieser Satz auf quadratische Formen, d. h. auf Ausdrücke von der Gestalt $ax^2+2bxy+cy^2$ ausgedehnt, die jedoch der Beschränkung unterworfen werden müssen, dafs die darin enthaltenen bestimmten Zahlen $a$, $2b$, $c$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Die Principien, auf welchen der Beweis dieser Eigenschaft beruht, obgleich im Wesentlichen mit denjenigen übereinstimmend, wovon in der angeführten Abhandlung Gebrauch gemacht worden ist, bedürfen zum Behufe dieser neuen Anwendung einiger Modificationen, welche wir an einem speciellen Falle anzudeuten versuchen wollen. Es ist dies der Fall, wo die Determinante eine negative Primzahl $-p$ ist, welche, abgesehen vom Zeichen, die Form $4n+3$ hat, und wo diese Determinante zugleich zu den sogenannten regelmäfsigen gehört (*determinans regularis, Disq. arith. art. 306. VI.*).

Es sei $h=2\lambda+1$ die Anzahl der verschiedenen Formen, welche für die Determinante $-p$ statt finden, und welche unter der gemachten Voraussetzung sich alle aus einer derselben $\varphi_1$ durch successives Zusammensetzen bilden lassen. Diese Formen, welche wir durch $\varphi$ bezeichnen und durch Indices von einander unterscheiden wollen, lassen sich dann immer in folgende Ordnung bringen:

$$1.\quad \varphi_{-\lambda},\ \varphi_{-(\lambda-1)},\ \ldots\ \varphi_{-1},\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{\lambda-1},\ \varphi_\lambda;$$

welche Reihe als in sich zurückkehrend zu betrachten ist, so dafs auf $\varphi_\lambda$

wieder $\varphi_{-1}$ folgt, und wo jede Form aus der vorhergehenden und der Form $\varphi_1$ zusammengesetzt ist, $\varphi_0$ die Hauptform $x^2+py^2$ bedeutet, und entgegengesetzten Formen, wie $ax^2+2bxy+cy^2$ und $ax^2-2bxy+cy^2$, entgegengesetzte Indices entsprechen.

Theilt man die Gesammtheit der positiven ungeraden Primzahlen ($p$ ausgenommen) in zwei Classen, wovon die erste alle diejenigen enthält, in Bezug auf welche $-p$ quadratischer Rest ist, die zweite alle übrigen umfaſst, und bezeichnet die in den beiden Classen enthaltenen Zahlen allgemein respective mit $f$ und $g$, so lassen sich bekanntlich die Primzahlen der ersten Classe ausschlieſslich durch die Formen (1) darstellen, und zwar ist jede Primzahl $f$ fähig durch zwei entgegengesetzte Formen, wie $\varphi_\gamma$ und $\varphi_{-\gamma}$, und nur durch diese ausgedrückt zu werden; wobei es sich von selbst versteht, daſs für $\gamma=0$ diese beiden Formen sich auf die Hauptform reduciren. Der doppelte Werth $\pm\gamma$ soll nun der Index von $f$ heiſsen.

Es sei ferner $\frac{2\pi}{h}=\omega$, wo $\pi$ die gewöhnliche Bedeutung hat, $t$ irgend eine der Zahlen

$$2.\quad 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .\ \lambda$$

und endlich $s$ eine positive die Einheit übertreffende Gröſse ist, so findet folgende Gleichung statt, deren Wahrheit leicht aus den bekannten Sätzen über die Zusammensetzung der Formen folgt:

$$2\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^{2s}}}\cdot\Pi\frac{1}{1-2\frac{\cos t\gamma\omega}{f^s}+\frac{1}{f^{2s}}}=\Sigma\frac{1}{\varphi_0^s}+2\cos t\omega\,\Sigma\frac{1}{\varphi_1^s}+\ldots.+2\cos\lambda t\omega\,\Sigma\frac{1}{\varphi_\lambda^s}.$$

In dieser Gleichung bezieht sich das erste Multiplicationszeichen auf alle Primzahlen $g$, das zweite auf alle $f$, und $\pm\gamma$ ist der jedesmalige Index von $f$. Was das Zeichen $\Sigma$ betrifft, so bedeutet dasselbe, daſs man in der quadratischen Form, vor welcher es steht, den unbestimmten Zahlen $x$ und $y$ alle Systeme positiver oder negativer Werthe von solcher Beschaffenheit beilegen muſs, daſs der entsprechende Werth der Form ungerade und nicht durch $p$ theilbar wird.

Setzt man zur Abkürzung $2\Pi\frac{1}{1-g^{2s}}=G$ und bezeichnet die zweite Seite mit $L_t$, nimmt dann die Logarithmen von beiden Seiten und entwickelt jeden der Logarithmen, welche $f$ enthalten, nach der bekannten Formel

$$-\tfrac{1}{2}\log(1-2z\cos\alpha+z^2) = \frac{z}{1}\cos 2\alpha + \frac{z^2}{2}\cos 2\alpha + \text{etc.}$$

so erhält man

$$\Sigma\frac{\cos t\gamma\omega}{f^{s}} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\cos 2t\gamma\omega}{f^{2s}} + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}\log G + \tfrac{1}{2}\log L_t.$$

Diese allgemeine Gleichung enthält, wie die frühere, $\lambda+1$ besondere Gleichungen, welche den verschiedenen Werthen (2) von $t$ entsprechen.

Bezeichnet $\mu$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots \lambda$, und addirt man diese besonderen Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit $1$, $2\cos\mu\omega$, $2\cos 2\mu\omega, \ldots, 2\cos\lambda\mu\omega$ multiplicirt hat, so kommt

3. $$\Sigma\frac{1}{f^s} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{f^{2s}}\text{ etc.} = \frac{1}{h}(\log L_0 + 2\cos\mu\omega\log L_1 + \ldots + 2\cos\lambda\mu\omega\log L_\lambda),$$

wo die erste Summation auf alle Primzahlen auszudehnen ist, deren Index $\pm\mu$ ist, die zweite auf diejenigen, deren doppelt genommener Index $\equiv\pm\mu$ (mod. $h$) ist, u. s. w.

Für $\mu=0$ erhält man durch dasselbe Verfahren

4. $$\Sigma\frac{1}{f^s} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{f^{2s}} + \ldots = -\tfrac{1}{2}\log G + \frac{1}{2h}(\log L_0 + 2\log L_1 + \ldots + 2\log L_\lambda)$$

wo die Summation sich resp. über alle Primzahlen erstreckt, deren Indices resp. mit $1, 2, \ldots$ multiplicirt, durch $h$ theilbar werden.

Die Gleichungen (3) und (4) gelten, wie diejenigen, aus welchen sie abgeleitet sind, für jeden Werth von $s$, welcher $>1$. Setzt man daher $s=1+\varrho$, wo $\varrho$ positiv angenommen ist, so kann man die Veränderliche $\varrho$ unendlich klein werden lassen. Untersucht man nun die unter dem Logarithmenzeichen vorkommenden Ausdrücke in dieser Voraussetzung, so findet man durch sehr einfache Betrachtungen, die jedoch hier nicht ausgeführt werden können, dafs $L_0$ unendlich wird, dafs hingegen $L_t$, wenn $t$ nicht den Werth 0 hat, sich einer endlichen, von der Null verschiedenen Grenze nähert und dafs dieselbe Eigenschaft dem Producte $G$ zukommt. Aus diesem Resultate folgt sogleich, dafs die zweite und also auch die erste Seite von jeder der Gleichungen (3) und (4) für ein unendlich kleines $\varrho$ unendlich grofs wird, und dann ferner, wie in der früheren Abhandlung, dafs die Summe $\Sigma\frac{1}{f^{1+\varrho}}$ aus unendlich vielen Gliedern besteht, oder, was dasselbe ist, dafs jede der Formen (1) eine unendliche Anzahl von Primzahlen enthält.

# 8.

# Von dem Krümmungs-Schwerpuncte ebener Curven.

(Von Hrn. Prof. *Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 5. April 1838 in der hiesigen Akad. d. Wissensch. gehaltenen Vorlesung.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 3. im vorigen Hefte.)

---

## Von Figuren, die durch rollende Bewegung erzeugt werden.

### *A.* Wenn eine gegebene Figur 𝔅 auf einer festen Geraden *G* rollt.

### §. XXVI.

Rollt ein beliebiges convexes Vieleck 𝔅, z. B. das Fünfeck *ABCDE* (Fig. 6.) auf einer festen Geraden *G*, bis es sich ganz umgedreht hat, — wobei seine Seiten alle nach- und nebeneinander auf die Gerade *G* zu liegen kommen und das Vieleck zuletzt wieder auf derselben Seite steht, wie anfangs, so dafs also die Strecke $AA_1$ seinem Umfange gleich ist, — so beschreibt jeder mit dem Vielecke fest verbunden-gedachte Punct *P* eine Linie $PP_1P_2P_3P_4P_5$, die aus so vielen Kreisbogen zusammengesetzt ist, als das Vieleck Seiten hat. Und zwar haben diese Kreisbogen $PP_1$, $P_1P_2$, .... $P_4P_5$ die Puncte $A$, $B_1$, $C_1$, .... $E_1$, in welchen die Ecken *A*, *B*, .... *E* des Vielecks 𝔅 auf die Gerade *G* treffen, zu Mittelpuncten, die Strahlen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, welche den Punct *P* mit den Ecken *A*, *B*, *C*, .... des Vielecks verbinden, zu Radien, und zu Centriwinkeln die Nebenwinkel *A*, *B*, *C*, *D*, *E* der an diesen Ecken gelegenen Winkel des Vielecks. Die Linie $PP_1P_2$ .... $P_5$ und die drei Geraden $AP$, $AA_1$ und $A_1P_5$ begrenzen eine Figur $APP_1$ .... $P_5A_1$, welche als aus folgenden Theilen zusammengesetzt betrachtet werden kann: 1) Aus einer Reihe von (*n*) Dreiecken $AP_1B_1$, $B_1P_2C_1$, .... $E_1P_5A_1$, welche beziehlich den Dreiecken *APB*, *BPC*, .... *EPA* gleich sind, in die das gegebene Vieleck 𝔅 durch die Strahlen *a*, *b*, .... *e* zerfällt wird, so dafs die Inhaltssumme jener Dreiecke dem Inhalte dieses Vielecks gleich ist; und 2) aus einer gleichen Anzahl von Kreissectoren, deren Mittelpuncte, Radien und Centriwinkel bereits näher angegeben worden sind. Diese Figur $APP_1P_2$ .... $P_5A_1$ soll fortan „*von dem Puncte P beschrieben*" heifsen. Bezeichnen wir sie

oder ihren Inhalt mit $W$, so erhellet aus dem Gesagten, dafs:

63. $W = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}a^2A + \frac{1}{2}b^2B + \frac{1}{2}c^2C + \dots = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma(a^2A)$,

wobei $A, B, C, \dots$ die genannten Nebenwinkel des Vielecks $\mathfrak{V}$, in Zahlen ausgedrückt, sind.

Nach (§. VII.) läfst sich die vorstehende Gleichung in folgende umwandeln:

64. $W = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}a_1^2A + \frac{1}{2}b_1^2B + \frac{1}{2}c_1^2C + \dots + \frac{1}{2}s^2(A + B + C + \dots)$,
$= \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2A) + \frac{1}{2}s^2\Sigma(A)$,

wo $a_1, b_1, c_1, \dots s$ die Strahlen sind, welche einen in Rücksicht des Vielecks $\mathfrak{V}$ bestimmten eigenthümlichen Punct $S$ mit den Ecken $A, B, C, \dots$ desselben und mit dem Puncte $P$ verbinden.

Bemerkt man, dafs nach (§. XVII. 32.):

65. $\Sigma(A) = A + B + C + \dots = 2\pi$,

so folgt (64):

66. $W = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2A) + \pi s^2$,

und daher für den Inhalt $w$ der von dem Puncte $S$ beschriebenen Figur, für welchen $s = 0$ ist:

67. $w = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2A)$,

woraus in Verbindung mit (66) endlich folgt:

68. $W = w + \pi s^2$.

Aus allem zusammen ergeben sich folgende Sätze:

a) „*Rollt ein beliebiges convexes Vieleck $\mathfrak{V}$ in einer Ebene auf einer festen Geraden G, bis es sich ganz umgedreht hat, so giebt es einen eigenthümlichen Punct S, der unter allen mit dem Vieleck fest verbundenen Puncten P die dem Inhalte nach kleinste Figur w beschreibt. Dieser ausgezeichnete Punct S ist der Schwerpunct der Ecken des gegebenen Vieleckes $\mathfrak{V}$, wenn denselben die respectiven Nebenwinkel des Vieleckes als Coefficienten zugeordnet werden.*"

b) „*Jeder andere Punct P beschreibt eine Figur, deren Inhalt W gerade um diejenige Kreisfläche gröfser ist als der Inhalt jener kleinsten Figur w, welche den Abstand s des Punctes P von S zum Radius hat.*"

So dafs also:

c) „*Alle Puncte P, welche in einer Kreislinie liegen, die S zum Mittelpuncte hat, Figuren W von gleichem Inhalte beschreiben; und auch umgekehrt: Je ein System von Puncten P, welche Figuren W von gleichem*

*Inhalte beschreiben, liegt in einem Kreise, dessen Mittelpunct der Schwerpunct $S$ ist."*

Dafs bei einem regelmäfsigen Vieleck $\mathfrak{B}$ der hier in Rede stehende Schwerpunct $S$ mit dem Mittelpuncte des Vielecks zusammenfallen mufs, ist einleuchtend. Auch in andern besondern Fällen läfst sich dieser Schwerpunct $S$ leicht angeben, oder geometrisch construiren, wie z. B. namentlich in dem Falle, wo die Nebenwinkel des Vielecks $\mathfrak{B}$ unter einander commensurabel sind. Beim Dreieck, Viereck etc. ergeben sich in dieser Hinsicht einige interessante specielle Sätze.

## §. XXVII.

Der Inhalt der Figur $W$ kann unter Beibehaltung seiner Bestandtheile auch in anderer Form oder durch eine andere Figur $\mathfrak{W}$ dargestellt werden, wobei es nicht nöthig ist, das Vieleck $\mathfrak{B}$ auf der Geraden $G$ rollen zu lassen. Nämlich die in der Figur $W$ vorkommenden Kreissectoren (Fig. 6.) können unmittelbar an das Vieleck $\mathfrak{B}$ angeschlossen und zwar in seinen Nebenwinkeln $A, B, C, \ldots$ beschrieben werden, wie z. B. in (Fig. 7.), wo die Kreisbogen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ .... aus den Ecken $A, B, C, \ldots$ mit den Radien $a, b, c, \ldots$ beschrieben sind. Auf diese Weise hat offenbar die Figur $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{W}$ gleichen Inhalt mit jener Figur $W$, welche der Punct $P$ beim Rollen des Vielecks $\mathfrak{B}$ auf der Geraden $G$ (Fig. 6.) beschreibt. Da die Kreissectoren sich auf zwei verschiedene Arten so an das Vieleck $\mathfrak{B}$ antragen lassen, dafs sie alle nach einer Richtung um dasselbe herumliegen (je nachdem man die Nebenwinkel des Vielecks durch Verlängerung der Seiten nach der einen oder andern Richtung hin entstehen läfst), so giebt es auf diese Weise zwei verschiedene Figuren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}_1$, die aber nothwendig gleichen Inhalt haben.

Hiernach ist klar, dafs die oben (§. XXVI.) für die Figuren $W$ und $w$ entwickelten Formeln und Sätze auf gleiche Weise auch für die Figuren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{w}$ Statt finden müssen, wo nämlich $\mathfrak{w}$ dem Schwerpuncte $S$ entspricht und mit $w$ gleichen Inhalt hat. Daher hat man:

$$69. \quad \mathfrak{W} - \mathfrak{B} = \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}\Sigma(a_1^2 A) + \pi s^2,$$

$$70. \quad \mathfrak{w} - \mathfrak{B} = \mathfrak{w}_1 - \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}\Sigma(a_1^2 A),$$

$$71. \quad \mathfrak{W} - \mathfrak{w} = \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{w}_1 = \pi s^2,$$

und daraus folgende Sätze:

*a) „Zieht man aus den Ecken $A, B, C, \ldots$ eines beliebigen convexen Vielecks* 𝔙 *nach irgend einem in seiner Ebene liegenden Puncte $P$ Strahlen $a, b, c, \ldots$ und beschreibt mit diesen, als Radien, in den respectiven Nebenwinkeln $A, B, C, \ldots$ des Vielecks* 𝔙 *Kreissectoren, so ist die Inhaltssumme* (𝔚—𝔙) *dieser Kreissectoren dann ein Minimum* (𝔴—𝔙), *wenn der Punct $P$ mit demjenigen Puncte $S$ zusammenfällt, welcher der Schwerpunct der Ecken des Vielecks* 𝔙 *ist, insofern denselben Coefficienten zugehören, die sich wie die respectiven Nebenwinkel verhalten."*

*b) „Für jeden andern Punct $P$ ist die Inhaltssumme* (𝔚—𝔙) *der Kreissectoren um diejenige Kreisfläche $\pi s^2$, welche den Abstand $s$ des Punctes $P$ von $S$ zum Radius hat, größer als die dem Schwerpuncte $S$ entsprechende Summe* (𝔴—𝔙)."

*c) Puncten $P$, die in einem Kreise liegen, dessen Mittelpunct $S$ ist, entsprechen gleiche Summen* (𝔚—𝔙) *der Kreissectoren, und umgekehrt: alle Puncte $P$, für welche die Inhaltssumme der Kreissectoren die nämliche ist, liegen in einem und demselben Kreise, dessen Mittelpunct $S$ ist."*

## §. XXVIII.

Läßt man das bisher betrachtete Vieleck 𝔙 in eine Curve 𝔙 übergehen, wie oben (§. XX.), so müssen die aufgestellten Gleichungen und Sätze (§ XXVI. und XXVII.) auch für diesen Grenzfall noch Statt finden. Die übrigen mit betrachteten Figuren $W$ und 𝔚 erhalten aber dadurch ebenfalls andere Formen, so wie der beschriebene Schwerpunct $S$ eine characteristische Eigenschaft. Nämlich es treten folgende Aenderungen ein.

1) Rollt die geschlossene und convexe Curve 𝔙 auf der Geraden $G$ (Fig. 6.), so ist die von jedem (mit der Curve 𝔙 fest verbundenen) Puncte $P$ beschriebene Linie $PP_1 \ldots P_n$, die früher aus Kreisbogen zusammengesetzt war, nun irgend eine bestimmte Curve $PP_n$ (oder besteht aus unendlich vielen unendlich kleinen Kreisbogen). Die von dem Puncte $P$ beschriebene Figur $W$ ist das von der Curve $PP_n$ und den drei Geraden $AP$, $P_nA_1$ und $AA_1$ eingeschlossene Viereck $APP_nA_1$, wo, wie früher, die beiden ersten Geraden $AP$ und $A_1P_n$ gleich und parallel und die dritte $AA_1$ dem Umfange der rollenden Curve 𝔙 gleich ist.

2) Nach der in (§. XXVII.) beschriebenen und in (Fig. 7.) dargestellten Construction der Figur $\mathfrak{W}$ folgt leicht, daſs für den gegenwärtigen Fall ihr Umfang in irgend eine bestimmte Curve $\mathfrak{W}$ übergeht. Denn da für diesen Fall die Nebenwinkel und die Seiten des Vielecks $\mathfrak{V}$ alle unendlich klein werden, und die letztern in die Tangenten der Curve $\mathfrak{V}$ übergehen, so werden also auch die Kreisbogen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, .... sowohl als die Strecken $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}$, .... alle unendlich klein, und daher müssen je drei auf einander folgende Puncte, wie z. B. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}$ unendlich nahe bei einander liegen, so daſs also die genannte Curve $\mathfrak{W}$ schlechthin als Ort der Puncte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, .... angesehen werden kann. D. h. wird auf jeder Tangente $A\mathfrak{A}$ der gegebenen Curve $\mathfrak{V}$ der ihrem Berührungspuncte $A$ entsprechende Strahl $AP = a$ abgetragen, wird $A\mathfrak{A} = a$ genommen, so ist der Ort des Endpunctes $\mathfrak{A}$ der Tangente irgend eine bestimmte Curve $\mathfrak{W}$, welche die früher betrachtete Figur $\mathfrak{W}$ repräsentirt. Der Strahl $a$ kann aber von dem Berührungspuncte $A$ aus nach zwei sich entgegengesetzten Richtungen hin auf der Tangente $A\mathfrak{A}$ abgetragen werden. Daher entstehen durch das angegebene Verfahren zwei Figuren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}_1$, welche zwar im Allgemeinen der Form nach von einander verschieden, aber stets von gleichem Inhalte sind, so daſs immer $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1$.

3) Da der eigenthümliche Punct $S$ beim Vieleck $\mathfrak{V}$ durch dessen Nebenwinkel $A$, $B$, $C$, .... bestimmt wird (§. XXVI.), diese Winkel aber bei der Curve $\mathfrak{V}$, — wo sie unendlich klein sind — sich verhalten, wie die respectiven Krümmungen dieser Curve, oder wie die umgekehrten Werthe der respectiven Krümmungshalbmesser (§. XXI.); so folgt (§. XIII.): *„daſs im gegenwärtigen Falle der eigenthümliche Punct $S$ der nämliche ist, welcher oben* (§. XXII.) *Krümmungs-Schwerpunct der Curve $\mathfrak{V}$ genannt wurde."*

Wenn gleich hier die Winkel $A$, $B$, $C$, .... einzeln alle unendlich klein werden, so bleibt doch offenbar ihre Summe die nämliche, wie früher (§. XXVI. 65.), also $\Sigma(A) = 2\pi$; und auch der Ausdruck $\frac{1}{2}s^2\Sigma(A)$ behält seinen frühern Werth $= \pi s^2$. Demnach finden für die eben beschriebenen Figuren $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $W$ ganz dieselben Gleichungen Statt, wie oben (§. XXVI. und XXVII.), nämlich:

72. $W = \mathfrak{W} = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma(a^2 A)$,

73. $W = \mathfrak{W} = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2 A) + \pi s^2$,

74. $w = \mathfrak{w} = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2 A)$,

$$75.\quad W = \mathfrak{W} = w + \pi s^2 = \mathfrak{w} + \pi s^2,$$

$$76.\quad \mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1,$$

$$77.\quad (\mathfrak{W} - \mathfrak{V}) = (\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{V}) = (\mathfrak{w} - \mathfrak{V}) + \pi s^2 = (\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{V}) + \pi s^2.$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit denjenigen in (§. XXIII.) — insofern für alle dieselbe Curve $\mathfrak{V}$ zu Grunde gelegt und bemerkt wird, dafs für unendlich kleine Winkel $\sin 2A = 2 \sin A = 2A$ und also $\Sigma(a^2 \sin 2A) = 2\Sigma(a^2 A)$ ist, — führt zu folgendem interessanten Resultate:

$$78.\quad W = \mathfrak{W} = 2V \quad \text{und} \quad \mathfrak{w} = w = 2v.$$

Aus allem diesem ergeben sich folgende Sätze:

*a)* „*Rollt eine beliebige geschlossene und überall convexe Curve $\mathfrak{V}$ in ihrer Ebene auf einer festen Geraden G, bis sie sich ganz umgedreht hat, so beschreibt jeder mit ihr fest verbunden gedachte Punct P eine Figur W (gemischtliniges Viereck), deren Inhalt von der Lage des Punctes P abhängt. Die vom Krümmungs-Schwerpuncte S der gegebenen Curve $\mathfrak{V}$ beschriebene Figur hat unter allen den kleinsten Inhalt w. Für jeden andern Punct P ist der Inhalt der von ihm beschriebenen Figur W gröfser, als dieses Minimum w, und zwar um diejenige Kreisfläche $\pi s^2$ gröfser, welche den Abstand s des Punctes P vom Krümmungs-Schwerpuncte S zum Radius hat* (75) *Alle Puncte P also, die in einem um den Schwerpunct S gezogenen Kreise liegen, beschreiben Figuren W von gleichem Inhalte; und auch umgekehrt.*"

*b)* *Werden aus irgend einem Puncte P in der Ebene einer beliebigen geschlossenen und convexen Curve $\mathfrak{V}$ Strahlen a, b, c, .... nach allen Puncten A, B, C, .... der Curve gezogen, und wird aus jedem Puncte der zugehörige Strahl auf die anliegende Tangente der Curve (nach einerlei Richtung) abgetragen, so bilden die Endpuncte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, .... der Tangenten eine geschlossene Curve $\mathfrak{W}$. Unter allen Curven $\mathfrak{W}$, die auf solche Weise entstehen können, hat diejenige den kleinsten Inhalt $\mathfrak{w}$, welche dem Krümmungs-Schwerpuncte S der gegebenen Curve entspricht. Für jeden andern Punct P hat die entstehende Curve einen Inhalt $\mathfrak{W}$, der jenes Minimum $\mathfrak{w}$ um diejenige Kreisfläche $\pi s^2$ übertrifft, welche den Abstand s des Puncts P vom Schwerpuncte S zum Radius hat. Also entsprechen Puncten P, die in einem um S (als Mittelpunct) gezogenen Kreise liegen, Curven $\mathfrak{W}$ von gleichem Inhalte; und auch umgekehrt.*"
Ferner: „*Je nachdem die Strahlen a, b, c, .... in der einen oder der*

*andern Richtung auf die Tangenten der Curve $\mathfrak{V}$ abgetragen werden, entstehen für den nämlichen Punct P (S) zwei verschiedene Curven $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}_1$ ($\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}_1$), welche aber gleichen Inhalt haben* (76)." Und weiter: *„die Räume ($\mathfrak{W}-\mathfrak{V}$), ($\mathfrak{W}_1-\mathfrak{V}$), welche die Curven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}_1$ zwischen sich abschliefsen, sind für jeden Punct P einander gleich, und bleiben für alle Puncte P, die in gleicher Entfernung s vom Krümmungs-Schwerpuncte S liegen, constant. Diese Räume haben den kleinsten Inhalt ($\mathfrak{w}-\mathfrak{V}$, $\mathfrak{w}_1-\mathfrak{V}$), wenn sie dem Puncte S entsprechen; für jeden anderen Punct P sind sie um die Kreisfläche $\pi s^2$, welche den Abstand PS = s zum Radius hat, gröfser als jenes Minimum* ($\mathfrak{w}-\mathfrak{V}$) (77).

*c) Betrachtet man dieselbe Curve $\mathfrak{V}$ und denselben Punct P in Rücksicht auf beide vorigen Sätze (a) und (b), so hat die vom Puncte P nach dem Satze (a) beschriebene Figur W mit der ihm im Sinne des Satzes (b) entsprechenden Figur $\mathfrak{W}$ oder $\mathfrak{W}_1$ stets gleichen Inhalt, so dafs immer $W=\mathfrak{W}=\mathfrak{W}_1$*." Und ferner:

*d) „Jede von den beiden Figuren W oder $\mathfrak{W}$ hat gerade doppelt so grofsen Inhalt, als die demselben Puncte P in Bezug auf dieselbe gegebene Curve $\mathfrak{V}$ entsprechende Fufspuncten-Curve V* (78)." Oder ausführlicher:

*α. Rollt die gegebene Curve $\mathfrak{V}$ auf einer festen Geraden G, so beschreibt jeder mit ihr fest verbunden gedachte Punct P eine Figur W, deren Inhalt gerade doppelt so grofs ist, als derjenige der Fufspuncten-Curve V, die dem nämlichen Puncte P in Bezug auf die nämliche gegebene Curve $\mathfrak{V}$ entspricht"*; und:

*β. Bewegt sich ein veränderliches gleichschenkliges Dreieck $PA\mathfrak{A}$ unter der Bedingung, dafs seine Spitze A die gegebene Curve $\mathfrak{V}$ durchläuft, und dafs sein einer Schenkel $A\mathfrak{A}$ diese Curve $\mathfrak{V}$ stets in jener Spitze A tangirt, während die dem Schenkel $A\mathfrak{A}$ gegenüberliegende Ecke in einem und demselben Puncte P fest bleibt, so beschreiben die dritte Ecke $\mathfrak{A}$ des Dreieckes und der Fufspunct $A_1$ des aus der festen Ecke P auf den Schenkel $A\mathfrak{A}$ gefällten Perpendikels zwei Curven $\mathfrak{W}$ und V, von denen die erste $\mathfrak{W}$ jedesmal doppelt so grofsen Inhalt hat, als die zweite V."*

## §. XXIX.
## Besondere Fälle.

Die vorstehenden allgemeinen Resultate, — bei welchen die gegebene Curve $\mathfrak{V}$, mit Ausnahme der Bedingung geschlossen und überall convex zu sein, eine ganz beliebige, ihre Gleichung z. B. algebraisch oder transcendent sein kann, und wobei eben so die Gleichungen der erzeugten Curven $V$, $W$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}_1$ nicht in Betracht kommen, die, wie leicht zu ermessen, sowohl von der Gleichung der gegebenen Curve $\mathfrak{V}$, als unter sich sehr verschieden sein können, — umfassen unter andern folgende sehr specielle Sätze:

α. Wenn die gegebene Curve $\mathfrak{V}$ ein Kreis ist.

Rollt der Kreis $\mathfrak{V}$, dessen Radius $= r$, auf der festen Geraden $G$, so beschreibt jeder mit ihm verbundene Punct $P$ eine gewöhnliche Cykloide $W$, — eine gemeine, gestreckte oder verkürzte, je nachdem beziehlich $P$ auf der Kreislinie innerhalb oder aufserhalb derselben liegt, — und zufolge (§. XXVIII. 78. u. §. XXIV. 50.) ist:

$$79. \quad W = 2\pi r^2 + \pi s^2,$$

d. h. „*der Inhalt jeder gewöhnlichen Cykloide $W$ ist so grofs, als die Summe der doppelten Fläche des Erzeugungskreises $\mathfrak{V}$ und der Fläche desjenigen Kreises, der mit jenem concentrisch ist und durch den beschreibenden Punct $P$ geht.*"

Ist insbesondere $s = r$, oder liegt der beschreibende Punct $P$ auf der Kreislinie $\mathfrak{V}$, so ist:

$$80. \quad W_1 = 3\pi r^2,$$

d. h. „*der Inhalt der gemeinen Cykloide ist dreimal so grofs, als die Fläche des Erzeugungskreises;*" ein allgemein bekannter Satz.

Wenn ferner $s = 0$, also wenn $P$ mit dem Mittelpuncte $S$ des Kreises $\mathfrak{V}$ zusammenfällt, so ist:

$$81. \quad w = 2\pi r^2;$$

was auch daraus erhellt, dafs in diesem Falle $w$ ein Rechteck ist, dessen Seiten beziehlich dem Radius $r$ und dem Umfange $2\pi r$ des Erzeugungskreises $\mathfrak{V}$ gleich sind.

Diesen drei Fällen entsprechend hat man (§. XXVIII.):

$$82. \quad \mathfrak{W} = 2\pi r^2 + \pi s^2,$$

$$83. \quad \mathfrak{W}_1 = 3\pi r^2,$$

$$84. \quad \mathfrak{w} = 2\pi r^2,$$

d. h. „*den nämlichen Inhalt, wie die dem Puncte $P$ entsprechende Cykloide $W$, hat diejenige Curve $\mathfrak{W}$, welche der Ort des Endpunctes $\mathfrak{A}$ aller Tangenten $A\mathfrak{A}$ des Erzeugungskreises $\mathfrak{B}$ ist, wenn auf jeder derselben der aus ihrem Berührungspuncte $A$ nach dem festen Pole $P$ gehende Strahl $PA = a$ abgetragen wird.*"

Die Curve $\mathfrak{w}$ ist hier ein mit dem gegebenen $\mathfrak{B}$ concentrischer Kreis, dessen Radius $= r\sqrt{2}$; was leicht zu sehen ist.

Auch der Inhalt der Ringe, die zwischen der Curve $\mathfrak{W}$ und dem Kreise $\mathfrak{B}$ liegen, läfst sich hier genau angeben, nämlich er ist:

85. $\mathfrak{W}-\mathfrak{B} = \pi r^2 + \pi s^2$; $\mathfrak{W}^1 - \mathfrak{B} = 2r^2\pi$; $\mathfrak{w} - \mathfrak{B} = \pi r^2$.

Im zweiten Falle $\mathfrak{W}^1 - \mathfrak{B}$, findet kein eigentlicher Ring Statt, sondern ein sichelförmiger Raum (Mond), dessen Spitzen jedoch im Puncte $P$ an einander stofsen.

Anmerkung. Bei der verkürzten Cykloide entsteht, wenn z. B. der Punct $P$ in dem durch den anfänglichen Berührungspunct $A$ gehenden Durchmesser des Kreises $\mathfrak{B}$ und oberhalb dieses letztern und der Basis $G$ liegt, wie (Fig. 8.), eine Schleife $QQ_1$, indem die Cykloide im Puncte $Q$ sich selbst schneidet. Alsdann besteht ihr Inhalt, d. i. $W$, aus den zwei Räumen:

$$APQP_1A_1A + QRQ_1TQ,$$

oder aus den drei Stücken:

$$APRA + A_1TP_1A_1 + RQ_1TR.$$

In allen analogen Fällen, die Curve $\mathfrak{B}$ mag sein, welche man will, ist der Inhalt der Figur $W$ auf gleiche Weise zu bestimmen.

Zieht man die Gerade $PP_1$, welche die Cykloide in den Puncten $P$ und $P_1$ berührt, so entsteht der Arbelos $PQP_1P$, dessen Inhalt mit dem der Schleife $QRQ_1TQ$ immer einen leicht angeblichen Unterschied macht. Nämlich dieser Unterschied ist stets demjenigen zwischen dem Rechtecke $APP_1A_1A$ und der Figur $W$ gleich. Oder wird $BP = x$, also $s = r + x$ gesetzt, so ist:

$$\text{Arbel.}(PQP_1P) - \text{Schleife}(QRQ_1TQ) = APP_1A_1A - W = \pi(2rs - s^2)$$
$$= \pi(r^2 - x^2),$$

d. h. „*der Unterschied zwischen dem Inhalt des Arbelos $PQP_1$ und dem der Schleife $QQ_1$ ist auch gleich dem Unterschiede zwischen der Fläche des rollenden Kreises und der Fläche desjenigen Kreises, dessen Radius $x = s - r$ ist.*"

Ist also $x = r$, d. h. $s = 2r$, so ist auch $PQP_1 = QQ_1$ oder: der Arbelos hat gerade gleichen Inhalt mit der Schleife.

$\beta$. Wenn die gegebene Curve $\mathfrak{B}$ eine Ellipse ist.

Aus (§. XXVIII. 78. u. §. XXIV. 55.) folgt

$$86. \quad W = \pi(a^2 + b^2 + s^2);$$

d. h. *„rollt eine Ellipse $\mathfrak{B}$ in ihrer Ebene auf der festen Geraden G, bis sie sich ganz umgedreht hat, so beschreibt jeder mit ihr fest verbundene Punct P eine Figur W, deren Inhalt gleich ist der Summe dreier Kreisflächen, welche beziehlich die halben Axen a und b der Ellipse und den Abstand s des Punctes P von ihrem Mittelpuncte S zu Radien haben."*

Liegt insbesondere der beschreibende Punct $P^1$ in der mit der Ellipse concentrischen und durch ihre Brennpuncte gehenden Kreislinie, ist also $s^2 = a^2 - b^2$, so ist

$$87. \quad W^1 = 2\pi a^2;$$

d. h. *„der Inhalt der von dem Puncte $P^1$ beschriebenen Figur $W^1$ ist gerade doppelt so grofs, als die Kreisfläche, welche die grofse Axe 2a der Ellipse $\mathfrak{B}$ zum Durchmesser hat."*

Dem Mittelpuncte $S$ der Ellipse entspricht

$$88. \quad w = \pi(a^2 + b^2) = 2\pi g^2;$$

d. h. *„die von dem Mittelpuncte S der Ellipse beschriebene Figur hat einen Inhalt w, der so grofs ist, als die Summe zweier Kreisflächen, welche die Axen der Ellipse $\mathfrak{B}$ zu Durchmessern haben; oder doppelt so grofs, als die Kreisfläche, welche einen der gleichen conjugirten Durchmesser der Ellipse zum Durchmesser hat.* (§. XXIV. *B.*)

Die vorstehenden drei Formeln (86., 87. u. 88.) stellen zugleich auch die Inhalte der respective entsprechenden Curven $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}^1$, $\mathfrak{w}$ dar, eben so wie oben beim Kreise ($\alpha$.). Für die zwischen diesen Curven und der Ellipse $\mathfrak{B}$ liegenden Räume oder Ringe hat man:

$$89. \quad \mathfrak{W} - \mathfrak{B} = \pi(a^2 + b^2 - ab - s^2); \quad \mathfrak{W}^1 - \mathfrak{B} = a\pi(2a - b);$$
$$\mathfrak{w} - \mathfrak{B} = \pi(a^2 + b^2 - ab).$$

*B.* Wenn eine Figur $\mathfrak{B}$ auf einer andern festen Figur $\mathfrak{U}$ rollt.

## §. XXX.

Wenn in einer Ebene ein beliebiges convexes Vieleck $\mathfrak{B}$, z. B. *ABCD* (Fig. 9.) auf der Aufsenseite eines andern festen convexen Viel-



ecks $\mathfrak{U} = \mathfrak{D}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1$ (welches auch blofs eine aus Geraden zusammengesetzte gebrochene Linie sein kann), mit welchem es nach der Reihe gleiche Seiten hat, so lange rollt (wobei je ein Paar gleiche Seiten auf einander zu liegen kommen), bis es wieder mit der nämlichen Seite ($DA$), wie anfangs, auf der Basis $\mathfrak{U}$ aufliegt, z. B. bis es in die Lage von $A_1B_1C_1D_1$ ($=ABCD$) gelangt: so beschreibt jeder mit dem rollenden Vielecke $\mathfrak{V}$ fest verbundene Punct $P$ irgend eine Figur $W = PP_1 \ldots. P_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}P$, welche (wie oben §. XXVI.) aus so vielen Dreiecken und aus so vielen Kreissectoren zusammengesetzt ist, als das rollende Vieleck $V$ Ecken hat. Die Dreiecke sind beziehlich denen gleich, in welche das Vieleck $\mathfrak{V}$ durch die aus seinen Ecken $A$, $B$, $C$, $D$ nach dem Puncte $P$ gezogenen Strahlen $a$, $b$, $c$, .... zerlegt wird; also ist ihre Summe gleich dem Inhalte dieses Vielecks $\mathfrak{V}$. Die Kreissectoren haben beziehlich die nämlichen Strahlen $a$, $b$, $c$, .... zu Radien, die Ecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, .... des Vielecks $\mathfrak{U}$ zu Mittelpuncten, und zu Centriwinkeln die Summen der entsprechenden Nebenwinkel beider Vielecke $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$. Werden also, wie früher, die Nebenwinkel des Vielecks $\mathfrak{V}$ durch $A$, $B$, $C$, ...., diejenigen des Vielecks $\mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, .... bezeichnet, so ist zufolge des Gesagten:

90. $$W = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}a^2(A+\mathfrak{A}) + \tfrac{1}{2}b^2(B+\mathfrak{B}) + \tfrac{1}{2}c^2(C+\mathfrak{C}) + \ldots. = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma[a^2(A+\mathfrak{A})].$$

Aus der Uebereinstimmung dieser Gleichung mit jener obigen (§. XXVI. 63.) erkennt man sogleich, dafs auch für die gegenwärtige Betrachtung analoge Gesetze Statt finden, wie dort. Nämlich: wird der Schwerpunct der Ecken $A$, $B$, $C$, .... des Vielecks $\mathfrak{V}$, wenn denselben die Coefficienten $(A+\mathfrak{A})$, $(B+\mathfrak{B})$, $(C+\mathfrak{C})$, .... zugeordnet sind, durch $\mathfrak{S}$ und werden seine Abstände von den Ecken $A$, $B$, $C$, .... des Vielecks $\mathfrak{V}$ und von dem Puncte $P$ beziehlich durch $a_1$, $b_1$, $c_1$, .... und $s$ bezeichnet, so läfst sich die vorstehende Gleichung (90) in folgende verwandeln (§. VII. u. XXVI.):

91. $$W = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma[a_1^2(A+\mathfrak{A})] + \tfrac{1}{2}s^2\Sigma(A+\mathfrak{A}),$$

oder, da nach (§. XXVI. 65.) $\Sigma(A) = 2\pi$ ist, so hat man, wenn $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\ldots. = \mathfrak{q}$ gesetzt wird,

92. $$W = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma[a_1^2(A+\mathfrak{A})] + \tfrac{1}{2}s^2(2\pi+\mathfrak{q}),$$

wobei $\mathfrak{q}$ in der Figur (9) dem Winkel $\mathfrak{M}\mathfrak{O}\mathfrak{N}$ gleich ist, unter welchem die auf die erste und die letzte Seite ($\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1$) von $\mathfrak{U}$ errichteten Perpendikel $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$ sich schneiden.

Für die von dem Schwerpuncte $\mathfrak{S}$ beschriebene Figur $w$ hat man demnach:

$$93.\quad w = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma[a_1^2(A+\mathfrak{A})],$$

und daher folgt weiter:

$$94.\quad W = w + \tfrac{1}{2}s^2(2\pi + \mathfrak{q}).$$

Diese Gleichung enthält folgenden Satz:

*„Wenn in einer Ebene ein beliebiges convexes Vieleck $\mathfrak{V}$ auf der Aufsenseite eines beliebigen festen convexen Vielecks $\mathfrak{U}$, mit dem es respective gleiche Seiten hat, so lange rollt, bis es wieder mit der anfänglichen Seite auf demselben aufliegt, so beschreibt jeder mit ihm fest verbundene Punct $P$ eine Figur $W$, deren Inhalt ein Minimum $= w$ wird, wenn der beschreibende Punct $P$ mit dem Schwerpuncte $\mathfrak{S}$ der Ecken des Vielecks $\mathfrak{V}$ zusammenfällt, insofern denselben die Summen der entsprechenden Nebenwinkel beider Vielecke $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$ als Coefficienten zugehören. Alle Puncte $P$, welche gleichweit von diesem Schwerpuncte $\mathfrak{S}$ abstehen, beschreiben Figuren $W$ von gleichem Inhalte, und auch umgekehrt; und zwar ist für jeden Punct $P$ der Inhalt $W$ gerade um denjenigen Kreissector, der den Abstand $s$ zwischen $P$ und $\mathfrak{S}$ zum Radius und die Summe $(2\pi + \mathfrak{q})$ aller jener Nebenwinkel zum Centriwinkel hat, gröfser als jenes genannte Minimum $w$."*

## §. XXXI.

Vornehmlich zum Behufe späterer Betrachtungen mag über das Vorstehende noch Folgendes bemerkt werden:

Es ist klar, dafs der Schwerpunct $\mathfrak{S}$ sowohl direct, als auf folgendem Wege gefunden werden kann. Man suche für die Ecken $A, B, C, \ldots$ des Vielecks $\mathfrak{V}$ zwei Schwerpuncte $S$ und $S_1$, indem man für den ersten $S$ die Nebenwinkel des Vielecks $\mathfrak{V}$ selbst, für den zweiten $S_1$ die respectiven Nebenwinkel $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ des Vielecks $\mathfrak{U}$ als zugehörige Coefficienten ansieht. Nimmt man alsdann in der Geraden $SS_1$ denjenigen Punct $\mathfrak{S}$, der sie so theilt, dafs:

$$95.\quad S\mathfrak{S} : S_1\mathfrak{S} = \mathfrak{q} : 2\pi,$$

so ist derselbe offenbar der verlangte Schwerpunct $\mathfrak{S}$. — Sind insbesondere die Nebenwinkel eines jeden Vielecks unter sich gleich, so fallen die drei Puncte $S$, $S_1$ und $\mathfrak{S}$ zusammen. Dasselbe kann aber auch unter andern Bedingungen eintreffen.

Ferner kann der Inhalt der Figur $W$ unter anderer Form, nämlich durch zwei Figuren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{T}$ dargestellt werden. Denn wird der obige Ausdruck für $W$ wie folgt zerlegt (90):

$$96.\quad W = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma(a^2 A) + \tfrac{1}{2}\Sigma(a^2\mathfrak{A}) = \mathfrak{W} + \mathfrak{T},$$

und einzeln gesetzt:

$$97.\quad \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma(a^2 A) = \mathfrak{W}; \quad \tfrac{1}{2}\Sigma(a^2\mathfrak{A}) = \mathfrak{T},$$

so kann man sich unter $\mathfrak{W}$ die nämliche Figur denken, welche bereits oben (§. XXVII.) construirt worden; $\mathfrak{T}$ aber soll diejenige Figur sein, welche durch die gesammten Kreissectoren gebildet wird, die in den Nebenwinkeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, .... des Vielecks $\mathfrak{U}$ mit den Strahlen $a$, $b$, $c$, .... als Radien und zwar unter der Bedingung beschrieben werden, dafs alle Sectoren nach einerlei Richtung hin liegen; was wie bei $\mathfrak{W}$, auf zwei verschiedene Arten geschehen kann.

Ueber den Inhalt der Figur $\mathfrak{W}$ sind die wesentlichsten Relationen am genannten Orte aufgestellt; nämlich er wird ein Minimum $= \mathfrak{w}$, wenn sie dem Schwerpuncte $S$ entspricht; aufserdem ist für jeden andern Punct $P$:

$$98.\quad \mathfrak{W} = \mathfrak{w} + \pi s^2,$$

wo $s$ den Abstand des Puncts $P$ von $S$ bezeichnet.

Wird die Figur $\mathfrak{T}$ für sich betrachtet, so folgt ähnlicherweise, dafs ihr Inhalt dann ein Minimum $= \mathfrak{t}$ wird, wenn sie dem oben genannten Schwerpuncte $S_1$ entspricht, und dafs für jeden andern Punct $P$

$$99.\quad \mathfrak{T} = \mathfrak{t} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}.s_1^2$$

ist, wo $s_1 = PS_1$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \ldots$, (§. XXX.).

Demnach hat man (96):

$$100.\quad W = \mathfrak{W} + \mathfrak{T} = \mathfrak{w} + \pi s^2 + \mathfrak{t} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}.s_1^2.$$

Die Formel (99) enthält folgenden Satz:

*„Der Inhalt der Figur $\mathfrak{T}$ ist dann ein Minimum $= \mathfrak{t}$, wenn sie dem Schwerpuncte $S_1$ entspricht; beliebigen Puncten $P$, welche gleichweit vom Schwerpuncte $S_1$ abstehen, entsprechen Figuren $\mathfrak{T}$ von gleichem Inhalte, und auch umgekehrt; und zwar ist der jedesmalige Inhalt gerade um denjenigen Kreissector gröfser als jenes Minimum $\mathfrak{t}$, welcher den Abstand $s_1$ der Puncte $P$ von $S_1$ zum Radius und den constanten Winkel $\mathfrak{q}$ zum Centriwinkel hat."*

## §. XXXII.

Bleiben alle Voraussetzungen über die Vielecke $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$ die nämlichen, wie oben (§. XXX.), nur dafs $\mathfrak{V}$, statt auf der Aufsenseite, jetzt auf der innern, concaven Seite von $\mathfrak{U}$ rollen soll; so sind dabei im Allgemeinen drei Fälle zu unterscheiden, nämlich entweder sind:

$\alpha$) Die Nebenwinkel $A, B, C, \ldots$ des Vielecks $\mathfrak{V}$ alle gröfser, als die ihnen entsprechenden Nebenwinkel $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ von $\mathfrak{U}$; oder:

$\beta$) die erstern alle kleiner als die letztern; oder endlich

$\gamma$) die Nebenwinkel $A, B, C, \ldots$ von $\mathfrak{V}$ theils kleiner, theils gröfser (oder theils, wenn man will, auch gleich) als die Nebenwinkel $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ von $\mathfrak{U}$.

Im ersten Fall — der am leichtesten darzustellen ist und am meisten mit dem früheren übereinstimmt, daher hier auch allein berücksichtigt werden soll — beschreibt jeder mit dem Vieleck $\mathfrak{V}$ fest verbundene Punct $P$ irgend eine Figur $W$, welche auf analoge Weise, wie oben, aus Dreiecken, deren Summe $= \mathfrak{V}$ ist, und aus Kreissectoren besteht, deren Radien $a, b, c, \ldots$, deren Centriwinkel dagegen $A-\mathfrak{A}$, $B-\mathfrak{B}$, $C-\mathfrak{C}, \ldots$ sind; so dafs also hier:

101. $W = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma[a^2(A-\mathfrak{A})] = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma(a^2 A) - \frac{1}{2}\Sigma(a^2\mathfrak{A}) = \mathfrak{W} - \mathfrak{T}$,

102. $W = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma[a_1^2(A-\mathfrak{A})] + \frac{1}{2}s^2(2\pi - \mathfrak{q})$,

103. $w = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Sigma[a_1^2(A-\mathfrak{A})]$,

104. $W = w + \frac{1}{2}s^2(2\pi - \mathfrak{q})$,

105. $\begin{cases} \mathfrak{W} = \mathfrak{w} + \pi s^2, \\ \mathfrak{T} = \mathfrak{t} + \frac{1}{2}\mathfrak{q}\, s_1^2, \end{cases}$

106. $W = \mathfrak{w} + \pi s^2 - \mathfrak{t} - \frac{1}{2}\mathfrak{q}\, s_1^2$,

wobei $w$ und die Strahlen $a_1$ (d. i. $a_1, b_1, c_1, \ldots$) sich auf den Punct $\mathfrak{S}$, dagegen $\mathfrak{w}$ und $s$, $\mathfrak{t}$ und $s_1$ auf die Puncte $S$, $S_1$ beziehen, und die drei Puncte $S$, $S_1$ und $\mathfrak{S}$ die Schwerpuncte der Ecken $A, B, C, \ldots$ des Vielecks $\mathfrak{V}$ sind, wenn ihnen beziehlich die Winkel 1) $A, B, C, \ldots$, 2) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ und 3) $A-\mathfrak{A}$, $B-\mathfrak{B}$, $C-\mathfrak{C}, \ldots$ als Coefficienten zugehören. — Der gegenwärtige Schwerpunct $\mathfrak{S}$ ist hiernach von dem obigen gleichnamigen (§. XXX.) im Allgemeinen wesentlich verschieden. Aus den vorstehenden Gleichungen folgen übrigens analoge Sätze wie dort.

## §. XXXIII.

Läfst man die der bisherigen Betrachtung zu Grunde liegenden Vielecke $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$ in Curven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$ übergehen, wobei jedoch vorläufig $\mathfrak{V}$ geschlossen und stetig convex, dagegen $\mathfrak{U}$ nur längs des Bogens $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ (Fig. 10.), so weit jene auf ihr rollt, stetig convex sein soll: so bleiben die obigen Gleichungen offenbar auch noch für den gegenwärtigen Fall gültig, so dafs man also auch für diese Curven unmittelbar hat (§. XXX. und XXXI.):

$$107.\quad W = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma[a^2(A+\mathfrak{A})] = \mathfrak{W} + \mathfrak{T},$$

$$108.\quad W = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma[a_1^2(A+\mathfrak{A})] + \tfrac{1}{2}s^2(2\pi + q),$$

$$109.\quad w = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma[a_1^2(A+\mathfrak{A})],$$

$$110.\quad W = w + \tfrac{1}{2}s^2(2\pi + q),$$

$$111.\quad \begin{cases} \mathfrak{W} = \mathfrak{w} + \pi s^2, \\ \mathfrak{T} = \mathfrak{t} + \tfrac{1}{2}q s_1^2, \end{cases}$$

$$112.\quad W = \mathfrak{w} + \pi s^2 + \mathfrak{t} + \tfrac{1}{2}q s_1^2.$$

Der Weg jedes mit der Curve $\mathfrak{V}$ verbundenen Punctes $P$ — der früher aus einer Reihe Kreisbogen bestand — wird hier irgend eine Curve $PP_1$, so dafs die von $P$ beschriebene Figur $W$ von zwei gleichen Geraden $P\mathfrak{A}$, $P_1\mathfrak{A}_1$ und zwei Curven $PP_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ begrenzt wird, wovon die letztere, als Basis, allen Figuren $W$ gemein und gleich dem Umfange der Curve $\mathfrak{V}$ ist.

Der eigenthümliche Punct $\mathfrak{S}$, welchem die Figur $w$ vom kleinsten Inhalte entspricht, behält seine frühere Eigenschaft: nämlich er ist der Schwerpunct der Curve $\mathfrak{V}$, wenn ihren einzelnen Puncten Coefficienten zugeordnet sind, die sich verhalten wie die Summen der unendlich kleinen Winkel, welche die Curven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$ in den correspondirenden Puncten mit der Tangente bilden, oder wie die Summen der correspondirenden Krümmungen beider Curven (vergl. §. XXVIII. u. XXX.). Oder nach (§. XXXI.) kann der Punct $\mathfrak{S}$ wie folgt gefunden werden. Nämlich von den zwei Puncten $S$ und $S_1$, welche dort zu Hülfe genommen worden, ist hier der erste, $S$, der Krümmungs-Schwerpunct der Curve $\mathfrak{V}$ (§. XXII.); der andere, $S_1$, ist Schwerpunct derselben, wenn ihren einzelnen Puncten Coefficienten gegeben werden, die sich verkehrt verhalten wie die Krümmungsradien der Basis $\mathfrak{U}$ in den correspondirenden Puncten. Der Punct $\mathfrak{S}$ ist alsdann der Schwerpunct der Puncte $S$ und $S_1$, insofern diesen be-

ziehlich die Coefficienten $2\pi$ und $\mathfrak{q}$ zugeordnet werden, so dafs also $\mathfrak{S}$, wie früher, durch die Gleichung:

$$S\mathfrak{S} : S_1\mathfrak{S} = \mathfrak{q} : 2\pi$$

gefunden wird, wo jetzt $\mathfrak{q}$ der Winkel ist, unter welchem die Normalen $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{Q}$ der Basis $\mathfrak{U}$, in den Endpuncten des von $\mathfrak{B}$ überrollten Bogens sich schneiden (§. XXX.).

Die Figur $\mathfrak{W}$ ist die nämliche, welche bereits in (§. XXVIII.) näher beschrieben worden. Die Figur $\mathfrak{T}$ entsteht zufolge (§. XXXI.) dadurch, dafs der veränderliche Strahl $PA = a$ (d. h. jede Gerade aus dem festen Pole $P$ nach irgend einem Puncte $A$ der Curve $\mathfrak{B}$) auf der Tangente $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ im correspondirenden Puncte $\mathfrak{A}$ der Basis $\mathfrak{U}$ nach constanter Richtung abgetragen, also $\mathfrak{A}\mathfrak{P} = a$ genommen wird; wo dann dieses begrenzte Stück der Tangente die Fläche der Figur $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ beschreibt, welche somit von zwei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1$ und zwei Curven $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ begrenzt wird, von welchen die letztere der Ort des Endpuncts der Tangente ist. Durch $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{t}$ sind die kleinsten Inhalte der Figuren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{T}$ bezeichnet, die statt finden, wenn diese beziehlich den Schwerpuncten $S$ und $S_1$ entsprechen. Endlich sind $s$ und $s_1$ die Entfernungen des Punctes $P$ von den Schwerpuncten $S$ und $S_1$.

Die obigen Gleichungen enthalten hiernach, unter andern, folgenden Satz:

*„Wenn in einer Ebene eine geschlossene, stetig convexe Curve $\mathfrak{B}$ auf einer beliebigen festen convexen Curve $\mathfrak{U}$ rollt, bis sie wieder mit dem anfänglichen Puncte (A) auf dieser aufliegt, so beschreibt jeder mit ihr verbundene Punct P irgend eine Figur W, deren Inhalt dann ein Minimum $= \mathfrak{w}$ wird, wenn der beschreibende Punct der oben genannte Schwerpunct $\mathfrak{S}$ der Curve $\mathfrak{B}$ ist. Puncte P, welche von diesem Schwerpuncte $\mathfrak{S}$ gleich weit abstehen, beschreiben Figuren W von gleichem Inhalte, und auch umgekehrt; und zwar übertrifft dieser Inhalt jenes Minimum $\mathfrak{w}$ jedesmal gerade um den Kreissector, welcher den Abstand $e$ des Puncts P von $\mathfrak{S}$ zum Radius und den constanten Winkel $2\pi + \mathfrak{q}$ zum Centriwinkel hat (110)."*

Ueber die Figur $\mathfrak{T}$ wird im Folgenden ein allgemeiner Satz aufgestellt werden.

Anmerkung. Rollt die Curve $\mathfrak{B}$ auf der concaven Seite der Basis $\mathfrak{U}$, und findet dabei der besondere Umstand Statt, dafs in je zwei

entsprechenden Puncten beider Curven, die erste 𝔅 gröfsere Krümmung hat, als die andere 𝔘, so erhält man analoge Gleichungen, wie vorhin, nämlich man hat nur in diesen —𝔄, —q, —𝔗, —t beziehlich statt +𝔄, +q, +𝔗, +t zu setzen, um jene zu erhalten (§. XXXII.). Auch wenn umgekehrt die Curve 𝔅 in jedem Puncte kleinere Krümmung hat, als die Basis 𝔘 im entsprechenden Puncte, lassen sich analoge Formeln aufstellen.

## §. XXXIV.

Die vorstehende Betrachtung (§. XXXIII.) kann dadurch verallgemeinert werden, dafs man die Bedingung: „die Curve 𝔅 solle geschlossen sein und so lange rollen, bis sie wieder mit dem anfänglichen Puncte auf der Basis 𝔘 aufliege" wegläfst und vielmehr annimmt, sie rolle um einen beliebigen Bogen, etwa um den Bogen $ACB$ = 𝔄ℭ𝔅 (Fig. 11.), dabei jedoch immer noch die Bedingung festhält: „dafs von den beiden Bogen, dem rollenden $AB$ und dem überrollten festen 𝔄𝔅, keiner einen singulären Punct habe." Unter diesen Umständen gelangt man in der That zu umfassenderen Resultaten und es sind dieselben durch das nämliche einfache und anschauliche Verfahren zu beweisen, wie die bisherigen.

Denn eben so, wie vorhin, folgt auch für den gegenwärtigen Fall, dafs die von irgend einem mit der rollenden Curve $AB$ (oder 𝔅) verbundenen Puncte $P$ beschriebene Figur $W = PP_1$𝔅ℭ𝔄$P$, ihrem Inhalte nach, gleich ist der Summe zweier anderen Figuren 𝔚 = $PA$𝔓𝔓$_1BP$ und 𝔗 = 𝔄𝔓𝔓$_1$𝔅ℭ𝔄, welche auf die früher angegebene Weise entstehen (§. XXVIII. und §. XXXIII.). Die Figur 𝔚 besteht aber selbst aus zwei anderen Figuren $F$ und $T$, von welchen die erste $F$ = Sector $PACBP$, und die andere $T = A$𝔓𝔓$_2BCA$, so dafs also

113. $W = F + T +$ 𝔗.

Für die Figuren $T$ und 𝔗, jede für sich betrachtet, hat man zunächst, gemäfs dem Früheren, nachstehende Formeln:

114. $T = \frac{1}{2}\Sigma(a^2A) = \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2A) + \frac{1}{2}qs^2$,

115. 𝔗 $= \frac{1}{2}\Sigma(a^2$𝔄$) = \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2$𝔄$) + \frac{1}{2}$q$s_1^2$,

116. $t = \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2A)$, und t $= \frac{1}{2}\Sigma(a_1^2$𝔄$)$,

117. $T = t + \frac{1}{2}qs^2$, und 𝔗 $=$ t $+ \frac{1}{2}$q$s_1^2$,

wobei $t$ und t die kleinsten Werthe von $T$ und 𝔗 bezeichnen, welche Statt finden, wenn der Pol $P$ beziehlich mit dem Schwerpuncte $S$ oder $S_1$ zusammenfällt, d. h. mit dem Krümmungs-Schwerpuncte $S$ des Bogens $AB$,

oder mit dem Schwerpuncte $S_1$ desselben Bogens, wofern die Gewichte seiner einzelnen Puncte sich verhalten, wie die Krümmungen des Bogens $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in den correspondirenden Puncten. Der Strahl $a_1$ repräsentirt die Abstände sowohl des Punctes $S$ als des Punctes $S_1$ von den verschiedenen Puncten des Bogens $AB$; $s$ und $s_1$ sind die Entfernungen des Punctes $P$ von $S$ und $S_1$; und endlich sind $q$ und $\mathfrak{q}$ die Winkel zwischen den Normalen $AQ$ und $BQ$, $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{Q}$ in den Endpuncten der Bogen $AB$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

In der Geraden $SS_1 = d$ nehme man den Punct $\mathfrak{S}$ so, dafs

$$S\mathfrak{S} : S_1\mathfrak{S} = \mathfrak{q} : q,$$

dafs also $\mathfrak{S}$ der Schwerpunct von $S$ und $S_1$ ist, wenn diesen die Coefficienten $q$ und $\mathfrak{q}$ zugehören, (oder der Schwerpunct des Bogens $AB$ in Rücksicht der Krümmungs-Summen beider Bogen $AB$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in ihren entsprechenden Puncten). Wird ferner $P\mathfrak{S} = \mathfrak{s}$ gesetzt, so hat man für die Summe beider Figuren $T$ und $\mathfrak{T}$:

118. $T+\mathfrak{T} = t+\mathfrak{t}+\frac{1}{2}qs^2+\frac{1}{2}\mathfrak{q}s_1^2 = t+\mathfrak{t}+\frac{1}{2}\frac{q\mathfrak{q}}{q+\mathfrak{q}}d^2+\frac{1}{2}(q+\mathfrak{q})\mathfrak{s}^2,$

119. $T_1+\mathfrak{T}_1 = t+\mathfrak{t}+\frac{1}{2}\frac{q\mathfrak{q}}{q+\mathfrak{q}}d^2,$

120. $T+\mathfrak{T} = T_1+\mathfrak{T}_1+\frac{1}{2}(q+\mathfrak{q})\mathfrak{s}^2,$

wo $T_1$ und $\mathfrak{T}_1$ die Stelle von $T$ und $\mathfrak{T}$ in dem Falle vertreten, wenn $P$ in den genannten Schwerpunct $\mathfrak{S}$ fällt, und in welchem Falle, wie man sieht, die Summe $T+\mathfrak{T}$ ein Minimum wird (120).

Nun kann ferner der Sector $F$ immer als Differenz (oder als Summe) zweier andern Figuren angesehen werden, nämlich des Segments $ACBDA = G$ und des Dreiecks $APB = \frac{1}{2}by$, dessen gegebene Grundlinie $AB = b$ und die veränderliche Höhe $PE = y$, so dafs also

$$F = G - \tfrac{1}{2}by.$$

Hierdurch und vermöge (120) geht die Formel (118) in folgende über:

121. $W = G + T_1 + \mathfrak{T}_1 + \frac{1}{2}(q+\mathfrak{q})\mathfrak{s}^2 - \frac{1}{2}by,$

wo rechts alle Gröfsen, aufser $\mathfrak{s}$ und $y$, constant sind. Diese zwei Veränderlichen lassen sich aber durch eine einzige ersetzen. Aus $\mathfrak{S}$ auf die Sehne $AB$ fälle man das Perpendikel $\mathfrak{S}D = p$, nehme in der Verlängerung desselben, hinter $\mathfrak{S}$, den Punct $R$ so, dafs

122. $\mathfrak{S}R = \frac{b}{2(q+\mathfrak{q})},$

so ist, wenn $PR = r$ gesetzt wird — (durch Hülfe des Perpendikels von $P$ auf $\mathfrak{S}D$): $r^2 - \mathfrak{s}^2 = (RD-y)^2 - (\mathfrak{S}D-y)^2$, und daraus folgt:



$$123. \quad \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})\varrho^2 - \tfrac{1}{2}b\gamma = \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})r^2 - \tfrac{1}{2}b\left(2p+\frac{b}{2(q+\mathfrak{q})}\right),$$

und mithin (121):

$$124. \quad W = G + T_1 + \mathfrak{T}_1 - \tfrac{1}{2}b\left(2p+\frac{b}{2(q+\mathfrak{q})}\right) + \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})r^2,$$

wo nunmehr rechts $r$ die einzige veränderliche Gröfse ist. Der Inhalt der Figur $W$ ändert sich demnach mit der Entfernung $r$ des beschreibenden Punctes $P$ von dem ausgezeichneten Puncte $R$ zugleich, und zwar ist seine Zu- oder Abnahme dem Quadrate dieser Entfernung proportional, so dafs $W$ ein Minimum wird, $= w$, wenn $r = 0$, d. h. wenn $P$ in $R$ fällt. Also ist:

$$125. \quad w = G + T_1 + \mathfrak{T}_1 - \tfrac{1}{2}b\left(2p+\frac{b}{2(q+\mathfrak{q})}\right), \text{ und}$$

$$126. \quad W = w + \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})r^2.$$

Die wesentlichsten Sätze aus dieser Betrachtung sind folgende:

*a.* „*Wenn in einer Ebene ein beliebiger, stetig convexer Curvenbogen AB auf der convexen Seite irgend eines anderen stetig convexen festen Curvenbogens* $\mathfrak{AB}$ *rollt, so beschreibt jeder mit der rollenden Curve fest verbundene Punct P irgend eine Figur W, deren Inhalt dann ein Minimum,* $= w$, *wird, wenn jener Punct der oben construirte besondere Punct R ist. Puncte P, welche gleich weit von diesem eigenthümlichen Puncte R entfernt sind, also in irgend einer um R beschriebenen Kreislinie liegen, erzeugen gleich grofse Figuren W, und auch umgekehrt; und zwar ist ihr Inhalt gerade um den Sector des genannten Kreises, dessen Centriwinkel* $= q + \mathfrak{q}$, *also constant ist, gröfser als jener kleinste Inhalt w* (126)."

*b.* 1) „*Bewegt sich eine veränderliche Tangente* $A\mathfrak{P}$ *an einem stetig convexen Curvenbogen ACB unter der Bedingung, dafs sie in jedem Augenblicke dem Strahle PA gleich ist, welcher ihren Berührungspunct (A) mit irgend einem festen Pole P in der Ebene der Curve verbindet, so beschreibt sie irgend eine Figur* $\mathfrak{T}$, *deren Inhalt dann ein Minimum,* $= t$, *wird, wenn jener Pol der Krümmungs-Schwerpunct S des gegebenen Bogens ACB ist. Polen P, welche in irgend einer um S beschriebenen Kreislinie liegen, entsprechen Figuren* $\mathfrak{T}$ *von gleichem Inhalte, der jedesmal gerade um einen Sector jenes Kreises, welcher den constanten Winkel q zum Centriwinkel hat, gröfser ist, als jener kleinste Inhalt t* (117)." Und

2) *„Ist außer dem Bogen AB noch irgend ein anderer stetig convexer Bogen 𝔄ℭ𝔅 von gleicher Länge gegeben, und bewegt sich an demselben die Tangente 𝔄𝔓 unter der Bedingung, daß sie stets dem Strahle AP gleich ist, welcher den ihrem Berührungspuncte correspondirenden Punct in der Curve AB mit dem festen Pole P verbindet: so beschreibt sie irgend eine Figur 𝔗, deren Inhalt ein Minimum wird, = t, wenn der Pol der oben bestimmte Schwerpunct $S_1$ des Bogens AB ist; liegt der Pol P in irgend einer um $S_1$ beschriebenen Kreislinie, so nimmt der Inhalt von 𝔗 gerade um einen Sector dieses Kreises, dessen Centriwinkel dem constanten Winkel 𝔮 gleich ist, zu* (117)."

3) *„Werden, für einen und denselben Pol P, die beiden Figuren T und 𝔗 zugleich betrachtet, so ist ihre Summe T + 𝔗 dann ein Minimum = $T_1$ + $𝔗_1$, wenn der Pol der Schwerpunct 𝔖 ist* (d. h. der Schwerpunct des Bogens *AB* in Rücksicht der Krümmungs-Summen beider Bogen *AB* und 𝔄𝔅 in den correspondirenden Puncten, oder der Schwerpunct der Puncte *S* und $S_1$ in Rücksicht der Coefficienten *q* und 𝔮). *Liegt aber der Pol P in einer Kreislinie, deren Mittelpunct 𝔖, so nimmt die Summe T + 𝔗 um einen Sector dieses Kreises zu, dessen Centriwinkel immer = q + 𝔮 ist* (120)."

Anmerkung 1. Die Tangente *A*𝔓 oder 𝔄𝔓 kann, vom Berührungspuncte aus, nach zwei entgegengesetzten Richtungen genommen werden, wodurch zugleich zwei verschiedene Figuren *T* und $T_1$, oder 𝔗 und $𝔗_1$ entstehen, aber jedesmal haben beide unter sich gleichen Inhalt, so daß immer $T = T_1$, oder $𝔗 = 𝔗_1$ (vergl. §. XXVIII.).

2. Der letzte Satz (*b*, 3.) findet ähnlicherweise statt, wenn außer dem Bogen 𝔄ℭ𝔅 noch mehrere andere Bogen $𝔄_1𝔅_1$, $𝔄_2𝔅_2$, .... unter denselben Bedingungen gegeben sind, denen dann ebenfalls Schwerpuncte $S_2$, $S_3$, ...., so wie Winkel $𝔮_1$, $𝔮_2$, .... und Figuren $𝔗_1$, $𝔗_2$, .... entsprechen. Nämlich eben so wird alsdann die Summe $T + 𝔗 + 𝔗_1 + 𝔗_2 + ....$ ein Minimum = *m*, wenn der Pol *P* in den Schwerpunct 𝔖 der Puncte *S*, $S_1$, $S_2$, $S_3$, .... fällt, wofern diesen die Coefficienten *q*, 𝔮, $𝔮_1$, $𝔮_2$, .... zugeordnet sind; und außerdem hat man für einen beliebigen Pol *P*, wenn $P𝔖 = r$ gesetzt wird, die Relation:

127. $$T + 𝔗 + 𝔗_1 + 𝔗_2 + .... = m + \tfrac{1}{2}(q + 𝔮 + 𝔮_1 + 𝔮_2 + ....)r^2.$$

Die Richtigkeit dieser Angaben folgt leicht aus (§. VII.).

3. Soll in Ansehung des obigen Satzes (*a*.), unter allen Puncten $P$, die in der rollenden Curve 𝔅 (wovon $ACB$ nur ein begrenztes Stück ist) selbst liegen, derjenige gefunden werden, welcher die kleinste oder gröfste Figur $W$ beschreibt, so ist klar, dafs derselbe nur der Fufspunct einer Normale sein kann, die aus dem eigenthümlichen Puncte $R$ auf die Curve 𝔅 gefället wird. Eben so verhält es sich, wenn der Punct $P$ in irgend einer anderen, in der Ebene der 𝔅 gegebenen Curve liegen soll. — Dasselbe kann auch über die Sätze (*b*.) bemerkt werden.

## §. XXXV.

Durch die vorstehende Betrachtung (§. XXXIV.) sind wir zu den allgemeinsten Resultaten gelangt. Denn nicht nur umfassen dieselben die meisten früheren als besondere Fälle, sondern es folgen daraus noch zahlreiche andere, specielle Sätze, wofern man nämlich in Rücksicht der gegebenen Elemente bestimmte Einschränkungen und Modificationen eintreten läfst *). Dahin gehört unter andern: dafs die Winkel $\varphi$ und $\mathfrak{q}$ bestimmte Werthe haben (wie z. B. wenn $\varphi = 2\pi$ und die Curve 𝔅 geschlossen, also die Sehne $AB = 0$ ist, wodurch man zu den Resultaten in §. XXXIII. gelangt): dafs die eine oder die andere gegebene Curve 𝔅 oder 𝔘 in eine Gerade übergeht: dafs ferner die eine oder die andere, oder dafs beide zugleich in bestimmte einfache Curven übergehen, etwa in Kreise, u. s. w.

Von solchen speciellen Sätzen mögen hier noch folgende Platz finden:

*I. Wenn die Basis 𝔄𝔅 eine Gerade wird und*

*1. ACB ein beliebiger Curvenbogen bleibt.*

In diesem Falle wird $\mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{T} = 0$ und $S_1$ verschwindet oder kommt nicht in Betracht, so dafs 𝔖 mit $S$ zusammenfällt. Daher wird der ausgezeichnete Punct $R$ gefunden, wenn man aus dem Krümmungs-Schwerpuncte $S$ des rollenden Bogens $AB$ auf die Sehne $AB$ das Perpendikel $SD$ fället und auf dessen Verlängerung, hinter $S$, den Punct $R$ so nimmt, dafs (122):

$$128. \quad RS = \frac{b}{2\varphi}.$$

*) Da man sich, in älterer und in neuerer Zeit, so vielfach mit Betrachtung der durch Rollen erzeugten Curven (*Roulettes*) beschäftigt hat, so dürfte es wohl auffallend scheinen, dafs das obige einfache und allgemeine Gesetz, dem die Quadratur je eines Systems solcher Curven unterworfen ist, so lange verborgen bleiben konnte.

Die obige Formel (126) reducirt sich hier auf folgende:

$$129. \quad W = w + \tfrac{1}{2}qr^2.$$

Das heifst:

*„Rollt ein stetig convexer Curvenbogen AB auf einer festen Geraden 𝔄𝔅, so beschreibt jeder mit ihm verbundene Punct P irgend eine Figur W, die am kleinsten wird, = w, wenn jener Punct der vorgenannte Punct R ist. Puncte P, welche in irgend einer um R beschriebenen Kreislinie liegen, erzeugen Figuren W, deren Inhalt gerade um einen Sector des Kreises, dessen Centriwinkel = q, gröfser als jener kleinste Inhalt w ist."*

Anmerkung. Da auch hier, eben so wie (§. XXI.), die Figur $W$ allemal gerade doppelt so grofs ist, als die dem nämlichen Puncte $P$ entsprechende Fufspuncten-Figur $V$ in Bezug auf den gegebenen Bogen $AB$, was sich gleicherweise zeigen läfst, so ist die Figur $V$ demselben Gesetze unterworfen, wie die Figur $W$, d. h. *„ihr Inhalt wird ein Minimum, = v, wenn sie dem ausgezeichneten Puncte R entspricht; für einen beliebigen andern Punct P, wenn PR = r gesetzt wird, ist*

$$130. \quad V = v + \tfrac{1}{4}qr^2,$$

*also die Inhalts-Zunahme gerade die Hälfte des Kreissectors, der r zum Radius und q zum Centriwinkel hat."*

2. *Wenn AB insbesondere ein Kreisbogen ist.*

Dann wird $Q$ der Mittelpunct des Kreises also $q$ der Centriwinkel über dem Bogen $AB$, und dann fällt der Krümmungs-Schwerpunct $S$ offenbar mit dem gewöhnlichen Schwerpuncte des Bogens $AB$ zusammen, so dafs sein Abstand vom Mittelpunct, wie bekannt:

$$131. \quad QS = \frac{b}{q}.$$

Diese Gerade $QS$ steht auf der Sehne $AB = b$ senkrecht; daher liegt auch der ausgezeichnete Punct $R$ in ihr, und seine Entfernung vom Mittelpuncte $Q$ ist (128 u. 131):

$$132. \quad QR = QS + SR = \frac{3b}{2q},$$

also: *„gleich der dreifachen Sehne dividirt durch den doppelten Centriwinkel."* Man erkennt daraus, dafs $R$ sowohl innerhalb als jenseits des Kreises liegen kann, nachdem nämlich $3b < 2qa$ oder $3b > 2qa$, wenn $a$

der Radius des Kreises ist. Ist $3b = 2qa = 2ACB$, also der Bogen gerade anderthalb mal so grofs, als die Sehne, so fällt $R$ in den Bogen $AB$ selbst und zwar in dessen Mitte.

Da $\mathfrak{T} = 0$ (1), so ist (113):

$$W = F + T,$$

und wenn $P$ im Mittelpuncte $Q$ des Kreises liegt, so ist

$$F = \tfrac{1}{2}qa^2, \quad \text{und (114)} \quad T = \tfrac{1}{2}qa^2,$$

daher ist für diesen besondern Fall (was auch unmittelbar folgt, da die von $Q$ beschriebene Figur $W_1$ ein Rechteck ist, dessen Seiten $a$ und $qa = ACB$ sind):

$$W_1 = qa^2,$$

und daher folgt für die von $R$ beschriebene kleinste Figur (129 u. 131):

133. $$w = qa^2 - \tfrac{1}{2}q\left(\frac{3b}{2q}\right)^2 = qa^2 - \frac{9}{8q}b^2 = a^2\left(q - \frac{9}{2q}\sin\tfrac{1}{2}q^2\right).$$

Für die von einem beliebigen Puncte $P$ beschriebene Figur folgt nunmehr (129):

134. $$W = qa^2 - \frac{9}{8q}b^2 + \tfrac{1}{2}qr^2.$$

Die Figuren $W$ und $w$ sind hier bestimmte Stücke von gewöhnlichen Cykloiden (gestreckte oder verkürzte), nämlich solche Stücke, welche von einem Cykloidenbogen $PP_1$, den beiden Normalen in seinen Endpuncten, $P\mathfrak{A}$ und $P_1\mathfrak{B}$, und der zwischen den letzteren liegenden (geradlinigen) Strecke $\mathfrak{AB}$ der Basis begrenzt werden. Die Formeln (134 und 133) geben die Quadratur dieser Stücke mittelst der gegebenen Elemente.

In dem oben genannten besonderen Falle, wo $3b = 2qa$ ist und $R$ in die Mitte des Bogens $AB$ fällt, besteht die kleinste Figur $w$ aus zwei einander gleichen Sectoren der sogenannten gemeinen Cykloide, und alsdann ist

$$W = \tfrac{1}{2}q(a^2 + r^2).$$

Insbesondere kann auch $w = 0$ werden, nämlich in dem Falle, wo $qa : b = 3 : \sqrt{8}$ (133), d. h. wo der Bogen $ACB$ sich zur Sehne $AB$ verhält, wie 3 zu $\sqrt{8}$. Alsdann ist $W = \tfrac{1}{2}qr^2$, und $R$ liegt jenseits des Kreises.

*II. Wenn ACB in eine Gerade übergeht und*

*1. die Basis $\mathfrak{AB}$ eine beliebige Curve bleibt.*

In diesem Falle ist offenbar $T = 0$, $G = 0$ und $q = 0$, und vermöge des Letzteren verschwindet der Punct $S$; daher vereinigt sich der Punct $\mathfrak{S}$ mit $S_1$, dieser aber liegt in der Geraden $AB$ selbst, nämlich er ist ihr Schwerpunct, wenn sie so schwer gedacht wird, dafs die Gewichte ihrer einzelnen Puncte sich verhalten, wie die Krümmungen der Basis $\mathfrak{AB}$ in den correspondirenden Puncten. Daher wird ferner der ausgezeichnete Punct $R$ erhalten, wenn man in dem Puncte $S_1$ auf die Gerade $AB = b$ ein Perpendikel errichtet (nach der Basis $\mathfrak{AB}$ hin), und in demselben $R$ so nimmt, dafs (122)

$$135. \quad S_1R = \frac{b}{2\mathfrak{q}} = \beta.$$

Hiernach reduciren sich die obigen Formeln (125 u. 126) — da auch $p = 0$, weil $S_1$ in $AB$ liegt — auf folgende:

$$136. \quad w = \mathfrak{t} - \tfrac{1}{4} b \frac{b}{2\mathfrak{q}} = \mathfrak{t} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}\beta^2,$$

$$137. \quad W = w + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}r^2 = \mathfrak{t} - \frac{1}{8\mathfrak{q}} b^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}r^2 = \mathfrak{t} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}(r^2 - \beta^2).$$

Also: „*Wälzt sich eine Gerade AB* (von dem einen Endpuncte $A$ bis zum andern $B$) *auf irgend einer festen, stetig convexen Curve $\mathfrak{AB}$, so beschreibt unter allen mit ihr fest verbundenen Puncten* (d. h. die ihre Lage gegen die Gerade $AB$, während diese sich bewegt, nicht ändern) *der besonders bestimmte Punct R die kleinste Figur w; die von irgend einem anderen Puncte P beschriebene Figur W ist jedesmal um den Kreissector, dessen Radius $r = PR$ und dessen Centriwinkel $\mathfrak{q}$* (= dem Winkel zwischen den Normalen in den Endpuncten der Basis $\mathfrak{AB}$), *gröfser, als jene.*"

Für den besonderen Fall, wo $r = \beta$ ist und somit der Punct $P$ in der mit dem Radius $\beta = RS_1$ um den Punct $R$ beschriebenen Kreislinie liegt, hat man (137):

$$138. \quad W_1 = \mathfrak{t};$$

und in der That fällt die von dem Puncte $S_1$ beschriebene Figur, welcher Punct in der Kreislinie liegt, mit der Figur $\mathfrak{t}$ zusammen.

Unter allen Puncten, welche in der Geraden $AB$ selbst liegen, beschreibt $S_1$ die kleinste Figur $\mathfrak{t}$; jeder aber beschreibt eine Evolvente der Curve $\mathfrak{AB}$ (oder vielmehr zwei Bogen derselben, nur der Endpunct $A$

oder $B$ beschreibt blofs einen Bogen), so dafs also in diesem Falle die Figur $W$ irgend ein bestimmtes Stück der Evolvente ist (im Allgemeinen zwei Sectoren derselben); zudem fällt $W$ mit der durch $\mathfrak{T}$ bezeichneten Figur zusammen (§. XXXIV.), und in der That geben die Formeln (117) und (137) für beide den nämlichen Inhalt, indem $r$, $\beta$ und $s_1$ die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind und daher $r^2 - \beta^2 = s_1^2$ ist.

2. *Wenn die Basis $\mathfrak{AB}$ insbesondere ein Kreisbogen ist,* dann liegt $S_1$ nothwendig in der Mitte der Geraden $AB$. Der Radius der Basis sei $= \alpha$; so ist der überrollte Bogen $\mathfrak{AB} = \mathfrak{q}\alpha = b$, und folglich (135):

$$139. \quad \beta = \tfrac{1}{2}\alpha,$$

d. h. „*der Abstand $\beta$ des ausgezeichneten Punctes $R$ von der Geraden $AB$ ist halb so grofs, als der Radius $\alpha$ der Basis, so dafs er also constant bleibt, wenn der letztere gegeben ist, mag die rollende Gerade $AB$ gröfser oder kleiner angenommen werden; zudem liegt $R$ nach der Basis $\mathfrak{AB}$ hin und das aus ihm auf $AB$ gefällte Perpendikel trifft die Mitte $S_1$ der letztern.*"

Die von dem Puncte $S_1$ beschriebene Figur $\mathfrak{t}$ (137) besteht hier aus zwei gleichen Sectoren der Evolvente des Grundkreises, wenn dieser von der Mitte $\mathfrak{S}_1$ des gegebenen Bogens $\mathfrak{AB}$ bis zu dessen Endpuncten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgewickelt wird. Daher ist:

$$140. \quad \mathfrak{t} = \frac{1}{24}\mathfrak{q}b^2 = \frac{1}{24}\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\alpha)^2 = \tfrac{1}{6}\mathfrak{q}^3\beta^2, \text{ und (136, 137):}$$

$$141. \quad w = \frac{\mathfrak{q}^2-3}{24\mathfrak{q}}b^2 = \frac{\mathfrak{q}^2-3}{24}\mathfrak{q}\alpha^2 = \frac{\mathfrak{q}^2-3}{6}\mathfrak{q}\beta^2,$$

$$142. \quad W = \frac{\mathfrak{q}^2-3}{24\mathfrak{q}}b^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}r^2 = \frac{\mathfrak{q}^2-3}{24}\mathfrak{q}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}r^2 = \frac{\mathfrak{q}^2-3}{6}\mathfrak{q}\beta^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}r^2.$$

Die von dem Puncte $R$ beschriebene kleinste Figur $w$ kann, wie man sieht (141), negativ oder positiv werden; auch wird insbesondere $w = 0$, wenn der Winkel $\mathfrak{q} = \sqrt{3}$, oder $b = \alpha\sqrt{3}$; alsdann ist die von irgend einem Puncte $P$ beschriebene Figur

$$143. \quad W = \tfrac{1}{2}r^2\sqrt{3},$$

d. h. *gleich dem doppelten Inhalte des gleichseitigen Dreiecks über dem Abstande des Punctes $P$ von $R$.*"

Liegt der Punct $P$ in der rollenden Geraden $AB$ selbst und wird $PS_1 = s_1$ gesetzt, so ist $r^2 = \beta^2 + s_1^2$, und daher hat man (142):

$$144. \quad W = \frac{1}{24}\mathfrak{q}b^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}s_1^2 = \frac{1}{24}\mathfrak{q}^3\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}s_1^2 = \tfrac{1}{6}\mathfrak{q}^3\beta^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}s_1^2,$$

wo jetzt $W$ ein bestimmtes Stück irgend einer Evolvente des Grundkreises ist, welches von einem Bogen $PP_1$ derselben, den Normalen $P\mathfrak{A}$ und $P_1\mathfrak{B}$ in dessen Endpuncten, und dem correspondirenden Bogen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der Basis begrenzt wird.

Es ist klar, dafs auch in andern Fällen der Schwerpunct $S_1$ in die Mitte der Geraden $AB$ fallen kann, wie z. B. wenn die Basis $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in Bezug auf eine Axe senkrecht symmetrisch ist, also etwa der Bogen eines Kegelschnitts, in dessen Mitte der Scheitel einer Axe desselben liegt. Von solchen Beispielen mag hier noch das folgende in Betracht kommen, wo nämlich:

*3. die Basis $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein ganzer Bogen der gemeinen Cykloide ist.*

In diesem Falle wird $q = \pi$, also $\beta = \frac{b}{2\pi}$, wodurch die Lage des Punctes $R$ (in Rücksicht der rollenden Geraden $AB$) vollkommen bekannt ist, indem $S_1$ in der Mitte von $AB$ liegt. Der Radius des Kreises, durch welchen die Cykloide $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ erzeugt worden, sei $\alpha$, so ist bekanntlich $8\alpha = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB = b = 2\pi\beta$. Aus einer andern, allgemein bekannten, Eigenschaft der Cykloide folgt leicht, dafs der Inhalt der von $S_1$ beschriebenen Figur:

145. $$t = 4\pi\alpha^2 = \tfrac{1}{16}\pi b^2 = \tfrac{1}{4}\pi^3\beta^2.$$

Daraus folgt weiter (136 und 137):

146. $$w = \frac{\pi^2-2}{16\pi}b^2 = 4\frac{\pi^2-2}{\pi}\alpha^2 = \frac{\pi^2-2}{4}\pi\beta^2,$$

147. $$W = \frac{\pi^2-2}{16\pi}b^2 + \tfrac{1}{2}\pi r^2 = 4\frac{\pi^2-2}{\pi}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{4}(\pi^2-2)\pi\beta^2 + \tfrac{1}{2}\pi r^2.$$

Für die von dem Endpuncte $A$ oder $B$ beschriebene Figur (die Evolvente der Cykloide $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$) — für welche $r^2 = \beta^2 + (\tfrac{1}{2}b)^2 = \frac{\pi^2+1}{4\pi^2}b^2$ — hat man:

148. $$W = \tfrac{3}{16}.\pi b^2 = 12.\pi\alpha^2 = \tfrac{3}{4}.\pi^3\beta^2.$$

*III. Wenn ACB ein Kreisbogen und*

*1. die Basis $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eine beliebige Curve ist.*

Hier fällt $S$ in den gewöhnlichen Schwerpunct des Bogens $AB$; die übrigen wesentlichen Puncte $S_1$, $\mathfrak{S}$ und $R$ werden nicht näher bestimmt; allein ohne dieselben genauer zu kennen, kann doch der Inhalt der dem Mittelpuncte $Q$ des Kreises $AB$ entsprechenden Figuren $W$ und $\mathfrak{T}$ gefunden werden. Denn da für diesen Fall in den obigen Formeln (114 und 115) der Strahl $a$ constant, nämlich gleich dem Radius des Kreises $AB$, so ist:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma(a^2 A) = \tfrac{1}{2}a^2\Sigma(A) = \tfrac{1}{2}q a^2, \text{ und}$$

$$149. \quad \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{q} a^2,$$

und ferner ist der Sector

$$F = \tfrac{1}{2}q a^2,$$

so dafs folglich (113):

$$150. \quad W = \tfrac{1}{2}(2q + \mathfrak{q})a^2.$$

Hiernach hat man folgende zwei Sätze:

α) *„Bewegt sich eine constante Tangente* $\mathfrak{AP} = a$ *längs einer festen, stetig convexen Curve* $\mathfrak{AB}$, *so beschreibt sie eine Figur* $\mathfrak{T}$, *deren Inhalt einem Kreissector gleich ist,* $= \tfrac{1}{2}\mathfrak{q} a^2$ (149), *welcher die Tangente zum Radius und den Winkel zwischen den Normalen in den Endpuncten der Curve zum Centriwinkel hat."* — Hierdurch lassen sich verschiedene sogenannte *„Zuglinien"* (Tractorien) unmittelbar quadriren.

β) *„Rollt ein Kreis auf der convexen Seite einer festen Curve* $\mathfrak{AB}$ (um einen beliebigen Bogen $AB = \mathfrak{AB}$, der kleiner oder gröfser als der Kreisumfang sein kann), *so beschreibt sein Mittelpunct* $Q$ *eine Figur* $W$ *die allemal dem Sector des Kreises gleich ist, welcher den doppelten Centriwinkel über dem abgerollten Bogen* $AB$ *und den Winkel zwischen den Normalen in den Endpuncten der Basis* $\mathfrak{AB}$ *zusammengenommen. zum Centriwinkel hat* (150)." — Die vom Mittelpuncte $Q$ des Kreises beschriebene Curve $QQ_1$ und die Basis $\mathfrak{AB}$ heifsen *„parallele Curven."* Die Figur $W$ ist ein Stück des Ringes zwischen denselben, begrenzt durch die gemeinschaftlichen Normalen $Q\mathfrak{A}$ und $Q_1\mathfrak{B}$. Die Länge der Curve $QQ_1$ ist $= (q + \mathfrak{q})a$, was aus einer andern geometrischen Betrachtung leicht folgt. (Vergl. Abh. von Crelle in *Annal. de Math. par Gergonne, tom. XII.*)

2. *Wenn die Basis* $\mathfrak{AB}$ *auch ein Kreisbogen ist,*

dann fällt auch $S_1$ in den gewöhnlichen Schwerpunct des Bogens $AB$, so dafs folglich die drei Puncte $S$, $S_1$ und $\mathfrak{S}$ in demselben vereinigt sind. Nun liegt der eigenthümliche Punct $R$ in dem durch $\mathfrak{S}$ gehenden Durchmesser des Kreises $AB$, und sein Abstand vom Mittelpuncte $P$ des letzteren ist (131 u. 128):

$$151. \quad QR = \frac{b}{q} + \frac{b}{2(q+\mathfrak{q})} = \frac{3q+2\mathfrak{q}}{2q+2\mathfrak{q}} \cdot \frac{b}{q} = \frac{2a+3\mathfrak{a}}{2a+2\mathfrak{a}} \cdot \frac{b}{q} = \frac{3+2n}{2(1+n)} \cdot \frac{b}{q} = r_1,$$

wo $\mathfrak{a}$ der Radius der Basis $\mathfrak{AB}$ und das Verhältnifs der Radien $a : \mathfrak{a} = n$ gesetzt ist, (es ist dann auch $\mathfrak{q} : q = n$).

Da hierdurch der Abstand ($r_1$) des Mittelpuncts $Q$ von dem Puncte $R$ gegeben ist, und da man auch den Inhalt der von ihm beschriebenen Fi-

gur $W$ kennt (150): so wird dadurch der Inhalt der von $R$ beschriebenen kleinsten Figur $w$ gefunden, nämlich (126 u. 150):

$$152.\quad w = \tfrac{1}{2}(2q+\mathfrak{q})a^2 - \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})r_1^2 = \tfrac{1}{2}(2q+\mathfrak{q})a^2 - \tfrac{1}{8}\frac{(3q+2\mathfrak{q})^2}{q+\mathfrak{q}}.\left(\frac{b}{q}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}qa^2 + \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})(a^2-r_1^2) = \tfrac{1}{2}\frac{a+2\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}qa^2 - \tfrac{1}{8}\frac{(2a+3\mathfrak{a})^2}{(a+\mathfrak{a})q\mathfrak{a}}b^2$$
$$= \tfrac{1}{2}qa^2 + \tfrac{1}{2}(1+n)q(a^2-r_1^2) = \tfrac{1}{2}(2+n)qa^2 - \tfrac{1}{8}\frac{(3+2n)^2}{(1+n)q}b^2.$$

Nun wird weiter der Inhalt der von einem beliebigen Puncte $P$ beschriebenen Figur $W$ gefunden, sobald man dessen Abstand $r$, von $R$ kennt, nämlich es ist (126):

$$153.\quad W = \tfrac{1}{2}(2q+\mathfrak{q})a^2 - \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})r_1^2 + \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})r^2$$
$$= \tfrac{1}{2}qa^2 + \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})(a^2-r_1^2+r^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\frac{a+2\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}qa^2 - \tfrac{1}{8}\frac{(2a+3\mathfrak{a})^2}{(a+\mathfrak{a})q\mathfrak{a}}b^2 + \tfrac{1}{2}\frac{a+\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}qr^2$$
$$= \tfrac{1}{2}q[(2+n)a^2+(1+n)r^2] - \tfrac{1}{8}\frac{(3+2n)^2}{(1+n)q}b^2$$
$$= \tfrac{1}{2}q\left[(2+n)a^2+(1+n)r^2 - \tfrac{1}{4}\frac{(3+2n)^2}{1+n}\left(\frac{b}{q}\right)^2\right],\ \text{etc.}$$

Die Figur $W$ ist hier ein bestimmtes Stück irgend einer Epicycloide, dessen Quadratur durch die vorstehende allgemeine Formel gegeben wird. Der Winkel $q$ (so wie $\mathfrak{q}$) kann beliebig grofs sein, d. h. er kann beliebige Vielfache von $2\pi$ enthalten, wo dann zugleich auch der Bogen $AB$ eben so oft den ganzen Kreisumfang umfafst. Ist $q$ gerade ein Vielfaches von $2\pi$, so ist allemal die Sehne $b=0$, und daher auch $QR$ oder $r_1=0$, d. h. dann fällt der ausgezeichnete Punct $R$ in den Mittelpunct $Q$ des rollenden Kreises, und aus den Formeln (152 und (153) verschwinden die mit $b$ (oder $r_1$) behafteten Glieder. Um dieses Verschwinden in den Formeln selbst anzudeuten, darf nur $2a\sin\frac{1}{2}q$ statt $b$ gesetzt werden. — Es sei $q=m2\pi$, wo $m$ eine ganze Zahl, so hat man:

$$w = m(2+n)\pi a^2;\qquad W = m(2+n)\pi a^2 + m(1+n)\pi r^2,$$

und wenn zugleich $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}2\pi$, und $\mathfrak{m}$ ebenfalls eine ganze Zahl, jedoch $m$ und $\mathfrak{m}$ relative Primzahlen sind, so ist:

$$154.\quad w = (2m+\mathfrak{m})\pi a^2,\ \text{und}$$
$$155.\quad W = (2m+\mathfrak{m})\pi a^2 + (m+\mathfrak{m})\pi r^2,$$

wobei nämlich die von dem Puncte $P$ beschriebene Curve (Epicycloide) sich schliefst (oder in sich zurückkehrt), und der Kreis $\mathfrak{B}$ oder $AB$ gerade $m$ mal um die Basis $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{AB}$ herumrollt.

In Hinsicht der kleinsten Figur $w$, wofern der Winkel $q$ beliebig, wie in (152), kann noch bemerkt werden, daſs ihr Inhalt positiv oder negativ sein kann, und daſs dazwischen $w=0$ wird, wenn:

$$156.\quad r_1^2 = \frac{n+2}{n+1}a^2,\quad \text{oder}\quad \left(\frac{b}{q}\right)^2 = 4\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)^2}a^2,$$

und somit die Abstände $r_1$ und $\frac{b}{q}$ der Puncte $R$ und $\mathfrak{S}$ von dem Mittelpuncte $Q$ des rollenden Kreises durch die Radien beider Kreise gegeben sind. Die Werthe von $W$ sind dann:

$$157.\quad W = \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q})r^2 = \tfrac{1}{2}(1+n)qr^2.$$

Und wenn für diesen Fall insbesondere $a=\mathfrak{a}$, also $n=1$ ist, so hat man:

$$158.\quad r_1^2 = \tfrac{3}{2}a^2;\quad \left(\frac{b}{q}\right)^2 = \frac{24}{25}a^2;\quad W = qr^2.$$

Es giebt noch andere Fälle, bei allgemeineren Curven, wo der eigenthümliche Punct $R$ sich unmittelbar angeben läſst, wie z. B. folgende.

IV. *Wenn jede der beiden Curven* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U}$ *geschlossen ist und die rollende* $\mathfrak{B}$ *einen Mittelpunct hat; wenn ferner ihre Umfänge sich verhalten, wie zwei ganze Zahlen* $v:u$, *die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, jedoch* $v$ *gerade ist; und wenn endlich* $\mathfrak{B}$ *so lange rollt, bis sie wieder genau in ihre anfängliche Lage gelangt, d. h. bis wieder die nämlichen Puncte* $A$ *und* $\mathfrak{A}$ *beider Curven sich treffen, was erst nach* $v$ *Umläufen der* $\mathfrak{B}$ *um* $\mathfrak{U}$ *eintritt, und wo dann jeder mit* $\mathfrak{B}$ *verbundene Punct* $P$ *in seine ursprüngliche Lage kommt, also die von ihm beschriebene Curve* $W$ *in sich zurückkehrt: so fällt der eigenthümliche Punct* $R$ *allemal mit dem Mittelpuncte der rollenden Curve* $\mathfrak{B}$ *zusammen.*

Nämlich unter diesen Bedingungen vereinigen sich die vier Puncte $S$, $S_1$, $\mathfrak{S}$ und $R$ alle mit dem Mittelpuncte der Curve $\mathfrak{B}$. Denn daſs zunächst $S$ in denselben falle, ergiebt sich daraus, daſs der in Betracht kommende Bogen $AB$ bei $\mathfrak{B}$ gerade aus dem $u$fachen Umfange dieser Curve besteht, folglich der Krümmungs-Schwerpunct $S$ des ganzen Bogens mit dem des einfachen Umfanges der Curve $\mathfrak{B}$ zusammenfällt und mithin der Mittelpunct der letztern ist (§. XXII.). Zugleich folgt hieraus, daſs der Winkel $q=u.2\pi$, und da der Endpunct $B$ des Bogens mit dem Anfangspuncte $A$ zusammenfällt, daſs die Sehne $b=0$ ist. Eben so ist der Winkel $\mathfrak{q}=v.2\pi$, weil der überrollte Bogen $\mathfrak{AB}$ aus dem $v$fachen Umringe der Basis $\mathfrak{U}$ besteht.

Um zu zeigen, dafs auch der Schwerpunct $S_1$ des Bogens $AB$, welcher von der Krümmung der Basis 𝔄𝔅 abhängt, in denselben Mittelpunct falle, denke man die Curven 𝔅 und 𝔘, von den Anfangspuncten $A$ und 𝔄 aus, beziehlich in $v$ und $u$ gleiche Theile getheilt; so sind diese Theile alle von gleicher Länge. Die Theile von 𝔅 mögen nach der Reihe, von $A$ anfangend, durch $𝔅_1$, $𝔅_2$, $𝔅_3$, .... $𝔅_v$ bezeichnet werden. Sie stehen einander paarweise gegenüber und sind congruent — weil 𝔅 einen Mittelpunct hat und $v = 2n$ eine gerade Zahl ist — so dafs also $𝔅_1 = 𝔅_{n+1}$, $𝔅_2 = 𝔅_{n+2}$, .... $𝔅_n = 𝔅_{2n}$, und dafs ferner irgend ein Punct $X_1$ in $𝔅_1$ und der homologe Punct $X_{n+1}$ in $𝔅_{n+1}$ allemal die Endpuncte eines Durchmessers der Curve 𝔅 sind, also ihr Mittelpunct in der Mitte der Geraden $X_1X_{n+1}$ liegt. Heifsen die Theile der Basis 𝔘, von 𝔄 aus nach entsprechender Richtung genommen, $𝔘_1$, $𝔘_2$, $𝔘_3$, .... $𝔘_u$. Jeder dieser Theile wird je einmal von jedem der $v$ Umfangstheile der 𝔅 — während diese $v$ Umläufe um 𝔘 macht — überrollt, wovon man sich durch blofses Abzählen leicht überzeugt. In irgend einem Theile von 𝔘, etwa in $𝔘_x$, fixire man einen beliebigen Punct 𝔛: so kommt derselbe mit solchen $v$ Puncten $X_1, X_2, X_3, \ldots X_{2n}$ der rollenden 𝔅 in Berührung, welche auf ihre $v$ Umfangstheile $𝔅_1$, $𝔅_2$, .... $𝔅_{2n}$ so vertheilt, dafs sie die Endpuncte von $n$ Durchmessern der 𝔅 sind. Daher haben die Gewichte, welche je einem System von solchen $v$ Puncten $X_1$, $X_2$, .... $X_{2n}$, vermöge der Krümmung der Basis 𝔘 im Puncte 𝔛, zukommen, allemal den Mittelpunct der Curve 𝔅 zum Schwerpunct; und folglich mufs auch der gemeinschaftliche Schwerpunct aller Systeme, d. i. $S_1$, in diesen Mittelpunct fallen.

Wenn aber $S$ und $S_1$ zusammenfallen, so vereinigt sich auch 𝔖 mit ihnen; und da ferner die Sehne $b = 0$ ist, so liegt auch $R$ im nämlichen Puncte, so dafs also die vier Puncte $S$, $S_1$, 𝔖 und $R$ alle mit dem Mittelpuncte der rollenden Curve 𝔅 zusammenfallen.

Werden die oben angezeigten Werthe für die Winkel $\varphi$ und $\varrho$ in die Formel (126) gesetzt, so hat man für den gegenwärtigen Fall:

$$159. \quad W = w + (v + u)\pi r^2,$$

das heifst:

„*Wird in einer beliebigen Kreislinie, welche mit der rollenden Curve* 𝔅 *denselben Mittelpunct* $R$ *hat, irgend ein Punct* $P$ *angenommen, so ist die von ihm beschriebene Figur* $W$ *allemal gerade um die* $v+u$ *fache Kreisfläche gröfser, als die vom Mittelpuncte* $R$ *beschriebene Figur* $w$."

In Rücksicht der obigen Bedingungen (IV.) kann man verschiedene Modificationen eintreten lassen, wobei dann analoge Resultate statt finden, wie z. B.

1. „*Wenn* $\mathfrak{V}$ *insbesondere ein Kreis, dagegen die Zahl* $v$ *beliebig — gerade oder ungerade — nur nicht* $= 1$ *) *und wenn immerhin* $v$ *und* $u$ *relative Primzahlen sind: so findet der Satz gleicherweise statt.*"

Denn wenn auch $v$ ungerade ist, so haben doch die Puncte $X_1$, $X_2$, $X_3$, .... $X_v$, da sie nothwendig den Umfang des Kreises $\mathfrak{V}$ in $(v)$ gleiche Theile theilen, immerhin dessen Mittelpunct zum Schwerpunct.

Für diesen Fall hat man, wenn der Radius des Kreises $= a$ gesetzt wird (150):

$$160. \quad w = (2v+u)\pi a^2, \quad \text{und}$$

$$161. \quad W = (2v+u)\pi a^2 + (v+u)\pi r^2,$$

und für den speciellen Fall, wo $P$ in der Kreislinie $\mathfrak{V}$ selbst liegt:

$$162. \quad W = (3v+2u)\pi a^2.$$

In Hinsicht dieser Formeln, so wie in Bezug auf (159), ist zu bemerken: „*dafs die nähere Form der Basis* $\mathfrak{U}$, *wofern nur ihr Umfang den geforderten Bedingungen genügt, auf den Inhalt der Figuren* $W$ *und* $w$ *keinen Einflufs hat.*" Eben so verhält es sich bei einigen früheren Formeln.

2. „*Wenn* $\mathfrak{V}$ *beschaffen ist wie anfangs* (IV.), *dagegen* $\mathfrak{U}$ *auch einen Mittelpunct hat, und wenn die Zahlen* $v$ *und* $u$ *beide ungerade — aber immerhin relative Primzahlen — sind: so findet der Satz, sammt der Formel* (159), *gleicherweise statt.*"

Denn wenn $\mathfrak{U}$ einen Mittelpunct hat, so hat sie in den Endpuncten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ jedes Durchmessers gleiche Krümmung; zwei solche Puncte aber treffen mit zwei Reihen Puncten auf $\mathfrak{V}$ zusammen, etwa mit $X_1$, $X_2$, ... ... $X_v$ und $Y_1$, $Y_2$, .... $Y_v$, welche paarweise die Endpuncte von Durchmessern der $\mathfrak{V}$ sind, nämlich so gepaart, dafs je ein Punct $X$ mit irgend einem Puncte $Y$ zusammengehört, (weil $v$ und $u$ ungerade sind); daher mufs der Schwerpunct dieser zwei Reihen Puncte, wenn sie — vermöge der Krümmungen in $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ — gleiche Gewichte haben, in den Mittelpunct der Curve $\mathfrak{V}$ fallen; woraus folgt, dafs auch der Schwerpunct $S_1$ in denselben Mittelpunct fällt.

Dieser Satz findet auch statt, wenn insbesondere $v = u = 1$.

---

*) Diese Bedingung wurde durch ein Versehen bei der ersten Mittheilung des Satzes (in diesem Journal Bd. 18. S. 278) nicht ganz richtig angegeben.

## §. XXXVI.

Zum Schlusse füge ich noch folgende Bemerkungen hinzu.

1. Wenn insbesondere die beiden Curven 𝔅 und 𝔘 einander gleich sind (congruent) und wenn sie einander — während 𝔅 auf 𝔘 rollt — stets in homologen Puncten berühren, so ist die von irgend einem mit 𝔅 verbundenen Puncte $P$ beschriebene Curve $W$ allemal der dem homologen Puncte 𝔓 in Bezug auf die Basis 𝔘 entsprechenden Fuſspuncten-Curve $V$ ähnlich, und zwar haben dieselben den festen Punct 𝔓 zum (äuſsern) Aehnlichkeitspunct und ihre entsprechenden Dimensionen verhalten sich, wie 2 : 1. Denn die gemeinschaftliche Tangente der Curven 𝔅 und 𝔘 in ihrem Berührungspuncte ($A$𝔄) geht offenbar in jedem Augenblicke durch die Mitte der Geraden 𝔓$P$ und steht auf ihr senkrecht; woraus das Behauptete folgt.

Zugleich folgt hieraus, daſs die Curve $W$ selbst als Fuſspuncten-Curve angesehen werden kann, nämlich des Punctes 𝔓 in Bezug auf eine Curve $𝔘_1$, welche der 𝔘 ähnlich, mit ihr 𝔓 zum Aehnlichkeitspunct und zudem doppelt so groſse Dimensionen, als diese, hat. So z. B. sind also die sämmtlichen Fuſspuncten-Curven in Bezug auf einen gegebenen Kreis nichts anderes, als die verschiedenen Epicycloiden, welche entstehen, wenn der rollende Kreis der Basis gleich, und wenn ihr Durchmesser dem Radius jenes Kreises gleich ist. Gleiche Folgerungen ergeben sich für die übrigen Kegelschnitte; woraus verschiedene Sätze hervorgeben, deren nähere Angabe hier übergangen wird *).

Ueberhaupt finden also hier für die Figuren $W$ die nämlichen Gesetze statt, wie oben für die Fuſspuncten-Figuren $V$ (Anm. §. XXXV. I, 1. und §. XXI.); denn immer fällt der Punct $S_1$ — und somit auch 𝔖 — mit dem Krümmungs-Schwerpuncte $S$ zusammen, und der nämliche Punct $R$, welchem die kleinste Fuſspuncten-Figur $v$ entspricht, beschreibt auch die kleinste Figur $w$.

2. Ist $AB$ Bogen eines Kreises 𝔅, dessen Radius $= a$, und 𝔄𝔅 eine beliebige, stetig convexe Curve, auf deren convexen Seite $AB$ rollt; sind ferner $P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n$ irgend ein System von $n$ Puncten in der Ebene des Kreises die dessen Mittelpunct $Q$ zum Schwerpuncte haben und von

*) Einige von diesen Sätzen befinden sich in *Klügel's* Math. Wörterb. Art. Epicykloide, wo es aber (Bd. II. S. 128) statt: der „*Durchmesser*" der von den Brennpuncten beschriebenen Kreise sei gleich der Hauptaxe der Ellipse oder Hyperbel; heiſsen muſs: der „*Radius*" etc.

ihm beziehlich um $r_1$, $r_2$, $r_3$, .... $r_n$ abstehen; wird $r_1^2+r_2^2+r_3^2+\ldots+r_n^2 = s^2$ gesetzt, und eben so die Summe der von den $n$ Puncten beschriebenen Figuren $W_1$, $W_2$, .... $W_n$ durch $S$, so wie die Summe der $n$ excentrischen Kreissectoren $P_1AB$, $P_2AB$, .... $P_nAB$ durch $\mathfrak{S}$ bezeichnet, so hat man:

$$163.\quad S = \mathfrak{S} + \tfrac{1}{2}n(q+\mathfrak{q}).a^2 + \tfrac{1}{2}(q+\mathfrak{q}).s^2.$$

Liegen die $n$ Puncte $P_1$, $P_2$, .... in einer mit $\mathfrak{B}$ concentrischen Kreislinie, deren Radius $= r$, so ist:

$$164.\quad S = \mathfrak{S} + \tfrac{1}{2}n(q+\mathfrak{q}).(a^2+r^2).$$

Ist die Curve $\mathfrak{AB}$ oder $\mathfrak{U}$ geschlossen, verhalten sich die Umfänge von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{U}$ wie zwei relative Primzahlen $v$ und $u$, und rollt $\mathfrak{B}$ gerade $v$ mal um $\mathfrak{U}$ herum, wo dann die $n$ Puncte in ihre anfängliche Lage zurückkehren und $q = u.2\pi$, $\mathfrak{q} = v.2\pi$ wird, so ist jeder Sector $= u.\pi a^2$ und man hat (163 u. 164):

$$165.\quad S = nu.\pi a^2 + n(u+v).\pi a^2 + (u+v).\pi s^2, \text{ und}$$

$$166.\quad S = n(2u+v).\pi a^2 + n(u+v).\pi r^2.$$

Haben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{U}$ gleichen Umfang, so dafs $v = u = 1$, so ist beziehlich:

$$167.\quad S = 3n.\pi a^2 + 2\pi s^2, \text{ und}$$

$$168.\quad S = 3n.\pi a^2 + 2n.\pi r^2,$$

und wenn $r = a$, also die $n$ Puncte in der Kreislinie $\mathfrak{B}$ selbst liegen, so ist:

$$169.\quad S = 5n.\pi a^2.$$

Hat die Basis $\mathfrak{U}$ einen Mittelpunct, so haben die Figuren $W_1$, $W_2$, .... $W_n$, in jedem der zwei letzteren Fälle (168 u. 169), unter sich gleichen Inhalt, so dafs also für jede einzeln, beziehlich:

$$170.\quad W = 3\pi a^2 + 2\pi r^2, \text{ und}$$

$$171.\quad W = 5\pi a^2.$$

Wie man sieht, sind auch die vorstehenden Formeln von der speciellen Natur der Basis $\mathfrak{U}$ (ihrer Gleichung etc.) unabhängig (s. §. XXXV. IV. 1.).

Mehrere von den in dieser Abhandlung vorgetragenen Sätzen habe ich bereits früher in diesem Journal Bd. XVIII. zu beweisen vorgelegt.

---

# 9.

# Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres.

## *Seconde partie.*

Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet.*

(Suite et fin du Mémoire inséré dans le cahier précédent.)

---

### §. 9.

La sommation qui nous reste à effectuer, peut être opérée par deux méthodes différentes, en s'aidant des formules remarquables que Mr. ***Gauſs*** a établies dans le beau mémoire ayant pour titre „***Summatio quarumdam serierum singularium.***" La première de ces méthodes est fondée sur certaines séries connues ordonnées suivant les sinus ou les cosinus des arcs multiples; en l'employant dans la note *), qui a précédé le présent mémoire, nous avons déjà remarqué qu'elle s'applique de la même manière et avec une facilité égale à toutes les séries qui servent à exprimer le nombre des formes pour un déterminant quelconque, c'est-à-dire aux deux séries générales (19) et (23) du §. 6., et nous avons même ajouté que les séries de cette forme sont encore susceptibles d'être sommées par le même moyen, dans plusieurs cas différents de celui où l'exposant $s$ de la puissance $\frac{1}{n^s}$, contenue dans le terme général, est égal à l'unité, ce qui était d'ailleurs évident. En effet, la méthode dont il s'agit, consistant à remplacer le facteur qui multiplie $\frac{1}{n^s}$, au moyen des formules de Mr. ***Gauſs*** par un nombre limité de termes de l'une des formes $\sin nx$, $\cos nx$, on voit que la série, après cette transformation, se trouve changée en une somme de suites trigonométriques dont chacune a pour terme général une expression telle que $\frac{\sin nx}{n^s}$ ou $\frac{\cos nx}{n^s}$, et peut par conséquent être sommée pour les mêmes valeurs de $s$, pour lesquelles ***D. Bernoulli*** a donné les sommes de ces dernières.

La seconde méthode est fondée sur le procédé connu de l'intégration des fractions rationnelles. Les séries déjà citées (19) et (23) §. 6., coïn-

---

*) Voyez le tome XVIII. de ce Journal pag. 259.

cident avec celles qui forment la seconde des trois classes de suites infinies que nous avons eu à distinguer dans le mémoire sur la progression arithmétique et nous avons déjà observé dans le mémoire cité §. 10., que les séries de seconde et troisième classe peuvent être sommées par la méthode qui avait été expliquée en détail dans le §. 4. du même mémoire. Les deux méthodes que nous venons de citer, sont l'une et l'autre d'une grande simplicité. La seconde étant celle qui se présente le plus naturellement, nous allons l'employer d'abord. Mais avant d'entreprendre ce calcul, il faut rappeler les formules de Mr. *Gauss*. Voici une démonstration de ces expressions, fondée sur les mêmes principes dont j'ai déjà fait usage dans un précédent mémoire, mais plus simple à quelques égards.

Désignant par $f(x)$ une fonction de $x$, que je suppose continue entre les limites $x=0$ et $x=\pi$, si l'on pose

$$\int_0^\pi f(x)\cos sx\,dx = c_s,$$

on aura, comme l'on sait,

$$c_0 + 2\Sigma c_s \cos sx = \pi f(x),$$

le signe $\Sigma$ s'étendant à tous les entiers depuis $s=1$, jusqu'à $s=\infty$. Comme ce développement subsiste entre les limites $x=0$ et $x=\pi$ inclusivement, on aura en particulier

$$c_0 + 2\Sigma c_s = \pi f(0).$$

Il est facile de voir comment cette équation doit être modifiée, lorsque les limites de l'intégrale $c_s$ ont des valeurs quelconques. Considérons par exemple les limites 0 et $2h\pi$, $h$ désignant un entier positif et posons

$$1. \quad \int_0^{2h\pi} f(x)\cos sx\,dx = c_s,$$

la fonction étant toujours continue entre ces limites. L'intégrale précédente étant partagée en $2h$ integrales partielles dont les limites sont 0 et $\pi$, $\pi$ et $2\pi$, ...., $(2h-1)\pi$ et $2h\pi$, et toutes ces nouvelles intégrales étant ramenées à avoir pour limites communes 0 et $\pi$, il viendra

$$c_s = \int_0^\pi [f(x) + f(2\pi - x) + f(2\pi + x) + \ldots\ldots + f(2(h-1)\pi - x) \\ + f(2(h-1)\pi + x) + f(2h\pi - x)]\cos sx\,dx,$$

Cette expression de $c_s$ ayant la même forme que celle donnée ci-dessus, on aura

$$2. \quad c_0 + 2\sum_{s=1}^{s=\infty} c_s = \pi\Big(f(0) + f(2h\pi) + 2\sum_{s=1}^{s=h-1} f(2s\pi)\Big),$$

le terme général $c_s$ du premier membre étant donné par l'équation (1).

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\,dx = a,$$

$a$ étant une quantité numérique. Posons dans cette intégrale $x = \frac{z}{2}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$, $z$ désignant la nouvelle variable et $n$ étant un entier positif divisible par 4. Il viendra ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{n}{8\pi}z^2\right) dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Cette intégrale étant décomposée en une infinité d'autres ayant pour limites deux multiples consécutifs de $2\pi$, tels que $2s\pi$ et $2(s+1)\pi$, et ces nouvelles intégrales étant ramenées à avoir les limites communes 0 et $2\pi$ par le changement de $z$ en $2s\pi + z$, on aura

$$\Sigma \int_0^{2\pi} \cos\frac{n}{8\pi}(2s\pi + z)^2\,dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

le signe $\Sigma$ s'étendant depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$.

En développant sous le signe cosinus, omettant le terme $\frac{1}{2}ns^2\pi$, multiple de $2\pi$, et réunissant les termes de la somme qui répondent à des valeurs opposées de $s$, il viendra

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{n}{8\pi}z^2\right) dz + 2\Sigma \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{n}{8\pi}z^2\right) \cos\left(s\frac{nz}{2}\right) dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

le signe $\Sigma$ s'étendant depuis $s = 1$ jusqu'à $s = \infty$. Si maintenant l'on fait $nz = 2x$, on aura

$$\int_0^{n\pi} \cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right) dx + 2\Sigma \int_0^{n\pi} \cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right) \cos sx\,dx = a\sqrt{2n\pi}.$$

Comme l'entier $n$ est pair, le premier membre rentre dans la forme de celui de l'équation (2), $f(x)$ étant $\cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right)$. On aura donc en vertu de cette équation

$$\cos 0 + \cos\left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{2\pi}{n} + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{1}{2}n-1} \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = a\sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Si l'on observe que l'on a $\cos s^2 \frac{2\pi}{n} = \cos(n-s)^2 \frac{2\pi}{n}$, l'équation précédente pourra prendre cette forme plus simple,

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = a\sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Pour déterminer la quantité $a$ indépendante de $n$, il suffira de donner à $n$ une valeur particulière. Posant, par exemple, $n = 4$, on trouve $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On a donc définitivement, quel que soit l'entier $n = 4\mu$,

$$\Sigma \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = \sqrt{n}.$$

En opérant de la même manière sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,dx$, on trouve aussi

$$\Sigma \sin s^2 \frac{2\pi}{n} = \sqrt{n},$$

le signe sommatoire s'étendant toujours depuis $s = 0$ jusqu'à $s = n-1$.

Il seroit facile d'obtenir par une analyse semblable les sommes de la forme des précédentes, pour les cas ou $n$ est de l'une de trois formes $4\mu+1$, 2, 3; mais il est plus simple encore de ramener ces cas à celui ou $n$ a la forme $4\mu$.

Pour y parvenir, soient $n$ et $m$ deux entiers quelconques dont le premier est supposé positif, et posons

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2m\pi}{n} i} = \varphi(m, n),$$

où $i$ désigne, pour abréger, la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$.

La fonction $\varphi(m, n)$ jouit de plusieurs propriétés remarquables. On a d'abord évidemment, si $m'$ désigne un troisième entier tel qu'on ait $m' \equiv m \pmod{n}$

$$3. \quad \varphi(m, n) = \varphi(m', n).$$

On a encore, en supposant $c$ premier à $n$,

$$4. \quad \varphi(m, n) = \varphi(c^2 m, n).$$

Cela résulte de ce que l'expression $cs$, en y faisant successivement $s = 0$, $1, \ldots, n-1$, donne ces mêmes nombres pour restes lorsqu'on la divise par $n$.

Une troisième propriété est exprimée par l'équation

$$5. \quad \varphi(n, m)\,\varphi(m, n) = \varphi(1, mn)$$

qui suppose les entiers $n$ et $m$ l'un et l'autre positifs et premiers entre eux. En effet, comme l'on a

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2m\pi}{n} i} = \varphi(m, n); \qquad \sum_{t=0}^{t=m-1} e^{t^2 \frac{2n\pi}{m} i} = \varphi(n, m),$$

il viendra en multipliant

$$\Sigma\Sigma e^{(m^2 s^2 + n^2 t^2) \frac{2\pi}{mn} i} = \varphi(m, n)\,\varphi(n, m),$$

ou ce qui revient au même, en ajoutant à l'exposant l'expression $2st\pi i$, multiple de $2\pi i$,

$$\Sigma\Sigma e^{(ms+nt)^2 \frac{2\pi}{mn} i} = \varphi(m, n)\,\varphi(n, m).$$

Le binome $ms+nt$ peut être remplacé par son reste relatif au diviseur $mn$. Or, $m$ et $n$ étant premiers entre eux, il est facile de voir que les valeurs que ce reste obtient entre les limites de la double intégration, coïncident, abstraction faite de l'ordre, avec les termes de la suite 0, 1, 2, ...., $mn-1$. Le résultat prend donc la forme d'une somme simple et l'on a

$$\sum_{s=0}^{s=mn-1} e^{s^2 \frac{2\pi}{mn} i} = \varphi(m, n)\,\varphi(n, m),$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Au moyen des équations qui viennent d'être établies, il est facile d'obtenir la valeur de $\varphi(1, n)$, quelle que soit la forme de l'entier $n$. Si l'on suppose d'abord $n = 4\mu$, on aura, en vertu des sommations effectuées plus haut,

$$\varphi(1, n) = (1+i)\sqrt{n}.$$

Soit en second lieu $n$ un entier impair. L'équation (5) donne, en y faisant $m = 4$,

$$\varphi(4, n)\,\varphi(n, 4) = \varphi(1, 4n).$$

Le second membre est en vertu de l'équation précédente, $= 2(1+i)\sqrt{n}$. D'un autre côté, les deux expressions $\varphi(4, n)$, $\varphi(n, 4)$ peuvent d'après les équations (3) et (4), être remplacées, la première par $\varphi(1, n)$, la seconde par $\varphi(1, 4)$ ou par $\varphi(3, 4)$, suivant que $n$ est de la forme $4\mu+1$ ou de celle-ci $4\mu+3$. Or il est facile de voir qu'on a

$$\varphi(1, 4) = 2(1+i), \quad \varphi(3, 4) = 2(1-i).$$

On conclut de là

$$\varphi(1, n) = \sqrt{n}, \quad n = 4\mu+1; \qquad \varphi(1, n) = i\sqrt{n}, \quad n = 4\mu+3.$$

Reste à considérer le cas où $n$ a la forme $4\mu+2$. Comme dans cette supposition, $\frac{n}{2}$ et 2 sont premiers entre eux, l'équation (5) donnera

$$\varphi\left(2, \frac{n}{2}\right), \varphi\left(\frac{n}{2}, 2\right) = \varphi(1, n),$$

et que d'un autre côté, $\varphi\left(\frac{n}{2}, 2\right) = \varphi(1, 2) = 0$, il s'ensuivra

$$\varphi(1, n) = 0.$$

Considérons spécialement le cas où $n$ est un nombre premier impair $p$, et soient $a$ et $b$ respectivement les résidus et les non-résidus quadratiques de $p$, moindres que ce nombre. On aura alors, en observant que l'expression $i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$ se réduit à 1 ou à $i$, suivant que $p$ a la forme $4\mu+1$ ou celle-ci $4\mu+3$,

$$\varphi(1, p) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

---

équation qu'on peut mettre sous cette autre forme, en remplaçant $s^2$ par son reste:

$$1+2\Sigma e^{a\frac{2\pi}{p}i} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p},$$

le signe $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs de $a$. Si $m$ désigne un entier non-divisible par $p$, on aura pareillement en remplaçant $ms^2$ par son reste,

$$\varphi(m,p) = 1+2\Sigma e^{a\frac{2\pi}{p}i} \quad \text{ou} \quad = 1+2\Sigma e^{b\frac{2\pi}{p}i},$$

suivant que $\left(\frac{m}{p}\right)=1$ ou $=-1$. Puisque d'un autre côté $\Sigma e^{a\frac{2\pi}{p}i}+\Sigma e^{b\frac{2\pi}{p}i}$ $=-1$, on pourra réunir ces deux résultats dans cette formule,

$$\varphi(m,p) = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

On donnera cette autre forme à l'expression $\varphi(m,p)$, en y mettant au lieu de $s^2$ son reste,

$$\varphi(m,p) = 1+2\Sigma e^{a\frac{2m\pi}{p}i}$$

et la comparaison de ces deux équations fournira celle-ci

$$1+2\Sigma e^{a\frac{2m\pi}{p}i} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

Si maintenant l'on observe qu'on a évidemment

$$\Sigma e^{a\frac{2m\pi}{p}i}+\Sigma e^{b\frac{2m\pi}{p}i} = -1,$$

l'équation précédente pourra se changer en celle-ci

$$1+2\Sigma e^{b\frac{2m\pi}{p}i} = -\left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

En soustraiant cette équation de la précédente et divisant le résultat par 2, on aura définitivement

$$\Sigma e^{a\frac{2m\pi}{p}i}-\Sigma e^{b\frac{2m\pi}{p}i} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

Cette équation subsiste quel que soit l'entier $m$, pourvu qu'il ne soit pas divisible par $p$. Lorsque $m$ est un multiple de $p$, le premier membre se réduit évidemment à zéro. Nous écrirons l'équation d'une manière plus abrégée, et comme il suit

$$6. \quad \Sigma\left(\frac{g}{p}\right) e^{g\frac{2m\pi}{p}i} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p},$$

où le signe sommatoire s'étend depuis $g=1$, jusqu'à $g=p-1$.

## §. 10.

D'après les résultats obtenus dans le §. 8., où nous avons fait voir que la détermination du nombre $h$ des formes quadratiques qui répondent à un déterminant quelconque, se réduit toujours à une question du même genre et relative au cas où le déterminant n'a pas de diviseur carré et où les formes dont il s'agit d'obtenir le nombre, appartiennent à la première espèce, nous n'aurons plus à nous occuper que des 4 déterminants

$$P, \quad 2P, \quad -P, \quad -2P,$$

$P = pp'p'' \ldots.,$ désignant un entier impair et positif dont les diviseurs simples $p, p', p'', \ldots.$ sont tous différents les uns des autres.

Il importe de remarquer que la lettre $P$ telle qu'on vient de la définir, a la même signification que dans les §§. 5. et 6., lorsque le déterminant que nous désignerons toujours par $D$, est positif, mais que dans le cas de $D$ négatif, cette lettre telle qu'elle a été employée dans les §§. cités, répond à ce que nous désignons maintenant par $-P$. Cela ne change rien à l'expression $\left(\frac{n}{P}\right)$, contenue dans l'équation (19) du §. 6., et à la valeur de $\varepsilon$ fixée par les équations (9) du même §., cette valeur devant être $+1$ ou $-1$, suivant que le déterminant, delivré de tout diviseur carré, est impair ou pair. Mais il n'en est pas de même de $\delta$, cette valeur dépendant du reste qui donne $P$, pris avec son signe, relativement au diviseur 4. Il résulte de là qu'en posant pour abréger

$$V = \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

le signe s'étendant à tous les entiers $n$ positifs, impairs et premiers à $P$, les expressions $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, qui doivent entrer dans la série $V$ contenue dans l'équation (19) ou (23), suivant qu'il s'agit d'un déterminant négatif ou positif, seront déterminées comme il suit

$$\left.\begin{array}{ll} D = P, & P = 4\mu+1 \\ D = -P, & P = 4\mu+3 \end{array}\right\} \delta = 1, \quad \varepsilon = 1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = P, & P = 4\mu+3 \\ D = -P, & P = 4\mu+1 \end{array}\right\} \delta = -1, \quad \varepsilon = 1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = 2P, & P = 4\mu+1 \\ D = -2P, & P = 4\mu+3 \end{array}\right\} \delta = 1, \quad \varepsilon = -1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = 2P, & P = 4\mu+3 \\ D = -2P, & P = 4\mu+1 \end{array}\right\} \delta = -1, \quad \varepsilon = -1.$$

Cela posé, nous avons successivement à considérer les quatres combinaisons que présentent les équations simultanées $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

I. Supposons d'abord $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$. La série $V$ étant divisée par $\left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)$, il viendra

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

le signe $\Sigma$ s'étendant à tous les entiers positifs $n$, premiers à $P$, pairs ou impairs.

En exprimant la série par une intégrale comme au §. 1., on aura

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x} f(x)\,dx}{x^P - 1},$$

où l'on a fait pour abréger, $f(x) = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) x^n$, le signe $\Sigma$ s'étendant aux entiers précédemment définis moindres que $P$. En appliquant à cette intégrale, la méthode ordinaire de décomposition, on trouve

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = -\frac{1}{P}\Sigma f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{P}i}},$$

le signe $\Sigma$ s'étendant à tous les entiers $m$ depuis $m = 0$ jusqu'à $m = P - 1$. Tout se réduit donc à obtenir la fonction $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right) = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) e^{\frac{n}{P}2m\pi i}$.

Pour y parvenir, mettons la fraction $\frac{n}{P}$, contenue dans l'exposant, sous la forme

$$\frac{n}{P} = \mu + \frac{g}{p} + \frac{g'}{p'} + \ldots.$$

$\mu$ étant un entier positif ou négatif, et $g$, $g'$ .... désignant des entiers positifs respectivement inférieurs à $p$, $p'$, .... On sait que cela ne peut se faire que d'une seule manière (*Disq. arith.* 311), et il est manifeste, $n$ étant premier à $P$, qu'aucun des entiers $g$, $g'$, .... ne saurait être zéro. Il est encore facile de voir qu'en donnant à $n$ toutes les valeurs qu'il doit recevoir dans la sommation, $g$, $g'$, .... présenteront toutes les combinaisons que l'on peut former avec les entiers depuis $g = 1$ jusqu'à $g = p - 1$, depuis $g' = 1$ jusqu'à $g' = p' - 1$, etc. Quant à l'entier $\mu$, on pourra le négliger à cause qu'il est multiplié par $2m\pi i$ dans l'exposant. Si maintenant nous faisons pour un instant $\frac{P}{p} = r$, $\frac{P}{p'} = r'$, ...., l'équation précédente donne

$$n \equiv gr + g'r' + \ldots\ldots (\text{mod.} P),$$

d'où l'on conclut ces équations

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{g}{p}\right)\left(\frac{r}{p}\right), \quad \left(\frac{n}{p'}\right) = \left(\frac{g'}{p'}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right), \ \ldots\ldots$$

au moyen desquelles la fonction $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)$ se changera dans le produit de $\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right) \ldots\ldots$ par les sommes

$$\Sigma\left(\frac{g}{p}\right)e^{g\frac{2m\pi}{p}i}, \qquad \Sigma\left(\frac{g'}{p'}\right)e^{g'\frac{2m\pi}{p'}i}, \ \ldots\ldots$$

Remplaçant ces dernières par leurs valeurs fournies par l'équation (6) du §. précédent, on aura

$$f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right) = \left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right) \ldots\ldots i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'-1}{2}\right)^2 + \ldots\ldots}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P}$$

en supposant $m$ premier à $P$. Dans le cas contraire $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)$ s'évanouira par ce qu'une au moins des sommes précédentes se réduira à zero. Quant au produit $\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right) \ldots\ldots$, on remarquera qu'il se compose d'autant de produits partiels de la forme $\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right)$, que les nombres $p, p', \ldots\ldots$ peuvent être combinés deux à deux. Or, comme l'on a $\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{p'-1}{2}}$ $= i^{2\frac{p-1}{2}\frac{p'-1}{2}}$, on voit que l'expression qui multiplie $\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P}$ dans l'équation obtenue plus haut, peut prendre la forme

$$i^{\left(\frac{p-1}{2} + \frac{p'-1}{2} + \ldots\ldots\right)^2} = i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}.$$

Nous avons donc définitivement

$$1. \quad f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad = i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P},$$

suivant que $m$ a ou n'a pas de diviseur commun avec $P$. Substituant cette valeur et observant que tant que $m < P$, on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{P}i}} = \log\left(2\sin\frac{m\pi}{P}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2m}{P}\right)i,$$

il viendra

$$\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)} V = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{P}} \Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log\left(2\sin\frac{m\pi}{P}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2m}{P}\right)i\right),$$

le signe sommatoire s'étendant à tous les entiers $m$ inférieurs et premiers

à $P$. L'équation précédente se simplifie en remarquant qu'on a $\Sigma\left(\frac{m}{P}\right) = 0$; elle devient ainsi

$$\frac{1}{\left(1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)} V = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{P}} \Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log\sin\frac{m\pi}{P} - \frac{m\pi}{P} i\right).$$

Comme le premier membre est réel, les imaginaires doivent se détruire dans le second, comme il est d'ailleurs facile de le vérifier.

Distinguons maintenant les deux formes que $P$ peut présenter, en supposant successivement $P = 4\mu + 1$ et $P = 4\mu + 3$. Nous obtenons ainsi

$$(a) \begin{cases} P = 4\mu + 1, & V = -\frac{1}{\sqrt{P}}\left(1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{P}, \\ P = 4\mu + 3, & V = -\frac{\pi}{P\sqrt{P}}\left(1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)m, \end{cases}$$

le signe $\Sigma$ s'étendant toujours aux entiers $m$ inférieurs et premiers à $P$.

II. Soit en second lieu $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$. Comme le facteur qui multiplie $\frac{1}{n}$ dans la série $V$, est le même pour des valeurs de $n$, qui diffèrent d'un multiple de $4P$, on aura d'après ce qui a été dit dans le §. 1.,

$$V = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}F(x)}{x^{4P}-1},$$

en posant pour abréger

$$F(x) = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)x^n;$$

le signe $\Sigma$ s'étendant à tous les entiers $n$, inférieurs et premiers à $4P$.

La méthode connue pour la décomposition des fractions rationelles donne

$$V = -\frac{1}{4P}\Sigma F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right)\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{4P}i}},$$

où le signe $\Sigma$ s'étend à tous les entiers depuis $m = 0$ jusqu'à $m = 4P-1$.

Tout se réduit donc à déterminer l'expression $F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right)$. On peut y parvenir par des considérations analogues à celles que nous avons employées dans le numéro précédent pour trouver $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)$, mais il est plus simple encore de ramener ce cas à celui que nous avons déjà examiné. Pour cela on décomposera la fraction $\frac{n}{4P}$ contenue dans l'exposant, comme il suit

$$\frac{n}{4P} = \mu + \frac{\gamma}{4} + \frac{n'}{P},$$

où il est facile de voir qu'en supposant $\gamma$ et $n'$ positifs et respectivement inférieurs à 4 et à $P$, les valeurs de $\gamma$ et de $n'$ présenteront dans la sommation qu'il s'agit d'effectuer relativement à $n$, toutes les combinaisons des nombres $\gamma$ inférieurs et premiers à 4, avec tous les nombres $n'$ inférieurs et premiers à $P$. De l'équation précédente mise sous la forme

$$n \equiv P\gamma + 4n' \pmod{4P},$$

on conclut facilement

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{P-1}{2}}(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad \left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{n'}{P}\right).$$

La fonction $F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right)$ deviendra par la substitution de ces valeurs

$$F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}\, \Sigma(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\gamma\frac{2m\pi}{4}i} . \Sigma\left(\frac{n'}{P}\right) e^{n'\frac{2m\pi}{P}i}.$$

Quant à la seconde des deux sommes contenues dans le second membre, elle est évidemment identique à la fonction $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)$, $n'$ ayant ici la même signification que $n$ dans le n°. précédent. La première somme pourrait se déduire des formules données dans le §. 9., mais comme elle n'a que deux termes répondant à $\gamma = 1, 3$, on voit sans peine et indépendamment de ces formules, que pour une valeur impaire de $m$, elle se réduit à $2i(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, et qu'elle s'évanouit dans le cas contraire. Substituant les valeurs des deux sommes et remplaçant en même temps $(-1)^{\frac{P-1}{2}}$ par $i^{2\frac{P-1}{2}}$, on aura

$$2. \quad F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right) = i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{4P}$$

en supposant $m$ premier à $4P$. Dans le cas contraire le premier membre s'évanouit par ce qu'une au moins des sommes que nous venons de considérer, se réduit à zéro. Au moyen de ce résultat, on conclura

$$V = -\frac{i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}}{\sqrt{4P}}\, \Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log 2\sin\frac{m\pi}{4P} + i\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{m}{2P}\right)\right),$$

le signe s'étendant aux entiers $m$ inférieurs et premiers à $4P$. Si l'on observe que pour ces valeurs on a

$$\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right) = 0,$$

l'équation précédente prendra cette forme plus simple

$$V = -\frac{i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}}{\sqrt{4P}}\, \Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log\sin\frac{m\pi}{4P} - i\pi\frac{m}{4P}\right).$$

En distinguant maintenant les deux formes que le nombre $P$ peut présenter lorsqu'on le divise par 4, on aura

$$(b)\quad \begin{cases} P = 4\mu+3, & V = -\frac{1}{\sqrt{4P}}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{4P}, \\ P = 4\mu+1, & V = -\frac{\pi}{(\sqrt{4P})^3}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)m, \end{cases}$$

le signe sommatoire se rapportant aux entiers $m$ inférieurs et premiers à $4P$.

III. Les cas qui nous restent à considérer et qui répondent à $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$; $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$, étant entièrement semblables à ceux qui viennent d'être traités, nous indiquerons rapidement le calcul qui s'y applique. En conservant d'abord la valeur ambigue $\delta = \pm 1$, on aura

$$V = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)x^n}{x^{8P}-1}dx,$$

le signe $\Sigma$ s'étendant aux entiers $n$ inférieurs et premiers à $8P$. On conclut de là

$$V = -\frac{1}{8P}\Sigma A_m \int_0^1 \frac{dx}{x-e^{\frac{2m\pi}{8P}i}},$$

le signe $\Sigma$ se rapportant aux entiers compris entre $m=0$ et $m=8P-1$, et $A_m$ désignant pour abréger la somme

$$\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)e^{\frac{n}{8P}2m\pi i},$$

étendue aux entiers $n$ définis plus haut. En faisant

$$\frac{n}{8P} = \mu + \frac{\gamma}{8} + \frac{n'}{P},$$

il est facile de voir que $n$ recevra toutes les valeurs auxquelles la sommation doit s'étendre, en combinant les entiers $\gamma$ inférieurs et premiers à 8, avec les $n'$ inférieurs et premiers à $P$. Si l'on remarque en outre qu'en vertu du §. 2., la congruence $n \equiv P\gamma + 8n' \pmod{8P}$ entraine ces équations

$$\delta^{\frac{n-1}{2}} = \delta^{\frac{P-1}{2}}\delta^{\frac{\gamma-1}{2}},\quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{2}{P}\right)\left(\frac{n'}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}\left(\frac{n'}{P}\right),$$

l'expression $A_m$ prendra la forme

$$A_m = \delta^{\frac{P-1}{2}}f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)\Sigma\delta^{\frac{\gamma-1}{2}}(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}}e^{\gamma\frac{2m\pi}{8}i},$$

Tout se réduit donc à avoir la somme relative à $\gamma$. On pourrait la déduire du §. précédent; mais comme elle ne se compose que d'un nombre limité de termes qui répondent à $\gamma = 1, 3, 5, 7$, on voit de suite que l'orsqu'on a $\delta = 1$, la somme est zéro ou $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\sqrt{8}$, et que lorsqu'on a $\delta = -1$, elle est zéro ou $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} i\sqrt{8}$, suivant que $m$ est pair ou impair. On conclut de là ces deux équations

$$3.\quad \Sigma(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)e^{n\frac{2m\pi}{8P}i} = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{8P},$$

$$4.\quad \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)e^{n\frac{2m\pi}{8P}i} = (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}\sqrt{8P},$$

qui supposent $m$ premier à $8P$, et dont les seconds membres dans le cas contraire, doivent être remplacés par zéro. Au moyen de ces expressions le calcul s'achève comme dans les cas déjà examinés, et l'on trouve

$$(c)\begin{cases} \delta = 1,\quad \varepsilon = -1 \begin{cases} P = 4\mu+1, & V = -\frac{1}{\sqrt{8P}}\,\Sigma(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{8P}, \\ P = 4\mu+3, & V = -\frac{\pi}{(\sqrt{8P})^3}\,\Sigma(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)m, \end{cases} \\ \delta = -1,\ \varepsilon = -1 \begin{cases} P = 4\mu+3, & V = -\frac{1}{\sqrt{8P}}\,\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{8P}, \\ P = 4\mu+1, & V = -\frac{\pi}{(\sqrt{8P})^3}\,\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)m, \end{cases} \end{cases}$$

les sommations s'étendant aux entiers $m$ inférieurs et premiers à $8P$.

IV. Nous allons maintenant résoudre la question dont nous venons de nous occuper, par la première des deux méthodes indiquées plus haut, qui est celle des séries trigonométriques, en nous bornant toutefois, pour abréger, aux séries $V$ qui se rapportent aux déterminants négatifs. Soit en premier lieu $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $P = 4\mu+3$; on a alors

$$V = \Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

le signe $\Sigma$ se rapportant aux entiers $n$ impairs et premiers à $P$. D'après l'équation (1), on a pour un nombre $P$ de la forme $4\mu+3$,

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\sin n\frac{2m\pi}{P} = \left(\frac{n}{P}\right) \text{ ou } = 0,$$

suivant que $n$ est ou n'est pas premier à $P$, et le signe s'étendant aux entiers $m$ inférieurs et premiers à $P$. Si l'on introduit cette expression dans la série $V$ à la place de $\left(\frac{n}{P}\right)$, on pourra éteudre la sommation relative à $n$,

à tous les entiers impairs, l'expression précédente s'évanouissant pour des valeurs de $n$ qui ne sont pas premières à $P$. Il viendra ainsi, en intervertissant l'ordre des deux intégrations

$$V=\frac{1}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\Sigma\frac{1}{n}\sin n\frac{2m\pi}{P}.$$

La première intégration peut s'effectuer au moyen du résultat connu d'après lequel la série

$$5.\quad \frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\text{etc.}$$

a la valeur $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$, suivant que $x$ est compris entre 0 et $\pi$, ou entre $\pi$ et $2\pi$. En distinguant donc les valeurs de $m$, inférieures à $\frac{1}{2}P$ de celles qui surpassent $\frac{1}{2}P$, et désignant ces valeurs respectivement par $m'$ et $m''$, il viendra

$$V=\frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left(\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right)-\Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right).$$

Comme dans la seconde somme on peut évidemment remplacer $m''$ par $P-m'$, et qu'on a d'ailleurs, $P$ étant de la forme $4\mu+3$,

$$\left(\frac{P-m'}{P}\right)=\left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{m'}{P}\right)=-\left(\frac{m'}{P}\right),$$

on aura

$$V=\frac{\pi}{2\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right),$$

expression d'une forme différente de celle que nous avons trouvée plus haut. Si avant de sommer on avait divisé par $\left(1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)$, on serait tombé sur le même résultat que nous avons obtenu par l'autre méthode.

Soit en second lieu $\delta=-1$, $\varepsilon=1$, $P=4\mu+1$. On a alors

$$V=\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

où $n$ ne doit recevoir que des valeurs premières à $4P$. L'équation (2) donne pour ce cas

$$\frac{1}{\sqrt{4P}}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\sin n\frac{2m\pi}{4P}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)\text{ ou }=0,$$

suivant que $n$ est ou n'est pas premier à $4P$, et le signe s'étendant aux entiers $m$ inférieurs et premiers à $4P$. Introduisant cette expression dans la série $V$, il viendra

$$V=\frac{1}{\sqrt{4P}}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\Sigma\frac{1}{n}\sin n\frac{2m\pi}{4P}.$$

Comme l'expression qu'on a substituée, s'évanouit lorsque $n$ n'est pas pre-

mier à $4P$, on voit que l'on peut dans la somme $\Sigma\frac{1}{n}\sin n\frac{2m\pi}{4P}$, supposer à volonté que $n$ obtient toutes les valeurs entières ou seulement celles qui sont impaires. Dans la première supposition on aura en vertu de l'équation

$$\tfrac{1}{2}(\pi-x) = \frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\text{etc.}$$

qui subsiste dépuis $x=0$ jusqu'à $x=2\pi$,

$$\Sigma\frac{1}{n}\sin n\frac{2m\pi}{4P} = \tfrac{1}{2}\left(\pi-\frac{m\pi}{2P}\right),$$

et par suite

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)-\frac{\pi}{(\sqrt{4P})^3}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)m,$$

ou ce qui revient au même, la première somme étant évidemment nulle,

$$V = -\frac{\pi}{(\sqrt{4P})^3}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)m,$$

ce qui coïncide avec la valeur obtenue par l'autre méthode. Si en second lieu on suppose que $n$ ne reçoit que des valeurs impaires, on trouvera, au moyen de l'équation (5), et en désignant par $m'$ ou $m''$ les valeurs de $m$, suivant qu'elles sont inférieures ou supérieures à $2P$

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{4P}}\left(\Sigma(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\left(\frac{m'}{P}\right)-\Sigma(-1)^{\frac{m''-1}{2}}\left(\frac{m''}{P}\right)\right),$$

ou, en mettant $4P-m'$ à la place de $m''$, et observant qu'on a

$$(-1)^{\frac{4P-m'-1}{2}}\left(\frac{4P-m'}{P}\right) = -(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\left(\frac{m'}{P}\right),$$

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}}\Sigma(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\left(\frac{m'}{P}\right),$$

ce qui est une nouvelle expression de $V$.

Les deux autres cas étant traités de la même manière, on trouvera outre les résultats déjà obtenus par l'autre méthode, deux nouveaux résultats que nous allons réunir avec les deux précédents,

$$(d)\begin{cases}\delta=1, & \varepsilon=1, \quad P=4\mu+3,\ V=\frac{\pi}{2\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right),\\ \delta=-1, & \varepsilon=1, \quad P=4\mu+1,\ V=\frac{\pi}{2\sqrt{4P}}\Sigma(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\left(\frac{m'}{P}\right),\\ \delta=1, & \varepsilon=-1, \quad P=4\mu+3,\ V=\frac{\pi}{2\sqrt{8P}}\Sigma(-1)^{\frac{m'^2-1}{8}}\left(\frac{m'}{P}\right),\\ \delta=-1, & \varepsilon=-1, \quad P=4\mu+1,\ V=\frac{\pi}{2\sqrt{8P}}\Sigma(-1)^{\frac{m'-1}{2}+\frac{m'^2-1}{8}}\left(\frac{m'}{P}\right).\end{cases}$$

Les valeurs $m'$ sont premières à $P$, et en outre impaires dans les trois dernières équations. Quant aux limites des intégrations, on doit ajouter que les valeurs de $m'$ doivent être respectivement inférieures à $\frac{1}{2}P$, $2P$, $4P$, $4P$.

Les expressions de $V$ peuvent prendre beaucoup d'autres formes encore. On obtient, par exemple, des expressions différentes des précédentes et plus simples, si dans le cas où le terme général renferme l'un des facteurs $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$, ou l'un et l'autre de ces facteurs, on conserve ces facteurs dans la série, en n'introduisant les formules de Mr. *Gauſs* que pour remplacer l'expressions $\left(\frac{n}{P}\right)$. C'est ce que nous allons faire pour les trois derniers cas du tableau précédent ($d$). Dans le premier de ces trois cas, on a

$$V = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}, \quad P = 4\mu+1.$$

L'équation (1) donne dans ce cas,

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\cos n\frac{2m\pi}{P} = \left(\frac{n}{P}\right)\sqrt{P} \quad \text{ou} \quad = 0,$$

suivant que $n$ est ou n'est pas premier à $P$, et $m$ devant recevoir toutes les valeurs inférieures et premières à $P$. En substituant cette expression de $\left(\frac{n}{P}\right)$, on aura

$$V = \frac{1}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\cos n\frac{2m\pi}{P},$$

où la sommation relative à $n$, peut maintenant s'étendre à tous les entiers impairs. Or, l'on sait que la série

$$\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \text{etc.}$$

a la valeur $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{4}$, suivant que $x$ est compris entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$, entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, ou enfin entre $\frac{3\pi}{2}$ et $2\pi$. Si donc l'on désigne par $m'$, $m''$, $m'''$ respectivement les valeurs de $m$ comprises dans les trois intervalles, $0$ et $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{4}P$ et $\frac{3}{4}P$, $\frac{3}{4}P$ et $P$, on aura

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left[\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right].$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) = \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right) \text{ et } \Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right) = 0,$$

d'ou l'on conclut

$$(e) \qquad V = \frac{\pi}{\sqrt{P}} \Sigma\left(\frac{m'}{P}\right),$$

$m'$ désignant les valeurs premières à $P$, comprises entre 0 et $\frac{1}{4}P$.

Daus le second cas on a

$$V = \Sigma(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}, \quad P = 4\mu + 3.$$

En substituant la valeur de $\left(\frac{n}{P}\right)$ donnée par l'équation (1), il viendra

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{P}}\right)\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\Sigma(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\frac{1}{n}\sin n\frac{2m\pi}{P},$$

$n$ pouvant mainteuant recevoir toutes les valeurs impaires premières à $P$ ou non. Or la série

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \text{etc.}$$

étant sommée par les moyens connus, on trouve que sa valeur est respectivement

$$0, \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad 0, \quad -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad 0,$$

suivant celui des cinq intervalles

$$0 \text{ et } \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \text{ et } \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4} \text{ et } \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4} \text{ et } 2\pi,$$

dans lequel $x$ est compris. En désignant donc par $m'$ les valeurs de $m$ comprises entre $\frac{1}{8}P$ et $\frac{3}{8}P$, et par $m''$ celles qui tombent entre $\frac{5}{8}P$ et $\frac{7}{8}P$, on aura

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{2P}}\left[\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right],$$

ou plus simplement en observant qu'on peut remplacer $m''$ par $P - m'$, et qu'on a $\left(\frac{P-m'}{P}\right) = -\left(\frac{m'}{P}\right)$:

$$(f) \qquad V = \frac{\pi}{\sqrt{2P}} \Sigma\left(\frac{m'}{P}\right).$$

On trouve d'une manière toute semblable, $P$ étant de la forme $4\mu + 1$,

$$(g) \qquad V = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{\sqrt{2P}}\left(\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right),$$

en désignant par $m'$ et $m''$ les valeurs premières à $P$ et respectivement comprises daus les deux intervalles 0 et $\frac{1}{8}P$, $\frac{3}{8}P$ et $\frac{1}{2}P$. Il importe de remarquer que les équations $(e)$ et $(g)$ ne s'appliquent pas au cas où $P = 1$.

## §. 11.

On pourrait donner beaucoup d'autres formes à l'expression de la série $V$, soit que cette série réponde à un déterminant négatif, soit qu'elle se rapporte à un déterminant positif. Mais comme ces détails ne présentent aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas et nous passons à l'énumération des différents théorèmes, qui résultent des équations (19) et (23) du §. 6., lorsqu'on y introduit les expressions qui viennent d'être obtenues.

### *Déterminants positifs.*

I. $D = P, \quad P = 4\mu+1, \quad h = \dfrac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})} \log \dfrac{\Pi \sin \frac{b\pi}{P}}{\Pi \sin \frac{a\pi}{P}},$

où les entiers $m$ inférieurs et premiers à $P$, sont désignés par $a$ ou par $b$, suivant que l'équation $\left(\frac{m}{P}\right) = \pm 1$ a lieu avec le signe supérieur ou avec le signe inférieur.

II. $D = P, \quad P = 4\mu+3, \quad h = \dfrac{1}{\log(T+U\sqrt{P})} \log \dfrac{\Pi \sin \frac{b\pi}{4P}}{\Pi \sin \frac{a\pi}{4P}},$

où les entiers $m$ inférieurs et premiers à $4P$, sont désignés par $a$ ou par $b$, suivant que le signe ambigu dans l'équation $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right) = \pm 1$, est le signe supérieur ou inférieur.

III. $D = 2P, \quad P = 4\mu+1, \quad h = \dfrac{1}{\log(T+U\sqrt{2P})} \log \dfrac{\Pi \sin \frac{b\pi}{8P}}{\Pi \sin \frac{a\pi}{8P}},$

où les entiers $m$ inférieurs ou premiers à $8P$, sont désignés par $a$ ou par $b$ suivant que le signe ambigu dans l'équation $(-1)^{\frac{m^2-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right) = \pm 1$, est le signe supérieur ou inférieur.

IV. $D = 2P, \quad P = 4\mu+3, \quad h = \dfrac{1}{\log(T+U\sqrt{2P})} \log \dfrac{\Pi \sin \frac{b\pi}{8P}}{\Pi \sin \frac{a\pi}{8P}},$

où les entiers $m$ inférieurs et premiers à $8P$, sont désignés par $a$ ou par $b$ suivant que l'on a $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right) = +1$ ou $= -1$.

## *Déterminants négatifs.*

V. $D = -P$, $P = 4\mu + 3$, $k = \left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right) \frac{\Sigma b - \Sigma a}{P} = A - B$.

Dans cette équation $a$ et $b$ ont la même signification que dans le premier cas, et $A$ et $B$ désignent respectivement combien il existe de valeurs $a$ et $b$ au dessous de $\frac{1}{2}P$:

VI. $D = -P$, $P = 4\mu + 1$, $k = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{4P} = \frac{A - B}{2}$.

Les lettres $a$ et $b$ ont la même signification que dans le second cas, et $A$ et $B$ désignent respectivement les nombres des valeurs $a$ et $b$ qui sont inférieures à $2P$. On a encore dans ce sixième cas, en désignant par $A'$ et $B'$ les nombres des valeurs $a$ et $b$ au dessous de $\frac{1}{2}P$, $a$ et $b$ ayant le même sens que dans le premier cas:

$$k = 2(A' - B').$$

VII. $D = -2P$, $P = 4\mu + 3$, $k = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{8P} = \frac{A - B}{2}$

Les lettres $a$ et $b$ ont la même signification que dans le troisième cas et $A$ et $B$ désignent respectivement les nombres des valeurs $a$ et $b$ moindres que $4P$. On a encore dans ce septième cas, en désignant par $A'$ et $B'$ les nombres des valeurs $a$ et $b$, comprises entre $\frac{1}{4}P$ et $\frac{3}{4}P$, $a$ et $b$ ayant le même sens que dans le premier cas:

$$k = 2(A' - B').$$

VIII. $D = -2P$, $P = 4\mu + 1$, $k = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{8P} = \frac{A - B}{2}$,

où $a$ et $b$ ont le même sens que dans le quatrième cas, et $A$ et $B$ désignent les nombres des valeurs $a$ et $b$ qui tombent au dessous du $4P$. On a encore, si conservant aux lettres $a$ et $b$ la même signification que dans le premier cas, l'on désigne par $A'$, $B'$; $A''$, $B''$ les nombres des valeurs $a$ et $b$ qui sont contenues dans les deux intervalles compris entre 0 et $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{2}P$ et $\frac{3}{4}P$:

$$k = 2(A' - B' - A'' + B'').$$

---

Il nous reste à présenter quelques remarques sur les résultats qui viennent d'être énoncés. Pour parler d'abord des quatre premiers cas, nous devons dire que les expressions qui s'y rapportent quoique très simples, ne sont pas sous la forme qui en montre la véritable signification. Pour

leur donner cette forme, nous nous occuperons spécialement du premier de ces cas. Les trois autres donnent lieu à des remarques entièrement semblables. Soit $x$ une indéterminée et considérons les deux produits

$$\Pi\left(x-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right),\quad \Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right).$$

Il est évident qu'en posant

$$X=\Pi\left(x-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right)\Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right),$$

le polynome $X$ ne sera autre chose que le premier membre de l'équation que l'on obtient en délivrant l'équation binome $x^P-1=0$ de ses racines non-primitives. Il est facile de conclure de là que pour $x=1$, on a

$$X=1 \quad \text{ou} \quad X=P$$

suivant que le nombre des facteurs simples $p, p', p'', \ldots$ de $P$ est supérieur ou égal à l'unité. (Le cas où l'on aurait $P=1$, est exclu, le déterminant étant un carré dans ce cas.)

On a donc suivant les deux cas qui viennent d'être distingués,

$$\Pi\left(1-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right)\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)=1 \quad \text{ou} \quad =P.$$

On a aussi

$$\Pi\left(1-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right)=\Pi\left(-2i\sin\frac{a\pi}{P}\right).e^{\frac{\pi}{P}i\Sigma a},$$

$$\Pi\left(1-^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)=\Pi\left(-2i\sin\frac{b\pi}{P}\right).e^{\frac{\pi}{P}i\Sigma b},$$

et si l'on observe que les valeurs $a$ et $b$ sont en nombre égal, que la suite des valeurs $a$ renferme toujours avec un nombre $a$ son complément $P-a$, et qu'il en est de même de celle des valeurs $b$, on en conclura

$$\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}}=\frac{\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)}{\Pi\left(1-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right)},$$

et par suite en ayant égard à une équation précédente,

$$\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}}=\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)^2 \quad \text{ou} \quad =\frac{1}{P}\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)^2.$$

suivant les deux cas déjà distingués. La détermination de $k$ dépend donc du produit $\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)$. Or il résulte d'un théorème connu dû à Mr. *Gaufs* et qu'il est facile d'étendre au nombre composé $P$, que le polynome

$\Pi\left(x - e^{\frac{2h\pi}{P}i}\right)$ est toujours de la forme $\frac{1}{2}(Y + Z\sqrt{P})$, $Y$ et $Z$ étant des polynomes à coëfficients entiers. En désignant donc par $Y_1$ et $Z_1$, les valeurs que $Y$ et $Z$ prennent pour $x = 1$, et passant des logarithmes aux nombres, l'équation qui détermine $h$, deviendra

$$(T + U\sqrt{P})^h = \left(\frac{Y_1 + Z_1\sqrt{P}}{2}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}$$

$$\text{ou } (T + U\sqrt{P})^h = \left(\frac{Y_1 + Z_1\sqrt{P}}{2\sqrt{P}}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)},$$

suivant que le nombre des facteurs simples de $P$ est supérieur ou égal à l'unité. Sous cette forme les résultats qui se rapportent à un déterminant positif, paraîtront bien remarquables, s'il est vrai, comme l'a dit un illustre géomètre, que l'interêt que présentent les recherches arithmétiques ait sa source non-seulement dans la difficulté de la matière, mais surtout dans les rapports intimes que les recherches de ce genre dévoilent entre des théories entre lesquelles on ne soupçonnerait aucune connexion.

Quant au calcul des polynomes $Y$ et $Z$, il peut se faire, soit par la méthode de Mr. *Gauſs*, soit par un moyen dont *Legendre* a fait usage et qui est fondé sur les relations connues qui existent entre les coëfficients d'une équation et les sommes des puissances semblables de ses racines. Il est facile de voir qu'à l'aide de ces relations on peut obtenir successivement tous les coëfficients d'une équation lorsque les sommes des puissances de ses racines sont connues, comme cela arrive ici, la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$\Pi\left(x - e^{\frac{2h\pi}{P}i}\right) = 0,$$

résultant sans difficulté de la formule (1) du §. précédent.

On trouve ainsi, en supposant par exemple $P = 3.11$,

$$Y = 2x^{10} - x^9 + 8x^8 + 5x^7 + 2x^6 + 14x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 - x + 2,$$
$$Z = x^9 + x^7 + 2x^6 + 2x^4 + x^3 + x,$$

et par suite

$$Y_1 = 46, \quad Z_1 = 8.$$

Comme l'on a aussi $\left(\frac{2}{P}\right) = 1$, l'expression $\left(\frac{Y_1 + Z_1\sqrt{P}}{2}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}$ deviendra $(23 + 4\sqrt{33})^2$. On a d'un autre côté $T + U\sqrt{P} = 23 + 4\sqrt{33}$, d'où il suit $h = 2$, ce qui est exact, les formes qui répondent au déterminant 33, étant $x^2 - 33y^2$, $33x^2 - y^2$. Pour donner un exemple du cas où $P$ se

réduit à un nombre premier, soit $P = 17$; on trouve alors $Y_1 = 34$, $Z_1 = 8$, et l'expression $\left(\frac{Y_1 + Z_1 \sqrt{P}}{2\sqrt{P}}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}$ deviendra $(4 + \sqrt{17})^2 = 33 + 8\sqrt{17}$ ce qui est la première puissance de $T + U\sqrt{P} = 33 + 8\sqrt{17}$, comme cela doit être, puisque pour le déterminant 17 il n'existe que la seule forme $x^2 - 17y^2$.

Les expressions de $h$, relatives aux déterminants négatifs, n'ont besoin d'aucune explication. Nous ajouterons seulement que pour un cas particulier qui se rapporte au n°. V., le résultat avait déjà été indiqué par Mr. *Jacobi*. (Voir ce Journal Tome IX.)

Nous terminerons ce mémoire en indiquant une application que l'on peut faire des expressions de $h$, dans le cas des déterminants négatifs. On sait que lorsqu'un entier $k$ peut être décomposé en trois carrés, ou en d'autres termes lorsque l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = k$ est possible, le nombre de ses solutions dépend du nombre des formes dont le déterminant est $-k$. Les théorèmes qui fixent cette dépendance, ont d'abord été découverts par *Legendre* dans les cas les plus simples et par voie d'induction. Mr. *Gauſs* les a ensuite démontrés d'une manière générale et très ingénieuse dans la 5ième section de son ouvrage. Il est évident qu'il suffit de comparer les théorèmes dont il s'agit, avec les résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce §. et dans le §. 8., pour en conclure par la simple élimination du nombre des formes quadratiques, qui entre dans les uns et dans les autres, de nouvelles expressions pour le nombre des solutions de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = k$, expressions qui ne renfermeront plus rien qui soit relatif aux formes quadratiques. Je me bornerai ici à cette seule remarque et je n'entreprendrai pas quant à présent l'énumération de ces nouveaux théorèmes; ces détails seront mieux placés dans un autre mémoire dans lequel je chercherai à établir les résultats dont il s'agit d'une manière directe et sans y faire concourir les deux théories dont je viens de parler.

---

# 10.

# Anwendungen der Statik auf die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften.

(Vom Hrn. Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 4. im vorigen Hefte.)

---

## II. Vom Gleichgewichte bei sich gleichbleibenden Figuren.

7. Zwei Systeme von Puncten in Ebenen heifsen einander *gleich*, wenn jedem Puncte des einen Systems ein Punct des andern auf eine solche Weise entspricht, dafs je zwei geradlinige Figuren, deren Spitzen sich entsprechende Puncte sind, einerlei Flächeninhalt haben.

Soll hiernach zu dem Systeme von Puncten $F, G, H, A, A_1, \ldots$ in der einen Ebene ein entsprechendes $F', G', H', A', A'_1, \ldots$ in der andern construirt werden, so nehme man $F'$ und $G'$ ganz willkürlich und $H'$ von $F'G'$ in solchem Abstande, dafs das Dreieck $F'G'H'$ mit $FGH$ gleichen Inhalt hat. Der dem $A$ entsprechende Punct $A'$ wird hierauf dadurch bestimmt, dafs die Dreiecke $A'F'G'$ und $A'G'H'$ resp. den Dreiecken $AFG$ und $AGH$ dem Inhalte nach gleich werden. Auf dieselbe Weise läfst sich der dem $A_1$ entsprechen sollende Punct $A'_1$ finden u. s. w., und es werden alsdann aufser den einander gleich gemachten Dreiecken auch je zwei andere, deren Ecken sich entsprechende Puncte sind, gleichen Inhalt haben, und mithin die beiden Figuren einander gleich sein.

Um dieses zu zeigen, beziehe man in jeder der beiden Ebenen die Puncte derselben auf zwei in ihr beliebig gezogene, sich unter rechten Winkeln schneidende Axen und setze hiernach die Coordinaten von $A$, $= x, y$; die von $A'$, $= t, u$. Die Bedingung, dafs die Dreiecke $AFG$ und $A'F'G'$ gleichen Inhalt haben sollen, führt zu einer Gleichung von der Form

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta t + \varepsilon u = 0,$$

deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ Functionen der Coordinaten von $F, G, F', G'$ sind. Eine eben so geformte Gleichung mit Coefficienten, welche Functionen der Coordinaten von $G, H, G', H'$ sind, erhält man aus der Gleichheit der Dreiecke $AGH$ und $A'G'H'$. Eliminirt man aus diesen zwei

Gleichungen das einemal $y$, das anderemal $x$, so kommen zwei Gleichungen von der Form

$$1. \quad \begin{cases} x = at + bu + f, \\ y = a't + b'u + f', \end{cases}$$

deren Coefficienten $a, b, \ldots f$ von den Coordinaten von $F, G, H, F', G', H'$ abhängen, und zwischen welchen, wegen der Gleichheit der Dreiecke $FGH$ und $F'G'H'$ noch eine gewisse Relation stattfinden mufs.

Sind nun $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ t_1, u_1;\ t_2, u_2$ resp. die Coordinaten der Puncte $A_1, A_2$ und der ihnen entsprechenden $A'_1, A'_2$, so hat man auf gleiche Weise

$$x_1 = at_1 + bu_1 + f, \qquad x_2 = at_2 + bu_2 + f,$$
$$y_1 = a't_1 + b'u_1 + f', \qquad y_2 = a't_2 + b'u_2 + f'.$$

Substituirt man diese Werthe von $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2$ in

$$x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1),$$

als dem Ausdrucke für den doppelten Inhalt des Dreiecks $AA_1A_2$, so kommt nach gehöriger Reduction:

$$x(y_1 - y_2) + \ldots = (ab' - a'b)\{t(u_1 - u_2) + t_1(u_2 - u) + t_2(u - u_1)\},$$

d. i. $AA_1A_2 = (ab' - a'b)A'A'_1A'_2$.

Indem man daher jedem Puncte $(t, u)$ der einen Ebene nach dem durch die Gleichungen (1) ausgedrückten Gesetze einen Punct $(x, y)$ in der andern entsprechen läfst, werden je zwei einander entsprechende Dreiecke in einem constanten Verhältnisse stehen; und wenn man zwischen den Coefficienten der Gleichungen (1) noch die Relation

$$2. \quad ab' - a'b = 1$$

festsetzt, so werden je zwei einander entsprechende Figuren einander gleich sein.

Die Puncte $(t, u)$ einer Ebene als gegeben angenommen, wird man demnach irgend ein diesem Systeme von Puncten gleiches System von Puncten $(x, y)$ erhalten, wenn man letztere aus ersteren mittelst der Gleichungen (1) bestimmt und dabei den Coefficienten $a, b, f, a', b', f'$ mit Berücksichtigung der Relation (2) beliebige constante Werthe beilegt; oder mit andern Worten: nimmt man die Coordinaten der Puncte $(t, u)$ constant an, und die Coefficienten $a, \ldots f'$ von einem dieser Puncte zum andern in einem und demselben Zeitpuncte ebenfalls constant, aber von einem Zeitpuncte zum andern beliebig veränderlich, nur dafs die Function $ab' - a'b = 1$ bleibt, oder doch einen constanten Werth behält, so sind die

durch die Gleichungen (1) bestimmten Puncte $(x, y)$ auf jede beliebige Weise so beweglich, dafs die von ihnen gebildete Figur sich immer *gleich* bleibt.

8. Wir wollen nun auf die solchergestalt in einer Ebene beweglichen Puncte $(x, y)$ Kräfte $(X, Y)$ wirken lassen, deren Richtungen in derselben Ebene begriffen sind, und wollen die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen denselben untersuchen. Diese Bedingungen ergeben sich durch Entwickelung der Gleichung $\Sigma(X\,dx + Y\,dy) = 0$, wenn man darin für $dx$ und $dy$ ihre aus der Differentiation von (1) folgenden Werthe setzt, bei dieser Differentiation aber $t$ und $u$ constant und $a, \ldots f'$ dergestalt veränderlich nimmt, dafs $ab' - a'b$ constant bleibt. Dies giebt:

$$dx = df + t\,da + u\,db,$$
$$dy = df' + t\,da' + u\,db',$$

oder, weil aus (1) in Verbindung mit (2)

$$t = b'(x-f) - b(y-f'),$$
$$u = a(y-f') - a'(x-f) \text{ folgt:}$$
$$dx = df - (x-f)(a'db - b'da) + (y-f')(a\,db - b\,da),$$
$$dy = df' - (x-f)(a'db' - b'da') + (y-f')(a\,db' - b\,da');$$

und wenn man noch wegen (2):

$$a\,db' - b\,da' = a'db - b'da = dp \quad \text{und überdies}$$
$$a\,db - b\,da = dq \quad \text{und} \quad a'db' - b'da' = dq' \text{ setzt:}$$
$$dx = df - (x-f)\,dp + (y-f')\,dq,$$
$$dy = df' - (x-f)\,dq' + (y-f')\,dp,$$

wo $df, df', dp, dq, dq'$ fünf von einander unabhängige Differentiale sind. Hiermit wird:

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy) = (df + f\,dp - f'\,dq)\Sigma X + (df' - f'\,dp + f\,dq')\Sigma Y$$
$$- dp\,\Sigma(Xx - Yy) + dq\,\Sigma Xy - dq'\,\Sigma Yx,$$

woraus, wegen der Unabhängigkeit zwischen den Differentialen, $df, \ldots dq'$, folgende fünf Bedingungen des Gleichgewichts fliefsen:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Xy = 0, \quad \Sigma Yx = 0, \quad \Sigma(Xx - Yy) = 0.$$

Wie gehörig, sind hierunter die drei Bedingungen mitbegriffen, wenn die gegenseitigen Entfernungen der Angriffspuncte unveränderlich sind, die Bedingungen nämlich: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma(Xy - Yx) = 0$. Aufserdem aber müssen noch die zwei Bedingungen $\Sigma Xy = 0$, oder $\Sigma Yx = 0$ und $\Sigma(Xx - Yy) = 0$ erfüllt werden.

Ferner sieht man schon im Voraus, dafs die fünf erhaltenen Gleichungen unabhängig von der Lage der Coordinaten-Axen sein müssen. Dies bestätigt sich auch leicht durch Rechnung. Denn gehen $x$, $y$, $X$, $Y$ für ein anderes Axensystem über in $x'$, $y'$, $X'$, $Y'$, und macht die Axe der $x'$ mit der Axe der $x$ einen Winkel $= \alpha$, so hat man, bei unverändert bleibendem Anfangspuncte:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad X' = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \qquad Y' = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha;$$

woraus folgt

$$\Sigma X'y' = -\sin\alpha\cos\alpha\,\Sigma(Xx - Yy) + \cos\alpha^2\,\Sigma Xy - \sin\alpha^2\,\Sigma Yx,$$
$$\Sigma Y'x' = -\sin\alpha\cos\alpha\,\Sigma(Xx - Yy) + \sin\alpha^2\,\Sigma Xy + \cos\alpha^2\,\Sigma Yx,$$
$$\Sigma(X'x' - Y'y') = \cos 2\alpha\,\Sigma(Xx - Yy) + \sin 2\alpha(\Sigma Xy + \Sigma Yx).$$

Vermöge der drei letzten unter den fünf Bedingungsgleichungen sind daher auch $\Sigma X'y' = 0$, $\Sigma Y'x' = 0$ und $\Sigma(X'x' - Y'y') = 0$. Dafs endlich auch $\Sigma X' = 0$ und $\Sigma Y' = 0$ und dafs die Veränderung des Anfangspunctes der Coordinaten an der Form der Bedingungsgleichungen nichts ändert, bedarf keiner Erörterung.

9. Das einfachste Beispiel, auf welches wir die jetzt vorgetragene Theorie anwenden können, ist ein System von drei Puncten, da bei nur zwei Puncten von *Gleichheit* der Figuren in der hier festgesetzten Bedeutung des Worts noch nicht die Rede sein kann.

Bei drei Puncten werden die fünf Bedingungen des Gleichgewichts:

$$X + X_1 + X_2 = 0, \qquad Y + Y_1 + Y_2 = 0,$$
$$Xy + X_1y_1 + X_2y_2 = 0, \qquad Yx + Y_1x_1 + Y_2x_2 = 0,$$
$$Xx - Yy + X_1x_1 - Y_1y_1 + X_2x_2 - Y_2y_2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen mittelst der zwei ersten $X_2$ und $Y_2$ eliminirt, erhält man:

$$X(y - y_2) + X_1(y_1 - y_2) = 0, \qquad Y(x - x_2) + Y_1(x_1 - x_2) = 0,$$
$$X(x - x_2) - Y(y - y_2) + X_1(x_1 - x_2) - Y_1(y_1 - y_2) = 0;$$

und wenn man hieraus noch $X_1$ und $Y_1$ wegschafft:

$$X(x_1 - x_2) + Y(y_1 - y_2) = 0,$$

eine Gleichung, welche zu erkennen giebt, dafs die Richtung der am Puncte $(x, y)$ angebrachten Kraft $(X, Y)$ auf der Geraden, welche die beiden andern Puncte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ verbindet, perpendicular sein mufs. Da nun dasselbe auf analoge Weise auch für jede der beiden andern Kräfte gelten mufs, so schliefsen wir Folgendes:

„Sind drei Puncte in einer Ebene dergestalt beweglich, dafs der Inhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks immer derselbe bleibt, und sollen drei auf sie in der Ebene wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so mufs aufser den Bedingungen, welche nöthig sind, wenn die gegenseitige Lage der Puncte unveränderlich ist, auch noch die erfüllt werden, dafs jede Kraft die ihrem Angriffspuncte gegenüberliegende Seite des Dreiecks rechtwinklig schneidet."

10. Zusätze. *a*) Da drei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte sich in einem Puncte schneiden, so folgt hieraus der bekannte Satz, dafs die drei von den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks gefällten Perpendikel sich in einem Puncte treffen.

*b*) Die Nothwendigkeit der Bedingung, dafs jede Kraft auf der ihrem Angriffspuncte gegenüberliegenden Seite des Dreiecks normal ist, läfst sich auch folgendergestalt ohne alle Rechnung darthun. Nennen wir $A$, $B$, $C$ die drei Puncte und $P$, $Q$, $R$ die an ihnen sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte. Man lasse zwei der Puncte, etwa $B$ und $C$, unbeweglich werden. Hierdurch wird das vorausgesetzte Gleichgewicht nicht gestört, die Kräfte $Q$ und $R$ verlieren ihre Wirkung, und die Kraft $P$ mufs so beschaffen sein, dafs sie ihren allein noch beweglichen Angriffspunct $A$ nicht in Bewegung setzen kann. Da aber das Dreieck $ABC$ sich immer gleich bleiben soll, und $B$ und $C$ jetzt fest sind, so ist $A$ in einer Parallele mit $BC$ beweglich. Mithin mufs die Richtung von $P$ auf dieser Parallele, folglich auch auf $BC$ selbst, perpendicular sein.

*c*) Sind die Richtungen von $P$, $Q$, $R$ resp. auf $BC$, $CA$, $AB$ perpendicular, so ergänzen die Winkel $Q^{\wedge}R$, $R^{\wedge}P$, $P^{\wedge}Q$ die Dreieckswinkel $A$, $B$, $C$ zu $180°$. Da nun beim Gleichgewichte die Kräfte $P$, $Q$, $R$ sich wie die Sinus von $Q^{\wedge}R$, .... verhalten, und da die Sinus von $A$, $B$, $C$ den Dreiecksseiten $BC$, $CA$, $AB$ proportional sind, so ersieht man, dafs im vorliegenden Falle die Kräfte den ihren Angriffspuncten gegenüberliegenden Seiten proportional sind.

*d*) Die im obigen Satze angegebenen Bedingungen des Gleichgewichts sind nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend. Denn die Bedingungen, unter welchen die Kräfte bei Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage der drei Puncte im Gleichgewichte sind, werden durch drei Gleichungen ausgedrückt; und die Bedingung, dafs zwei der Kräfte, mithin auch die dritte, auf den ihren Angriffspuncten gegenüberliegenden Seiten

perpendicular sind, führt zu zwei Gleichungen. Man hat daher in Allem fünf Gleichungen; wie erforderlich.

11. Sind bei einem Systeme von $n$ Puncten die Oerter derselben durch ihre Coordinaten gegeben, so können von den $2n$ Kräften $X$, $Y$, $X_1$, $Y_1$, .... noch irgend $2n-5$ nach Belieben bestimmt werden. Die 5 übrigen ergeben sich mit Hülfe der 5 Bedingungsgleichungen. Es können daher auch von den auf die $n$ Puncte wirkenden $n$ Kräften $X$, $Y$, .... $n-3$ ihrer Stärke und Richtung nach ganz willkürlich und von der $(n-2)$ten die Stärke oder die Richtung gegeben sein, und es werden sich daraus die $n$te und $n-1$te Kraft und von der $n-2$ten die noch unbekannte Richtung oder Stärke bestimmen lassen.

So lassen sich z. B. bei einem Systeme von 4 Puncten $A, B, C, D$, an welchem die Kräfte $P$, $Q$, $R$, $S$ mit einander im Gleichgewichte sein sollen, die Kraft $P$ ganz und von $Q$ etwa die Richtung nach Willkür annehmen und daraus die Stärke von $Q$ und die Kräfte $R$ und $S$ finden. Dies kann durch wiederholte Anwendung des Satzes in §. 10. folgendergestalt geschehen.

Man bringe an $A$, $B$, $C$ drei Kräfte $P'$, $Q'$, $R'$ an, welche für sich mit einander im Gleichgewichte sind, also drei Kräfte, deren Richtungen resp. auf $BC$, $CA$, $AB$ rechtwinklig und deren Intensitäten diesen Linien proportional sind. Eben so bringe man an $A$, $B$, $D$ die für sich im Gleichgewichte stehenden Kräfte $P''$, $Q''$, $S''$, und an $B$, $C$, $D$ die für sich das Gleichgewicht sich haltenden Kräfte $Q'''$, $R'''$, $S'''$ an. Es werden daher auch alle diese Kräfte zusammen an $A$, $B$, $C$, $D$ im Gleichgewichte sein. Bei jeder dieser drei Ternionen von Kräften kann aber die Intensität einer Kraft nach Willkür bestimmt werden. Man bestimme demnach, was immer möglich ist, die Intensitäten von $P'$ und $P''$ so, dafs ihre Resultante die Intensität und Richtung einer gegebenen Kraft $P$ erhält. Hiermit sind auch die Intensitäten von $Q'$, $R'$, $Q''$, $S''$ bestimmt, also auch die Resultante von $Q'$ und $Q''$, welche $Q_1$ heifsen mag. Man gebe endlich, was gleichfalls immer möglich ist, der Kraft $Q'''$ eine solche Intensität, dafs sie, mit $Q_1$ verbunden, eine Kraft $Q$ von gegebener Richtung erzeugt. Hiermit erhalten auch die Intensitäten von $R'''$ und $S'''$ bestimmte Werthe; und wenn man jetzt noch $R'$, $R'''$ zu einer Kraft $R$, und $S''$, $S'''$ zu einer Kraft $S$ vereinigt, so ist die Aufgabe gelöset.

12. Man sieht leicht, wie dasselbe Verfahren auch auf ein System von 5 und mehreren Puncten angewendet werden kann, und es würde überflüssig sein, hierbei länger zu verweilen. Dagegen wird man zu einigen bemerkenswerthen Resultaten geführt, wenn man die Aufgabe für vier und mehrere Puncte auf ähnliche Art, wie oben bei drei Puncten geschahe, analytisch behandelt.

In dieser Absicht wollen wir zunächst bei einem System von 4 Puncten die 5 Bedingungsgleichungen zwischen $x, y, \ldots x_3, y_3$ und $X, Y, \ldots X_3, Y_3$ aufstellen und die aus ihnen durch Elimination von $X, Y, X_1, Y_1$ sich ergebende Gleichung suchen. Um die Rechnung möglichst zu vereinfachen, wollen wir zum Anfangspuncte der Coordinaten den Punct $(x, y)$ nehmen und die Axe der $x$ durch den Punct $(x_1, y_1)$ legen, also $x$, $y$ und $y_1$ gleich Null setzen. Dies ist gestattet, weil nach §. 8. die 5 Gleichungen unabhängig von der Lage der Coordinaten-Axen sind. Die 5 Gleichungen werden damit:

$$X+X_1+X_2+X_3=0, \qquad Y+Y_1+Y_2+Y_3=0,$$
$$X_2y_2+X_3y_3=0, \quad Y_1x_1+Y_2x_2+Y_3x_3=0,$$
$$X_1x_1+X_2x_2-Y_2y_2+X_3x_3-Y_3y_3=0.$$

Hiervon ist aber bereits die dritte Gleichung: $X_2y_2+X_3y_3=0$ als durch Elimination von $X, \ldots Y_1$ hervorgegangen anzusehen und wir sind damit weiterer Rechnung überhoben. Bezeichnen wir die Puncte $(x, y)$, $(x_1, y_1)$, .... und die Kräfte $(X, Y)$, $(X_1, Y_1)$, .... kurz durch $A$, $B$, $C$, $D$ und $P$, $Q$, $R$, $S$, so drückt diese Gleichung aus, dafs, wenn man von den zwei auf $C$ und $D$ wirkenden Kräften $R$ und $S$ jede in zwei zerlegt, von denen die eine mit $AB$ parallel, die andere auf $AB$ perpendicular ist, und man die zwei mit $AB$ parallelen Kräfte in die Abstände ihrer Angriffspuncte $C$ und $D$ von $AB$ multiplicirt, die Summe dieser Producte Null ist.

Es hat keine Schwierigkeit, sich von der Wahrheit dieses Satzes unmittelbar zu überzeugen. Man lasse nämlich ähnlicherweise, wie vorhin bei einem Systeme von 3 Puncten, die zwei Puncte $A$ und $B$ unbeweglich werden. Wegen der Unveränderlichkeit des Inhalts der Dreiecke $ABC$ und $ABD$ bleiben alsdann $C$ und $D$ nur noch in Parallelen mit $AB$ beweglich. Nach der Zerlegung der jetzt allein zu berücksichtigenden Kräfte $R$ und $S$ nach Richtungen, die auf $AB$ perpendicular und mit $AB$ parallel sind, können daher die auf $AB$ perpendicularen Kräfte von beliebiger Gröfse sein. Zwischen den mit $AB$ parallelen Kräften aber,

welche resp. $R'$ und $S'$ heifsen, mufs eine Relation Statt finden, welche dadurch bestimmt wird, dafs das Dreieck $ACD$ seinen Inhalt nicht ändert, wobei auch das Dreieck $BCD$, wegen der Beständigkeit des Inhalts von $ABC$, $ABD$, seinem Inhalte nach unverändert bleiben wird. Es ist aber der Inhalt von $ACD = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$. Soll nun derselbe constant bleiben, während $C$ und $D$ sich in Parallelen mit $AB$, d. i. mit der Axe der $x$ bewegen, während also $y_2$ und $y_3$ constant bleiben und $x_2$ und $x$ sich etwa um $c$ und $d$ ändern, so mufs $cy_3 - dy_2 = 0$ sein; die mit $AB$ parallelen Wege $c$ und $d$ der Puncte $C$ und $D$ müssen sich daher wie die Entfernungen $y_2$ und $y_3$ derselben von $AB$ verhalten. Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten müssen aber die Wege $c$ und $d$, welche $C$ und $D$ vermöge ihrer Verbindung gleichzeitig beschreiben können, multiplicirt in die nach diesen Wegen wirkenden Kräfte $X_2$ und $X_3$, eine Summe $= 0$ geben; es mufs folglich $X_2 c + X_3 d = 0$, folglich auch $X_2 y_2 + X_3 y_3 = 0$ sein; wie zu erweisen war.

13. Verfährt man auf ähnliche Weise bei einem Systeme von 5 Puncten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, nimmt den ersten derselben, $A$ oder $(x, y)$, zum Anfangspuncte der Coordinaten und legt die Axe der $x$ durch den zweiten, $B$ oder $(x_1, y_1)$, so ist es die Gleichung:

$$X_2 y_2 + X_3 y_3 + X_4 y_4 = 0,$$

welche aus der Elimination von $X$, $Y$, $X_1$, $Y_1$ hervorgegangen zu betrachten ist. Sie zeigt an, dafs, wenn man die auf $C$, $D$, $E$ wirkenden Kräfte $Q$, $R$, $S$ auf $AB$ projicirt, und diese Projectionen resp. in die Abstände der Puncte $C$, $D$, $E$ von $AB$ multiplicirt, die Summe dieser Producte Null sein mufs.

Um sich auch hiervon den Grund unmittelbar aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten deutlich zu machen, nehme man wiederum $A$ und $B$ unbeweglich an. Da die Figur $ABCDE$, und folglich auch jedes der beiden Vierecke $ABCD$ und $ABDE$, sich immer gleich bleiben sollen, so sind nach dem Vorigen die Puncte $C$, $D$, $E$ nur in Parallelen mit $AB$ beweglich, und wenn $c$, $d$, $e$ die gleichzeitig von ihnen beschriebenen Wege bedeuten, so verhalten sich $c:d = y_2:y_3$ und $d:e = y_3:y_4$; d. h. die von $C$, $D$, $E$ parallel mit $AB$ beschriebenen Wege sind den Abständen dieser Puncte von $AB$ proportional, und es mufs folglich, da die auf $C$, $D$, $E$ wirkenden Kräfte, nach den Richtungen dieser Wege geschätzt, $= X_2$, $X_3$, $X_4$ sind, beim Gleichgewichte $X_2 y_2 + X_3 y_3 + X_4 y_4 = 0$ sein.

Ueberhaupt also, — denn dieselben Schlüsse lassen sich auch auf jedes System von mehreren Puncten ausdehnen — müssen bei einem Systeme von $n$ Puncten, die Abstände von $n-2$ derselben von der Geraden, welche die 2 übrigen Puncte verbindet, multiplicirt mit den resp. auf die Puncte wirkenden und parallel mit jener Geraden geschätzten Kräften, eine Summe $=0$ geben. Der Grund hiervon aber kann unmittelbar in der Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf den Satz nachgewiesen werden, dafs bei einem Systeme von Puncten in einer Ebene, welches sich immer gleich bleiben soll, sobald zwei der Puncte unbeweglich gesetzt werden, die übrigen in Parallelen mit der jene zwei Puncte verbindenden Geraden beweglich bleiben, und dafs die gleichzeitig von ihnen beschriebenen Wege sich wie ihre Entfernungen von der Geraden verhalten.

14. Werden in der Ebene, aufser dem rechtwinkligen Systeme der Coordinaten $x$ und $y$, noch zwei dergleichen beliebig angenommen, und sind in Bezug auf sie $x'$, $y'$ und $x''$, $y''$ die Coordinaten des Punctes $(x, y)$, so wie $(X', Y')$ und $(X'', Y'')$ die Ausdrücke der auf diese neuen Systeme bezogenen Kraft $(X, Y)$; sind endlich $\alpha$ und $\alpha'$ die Winkel der Axen der $x'$ und $x''$ mit der Axe der $x$, so hat man nach §. 8.

$$\Sigma X'y' = -\sin\alpha\cos\alpha\,\Sigma(Xx-Yy)+\cos\alpha^2\,\Sigma Xy-\sin\alpha^2\,\Sigma Yx,$$
$$\Sigma X''y'' = -\sin\alpha'\cos\alpha'\,\Sigma(Xx-Yy)+\cos\alpha'^2\,\Sigma Xy-\sin\alpha'^2\,\Sigma Yx.$$

Es folgt hieraus, wenn man $\Sigma Xy=0$, $\Sigma X'y'=0$ und $\Sigma X''y''=0$ setzt:

$$0 = \sin\alpha\cos\alpha\,\Sigma(Xx-Yy)+\sin\alpha^2\,\Sigma Yx,$$
$$0 = \sin\alpha'\cos\alpha'\,\Sigma(Xx-Yy)+\sin\alpha'^2\,\Sigma Yx,$$

und hieraus:

$$0 = \sin\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha'-\alpha)\,\Sigma Yx,$$
$$0 = \sin\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha'-\alpha)\,\Sigma(Xx-Yy);$$

folglich $\Sigma Yx=0$ und $\Sigma(Xx-Yy)=0$, wofern weder $\alpha$, noch $\alpha'$, noch $\alpha'-\alpha$, einem Vielfachen von 180° gleich ist, d. h. wofern von den drei Axen der $x$, der $x'$ und der $x''$ keine zwei mit einander parallel sind. Statt der obigen 5 Bedingungen des Gleichgewichts kann man daher auch folgende fünf setzen:

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Xy=0,\quad \Sigma X'y'=0,\quad \Sigma X''y''=0;$$

d. h. „Bei einem in einer Ebene enthaltenen Systeme von Kräften, welche auf Puncte der Ebene wirken, die dergestalt beweglich sind, dafs die von ihnen gebildete Figur sich immer gleich bleibt, ist es zum Gleichgewichte

nothwendig und hinreichend: erstens, dafs die Kräfte, wenn sie parallel mit ihren Richtungen an einen und denselben Punct getragen werden, sich das Gleichgewicht halten, und dafs zweitens für jede von drei in der Ebene liegenden Axen, von denen keine zwei mit einander parallel sind, die Summe der Entfernungen der Puncte von der Axe, jede Entfernung vorher mit der auf den Punct wirkenden und nach der Richtung der Axe geschätzten Kraft multiplicirt, Null ist."

Zusatz. *a*) Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt die Relation, welche für jede der drei Axen Statt findet, auch für jede vierte.

*b*) Die Nothwendigkeit dieser Relation für jede Axe der Ebene, läfst sich auf ähnliche Art wie im Obigen unmittelbar dadurch beweisen, dafs man die Axe als mit zu dem Systeme der Puncte gehörig betrachtet und unbeweglich annimmt, als wodurch die Puncte nur parallel mit dieser Axe beweglich bleiben, und ihre gleichzeitigen Geschwindigkeiten sich wie ihre Entfernungen von der Axe verhalten.

*c*) Hat das System in der That eine unbewegliche Axe, oder, was dasselbe ist, zwei unbewegliche Puncte, so ist es zum Gleichgewichte schon hinreichend, wenn hinsichtlich dieser Axe allein die vorhin gedachte Relation besteht.

15. Ein System von vier oder mehreren Puncten im Raume bleibt sich gleich, wenn jede von je vier Puncten gebildete Pyramide ihren Inhalt nicht ändert. Es entsteht daher noch die Frage nach den Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf dergestalt im Raume bewegliche Puncte wirken, dafs jede von je vier Puncten gebildete Pyramide von gleichem Inhalte bleibt. Die deshalb anzustellende Rechnung ist der für den eben betrachteten Fall, wo das System in einer Ebene enthalten war, ganz ähnlich, daher wir dieselbe nur kurz andeuten wollen.

Ist das System der Puncte $(x, y, z)$ dem System der Puncte $(t, u, v)$ gleich, so finden zwischen den Coordinaten jedes Punctes des einen Systems und den Coordinaten des entsprechenden Punctes im andern System Gleichungen von der Form Statt:

$$x = at + bu + cv + f,$$
$$y = a't + b'u + c'v + f',$$
$$z = a''t + b''u + c''v + f''$$

Zwischen den von einem Puncte zum andern constanten Zahlen $a, \ldots c''$

aber besteht die Relation:

$$1.\quad a(b'c''-b''c')+b(c'a''-c''a')+c(a'b''-a''b')=1.$$

Wir nehmen nun an, dafs die Puncte $(t, u, v)$ ungeändert bleiben, die Puncte $(x, y, z)$ aber ihre Lage um ein unendlich Geringes so ändern, dafs die von ihnen gebildete Figur der Figur der Puncte $(t, u, v)$, und folglich auch sich selbst, gleich bleibt. Die dadurch entstehenden Aenderungen von $x, y, z$ ergeben sich durch Differentiation der obigen Werthe dieser Coordinaten, indem man dabei blofs $t, u, v$ constant annimmt und zwischen den Differentialen von $a \dots c''$ die aus der Differentiation von (1) entspringende Gleichung bestehen läfst. Substituirt man in diesen Werthen von $dx, dy, dz$ für $t, u, v$ ihre durch $x, y, z$ ausgedrückten Werthe, so kommt:

$$\begin{aligned} dx &= df\ +(x-f)\,d\alpha\ +(y-f')\,d\beta\ +(z-f'')\,d\gamma, \\ dy &= df'\ +(x-f)\,d\alpha'+(y-f')\,d\beta'+(z-f'')\,d\gamma', \\ dz &= df''+(x-f)\,d\alpha''+(y-f')\,d\beta''+(z-f'')\,d\gamma'', \end{aligned}$$

wo $d\alpha, d\beta, \dots d\gamma''$ Functionen von $a, b, \dots c''$ und deren Differentialen sind, die aufserdem, dafs zwischen $d\alpha$, $d\beta'$ und $d\gamma''$ wegen (1) die Relation

$$2.\quad d\alpha+d\beta'+d\gamma''=0$$

besteht, von einander ganz unabhängig sind.

Sei nun $(X, Y, Z)$ die auf den Punct $(x, y, z)$ wirkende Kraft. Man entwickele $\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)$, indem man für $dx, dy, dz$ ihre vorhin angegebenen Werthe setzt. Da dieses Aggregat bei jeder möglichen Verrückung der Puncte $(x, y, z)$ Null sein mufs, so ergeben sich mit Berücksichtigung von (2) und wegen der übrigens von einander unabhängigen Differentiale $d\alpha, d\beta, \dots$, folgende eilf Gleichungen als Bedingungen des Gleichgewichts:

$$\begin{aligned} &\Sigma X=0, && \Sigma Y=0, && \Sigma Z=0, \\ &\Sigma Yz=0, && \Sigma Zx=0, && \Sigma Xy=0, \\ &\Sigma Zy=0, && \Sigma Xz=0, && \Sigma Yx=0, \end{aligned}$$

$$\Sigma Xx=\Sigma Yy=\Sigma Zz.$$

Ganz wie bei einem System von Puncten in einer Ebene, und wie auch schon aus der Natur der Sache folgt, läfst sich auch hier zeigen, dafs diese Gleichungen von der Lage des Coordinatensystems unabhängig sind. Legt man die Ebene der $x, y$ durch die Puncte $(x, y, z)$, $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, so werden $z, z_1, z_2=0$ und die Gleichungen $\Sigma Xz=0$ und $\Sigma Yz=0$

reduciren sich auf

8. $X_3 z_3 + X_4 z_4 + \ldots = 0$ und $Y_3 z_3 + Y_4 z_4 + \ldots = 0$.

Sie sind als das Resultat der Elimination der 9 Kräfte $X, Y, Z, X_1, \ldots X_2, \ldots$ aus den 11 Gleichungen zu betrachten.

16. Besteht das System nur aus 4 Puncten, so ist zufolge letzterer zwei Gleichungen, $X_3 = 0$ und $Y_3 = 0$, d. h. die Kraft am Puncte $(x_3, y_3, z_3)$ mufs auf der Ebene der $x, y$, also auf der durch die drei übrigen Puncte zu legenden Ebene, perpendicular sein. Heifsen daher $A$, $B$, $C$, $D$ die vier Puncte und $P$, $Q$, $R$, $S$ die auf sie wirkenden Kräfte, so mufs $R$ auf der Ebene $ABC$, und aus gleichem Grunde $P$ auf $BCD$, $Q$ auf $CDA$, $R$ auf $DAB$ perpendicular sein. Jede dieser 4 Bedingungen giebt 2 Gleichungen, mit denen die 3 davon unabhängigen Gleichungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$ zusammen 11 machen, wie erforderlich. „Zum Gleichgewichte zwischen vier Kräften, deren Angriffspuncte eine sich ihrem Inhalte nach immer gleich bleibende Pyramide bilden, ist es daher nothwendig und hinreichend, dafs die Richtung jeder Kraft auf der dem Angriffspuncte der letztern gegenüberliegenden Seitenfläche der Pyramide senkrecht ist, und dafs alle vier Kräfte, wenn sie parallel mit ihren Richtungen an einen Punct getragen werden, sich das Gleichgewicht halten."

Die Nothwendigkeit der ersten dieser drei Bedingungen erhellet eben so, wie im Obigen beim Dreieck, auch dadurch, dafs man 3 oder 4 Puncte unbeweglich werden läfst. Denn alsdann ist der 4te Punct nur in einer Ebene beweglich, welche mit der durch die 3 erstern Puncte zu führenden Ebene parallel liegt; folglich u. s. w.

Zusatz. Unter den 11 Bedingungsgleichungen sind offenbar auch die bekannten sechs: $\Sigma X = 0, \ldots \Sigma(Yz - Zy) = 0, \ldots$ mit enthalten, welche allein erfüllt sein müssen, wenn die gegenseitige Lage der Angriffspuncte unveränderlich ist. Da nun in diesem Falle zum Gleichgewichte zwischen 4 Kräften erfordert wird, dafs jede Gerade, welche die Richtungen dreier Kräfte schneidet, auch der Richtung der vierten begegnet, so erlangen wir damit folgenden geometrischen Satz:

Werden von den Ecken einer dreiseitigen Pyramide Perpendikel auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt, so schneidet jede Gerade, welche drei dieser Perpendikel trifft, auch das vierte. Wie bekannt nämlich, schneidet von diesen vier Perpendikeln im Allgemeinen keines das andere.

17. Bei einem Systeme von fünf Puncten reduciren sich die Gleichungen (3) auf:

$$X_3 z_3 + X_4 z_4 = 0, \qquad Y_3 z_3 + Y_4 z_4 = 0,$$

folglich

$$X_3 : X_4 = Y_3 : Y_4 = -z_4 : z_3.$$

Sind demnach $A, B, C, D, E$ die 5 Puncte, $P, Q, R, S, T$, die auf sie resp. wirkenden Kräfte, und $S', T'$ die parallel mit der Ebene $ABC$ geschätzten Kräfte $S, T$, so müssen $S', T'$ mit einander parallel, und es mufs $S'z_3 + T'z_4 = 0$ sein, wo $z_3, z_4$ die Abstände der Puncte $D, E$ von der Ebene $ABC$ sind.

Wir wollen den Grund hiervon durch ähnliche geometrische Betrachtungen, wie bei Puncten in einer Ebene, uns deutlich zu machen suchen. Seien $A, \ldots. E$ fünf Puncte im Raume, $A, B, C$ unbeweglich, $D, E$ aber dergestalt beweglich, dafs das System der 5 Puncte sich immer gleich bleibt, und daher jede der aus ihnen zu bildenden Pyramiden ihren Inhalt unverändert behält. Sind nun $D', E'$ zwei andere Oerter, welche die Puncte $D, E$ zufolge ihrer Beweglichkeit einnehmen können, so ersieht man zuerst, dafs wegen der Unveränderlichkeit des Inhalts der Pyramiden $ABCD, ABCE$ die Geraden $DD', EE'$ der Ebene $ABC$ parallel sein müssen. Man denke sich ferner die Geraden $DE, D'E'$ gezogen, welche die Ebene $ABC$ in $K, K'$ schneiden, so sind $K$ und $K'$ in den zwei einander gleichen Systemen $A, B, C, D, E$ und $A, B, C, D', E'$ einander entsprechende Puncte, und es ist folglich die Pyramide $ABKD = ABK'D'$ $= ABK'D$, folglich das Dreieck $ABK = ABK'$, und aus ähnlichem Grunde $BCK = BCK'$; welches nicht anders möglich ist, als wenn $K'$ mit $K$ zusammenfällt. Die Geraden $DE$ und $D'E'$ treffen mithin die Ebene $ABC$ in einem und demselben Puncte; woraus wir weiter schliefsen, dafs die Puncte $K, D, E, D', E'$ in einer Ebene liegen, dafs folglich die Wege $DD'$ und $EE'$, welche $D$ und $E$ gleichzeitig beschreiben können, nicht nur mit der Ebene $ABC$, sondern auch mit einander parallel sind und sich wie $KD$ und $KE$, also auch wie ihre Abstände $z_3$ und $z_4$ von der Ebene $ABC$ verhalten.

Hiernach kann, wenn von den zwei Wegen $DD'$ und $EE'$ der eine gegeben ist, der andere sogleich gefunden werden. Setzt man nämlich die Projectionen von $DD'$ auf die Axen der $x$ und $y$ resp. $= mz_3$ und $nz_3$, wo $m$ und $n$ zwei beliebige Zahlen sind, so sind die Projectionen

von $EE'$ auf dieselben Axen $= mz_4$ und $nz_4$. Die Projectionen auf die Axe der $x$ aber sind beiderseits $= 0$.

Wirken nun auf $D$ und $E$ die Kräfte $(X_3, Y_3, Z_3)$ und $(X_4, Y_4, Z_4)$, so hat man nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht:

$$X_3.mz_3 + Y_3.nz_3 + X_4.mz_4 + Y_4.nz_4 = 0,$$

folglich, wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der Zahlen $m$ und $n$,

$$X_3z_3 + X_4z_4 = 0, \quad Y_3z_3 + Y_4z_4 = 0, \text{ wie vorhin.}$$

18. Kommt zu $D$ und $E$ noch ein dritter, nach dem Gesetze der Gleichheit beweglicher Punct $F$ hinzu, so dafs jetzt das System der sechs Puncte $A, B, \ldots. F$, in welchem $A, B, C$ unbeweglich sind, sich immer gleich bleibt, so müssen, weil dann auch jedes der beiden Systeme $ABCDE$ und $ABCEF$ besonders sich gleich bleiben mufs, die Wege von $D$ und $E$, wie vorhin, mit der Ebene $ABC$ und mit einander parallel sein und sich wie ihre Abstände von dieser Ebene verhalten, und dasselbe mufs von den Wegen von $E$ und $F$ gelten. Die gleichzeitig von sämmtlichen 3 Puncten $D, E, F$ beschriebenen Wege müssen daher mit einander und mit der Ebene $ABC$ parallel und ihren Abständen von dieser Ebene proportional sein. Diese Bedingungen sind aber nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend, weil durch sie mit dem willkürlich angenommenen Wege eines der drei Puncte, $D$ (nur mufs er parallel mit $ABC$ sein), die Wege der beiden übrigen Puncte vollkommen bestimmt werden, und weil, wenn zwei Systeme von 4 Puncten $A, B, C, D$ und $A, B, C, D'$ einander gleich sind, zu jedem 5ten Puncte in dem einen Systeme ein entsprechender, im andern unzweideutig gefunden werden kann.

19. Man sieht von selbst, wie diese Betrachtungen auf Systeme von noch mehreren Puncten ausgedehnt werden können. Ueberhaupt nämlich: „Hat man ein System, bestehend aus einer unbeweglichen Ebene und mehreren Puncten, die dergestalt beweglich sind, dafs das System sich immer gleich bleibt, so sind die Wege der Puncte mit einander und mit der Ebene parallel und verhalten sich wie ihre Abstände von der Ebene; und umgekehrt: werden diese Bedingungen bei der Bewegung der Puncte erfüllt, so bleibt sich das System gleich."

Sollen nun Kräfte, an den also beweglichen Puncten angebracht, sich das Gleichgewicht halten, so mufs, wenn jede Kraft, geschätzt nach einer und derselben, mit der unbeweglichen Ebene parallelen, sonst will-

kürlichen Richtung, in den Abstand ihres Angriffspunctes von der Ebene multiplicirt wird, die Summe dieser Producte Null sein. Und wenn diese Summe für irgend zwei solcher Richtungen Null ist, so ist sie es auch für jede dritte mit der Ebene parallele Richtung, und es herrscht Gleichgewicht."

„Hat das System keine unbewegliche Ebene, so mufs beim Gleichgewicht die jetzt für die unbewegliche Ebene angegebene Bedingung in Bezug auf jede von vier willkürlichen Ebenen erfüllt werden, und aufserdem müssen die Kräfte, an einen und denselben Punct verlegt, sich das Gleichgewicht halten." Denn wegen des Erstern hat man viermal zwei und wegen des letztern drei Gleichungen, also zusammen eilf; wie zum Gleichgewicht erforderlich ist. Nur dürfen von den vier Ebenen keine zwei einander parallel und keine drei mit einer und derselben Geraden parallel liegen; oder kürzer: die vier Ebenen müssen mit den Flächen einer dreiseitigen Pyramide parallel sein.

## III. Vom Gleichgewichte bei sich affin bleibenden Figuren.

20. Zwei Systeme von Puncten in Ebenen stehen in der Verwandtschaft der Affinität, wenn die Fläche jedes aus den Puncten des einen Systems zu bildenden Dreiecks zu der entsprechenden Dreiecksfläche des andern Systems ein constantes Verhältnifs hat. Ist daher von drei ebenen Figuren die erste der zweiten gleich, als wobei dieses constante Verhältnifs das der Gleichheit ist, und die zweite der dritten ähnlich, so ist die erste der dritten affin verwandt; und man kann umgekehrt zu zwei affinen Figuren immer eine dritte construiren, welche der einen von beiden gleich und der andern ähnlich ist. Sind demnach Puncte in einer Ebene dergestalt beweglich, dafs die von ihnen gebildete Figur sowohl zu jeder andern ihr ähnlichen, als zu jeder andern ihr gleichen Figur übergehen kann, so kann sich die anfängliche Figur auch in jede andere ihr affine verwandeln, und alle Figuren, welche ein mit solch einer doppelten Beweglichkeit begabtes System von Puncten annehmen kann, sind einander, wo nicht ähnlich oder gleich, doch affin. Auf eben diese Weise werden daher auch die Bedingungen für das Gleichgewicht eines solchen Systems aus den Bedingungen, welche wir bei der Aehnlichkeit und bei der Gleichheit fanden, zusammengesetzt sein.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften an Punc-

ten in einer Ebene, die eine sich immer affin bleibende Figur bilden, sind hiernach folgende sechs:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Xy = 0, \quad \Sigma Yx = 0,$$
$$\Sigma(Xx - Yy) = 0, \qquad \Sigma(Xx + Yy) = 0,$$

wo wir statt der zwei letzten noch einfacher setzen können:

$$\Sigma Xx = \Sigma Yy = 0.$$

21. Da alle Dreiecke einander affin sind, so kann hier zwischen drei Kräften noch kein Gleichgewicht bestehen, wohl aber zwischen vier Kräften. In diesem Falle, und wenn wir gröfserer Einfachheit willen die Axe der $x$ durch die Puncte $(x, y)$ und $(x_1, y_1)$ legen, gehen die 3te und 6te der 6 Gleichungen über in

$$X_2 y_2 + X_3 y_3 = 0 \quad \text{und} \quad Y_2 y_2 + Y_3 y_3 = 0,$$

folglich $X_2 : X_3 = Y_2 : Y_3$, d. h. die zwei Kräfte $(X_2, Y_2)$ und $(X_3, Y_3)$ sind einander parallel, und eben so müssen auch je zwei andere der 4 Kräfte, also alle 4 Kräfte überhaupt, einander parallel sein. Nehmen wir daher jetzt die Axe der $x$ mit den Kräften parallel an, so werden alle $Y$ Null, die 2te, 4te und 6te der 6 Gleichungen werden damit identisch, und es bleiben nur noch die 1ste, 3te und 5te

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Xy = 0, \quad \Sigma Xx = 0$$

zu berücksichtigen. Von diesen sind die zwei ersten die bekannten Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht paralleler Kräfte, wenn sie auf fest mit einander verbundene Puncte wirken. Die dritte giebt in Verbindung mit den zwei ersten zu erkennen, dafs der Mittelpunct je dreier der 4 Kräfte zugleich der Angriffspunct der jedesmal 4ten Kraft ist. Vergl. Artic. 5. *b*.

„Sollen daher in einer Ebene an vier Puncten, die dergestalt beweglich sind, dafs die von ihnen gebildete Figur sich immer affin bleibt, Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so müssen die vier Kräfte sämmtlich einander parallel sein, und aufser den zwei Bedingungen, welche zum Gleichgewichte zwischen parallelen Kräften an fest mit einander verbundenen Puncten erforderlich sind, mufs noch die erfüllt werden, dafs der Mittelpunct irgend dreier der vier Kräfte der Angriffspunct der vierten Kraft ist; wo dann auch der Mittelpunct von je drei anderen der vier Kräfte der Mittelpunct der jedesmal übrigen Kraft sein wird."

22. Wenn dem Systeme von Puncten in einer Ebene, welche nach dem Gesetze der Affinität beweglich sind, eine unbewegliche Gerade, oder,

was dasselbe ist, zwei unbewegliche Puncte hinzugefügt werden, so reducirt sich die Anzahl der Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht auf zwei. Nehmen wir z. B. an, die Axe der $x$ solle unbeweglich werden, und fügen zu dem Ende zwei in ihr liegende unbewegliche Puncte $(x', 0)$ und $(x'', 0)$ hinzu. Findet nun Gleichgewicht Statt, so wird dasselbe noch bestehen, wenn wir letztere zwei Puncte in Verbindung mit den Puncten des Systems nach dem Gesetz der Affinität beweglich sein lassen und an ihnen zwei Kräfte $(X', Y')$ und $(X'', Y'')$ anbringen, welche in Verbindung mit den Kräften $(X, Y)$ u. s. w. den obigen 6 Gleichungen Genüge thun, so dafs man also hat:

$$X' + X'' + \Sigma X = 0, \qquad Y' + Y'' + \Sigma Y = 0,$$
$$\Sigma Xy = 0, \qquad Y'x' + Y''x'' + \Sigma Yx = 0,$$
$$\Sigma Yy = 0, \qquad X'x' + X''x'' + \Sigma Xx = 0.$$

Sind aber die Puncte $(x', 0)$ und $(x'', 0)$ unbeweglich, so kommen die an ihnen angebrachten Kräfte nicht mehr in Betracht und die Bedingsgleichungen für das Gleichgewicht sind diejenigen zwei, welche nach Elimination von $X'$, $Y'$, $X''$, $Y''$ aus letztern 6 Gleichungen übrig bleiben, also:

$$\Sigma Xy = 0, \qquad \Sigma Yy = 0.$$

Sie zeigen an, dafs wenn man jede Kraft, geschätzt nach einer und derselben, aber beliebigen Richtung, in den Abstand ihres Angriffspunctes von der unbeweglichen Linie multiplicirt, die Summe dieser Producte Null sein mufs. Man kann nämlich statt letzterer zwei Gleichungen auch die einzige $\cos\alpha \Sigma Xy + \sin\alpha \Sigma Yy = 0$ schreiben, wo $\alpha$ einen constanten aber beliebig zu nehmenden Winkel bedeutet. Setzt man nun noch $X = P\cos\varphi$, $Y = P\sin\varphi$, wo daher $P$ die Intensität der Kraft $(X, Y)$ und $\varphi$ den Winkel ihrer Richtung mit der Axe der $x$ bedeutet, so wird jene Gleichung:

$$\Sigma P \cos(\varphi - \alpha) . y = 0,$$

und drückt unter dieser Form die ausgesprochene Bedingung aus.

Hat das System keine unbewegliche Linie, so mufs diese Bedingung in Bezug auf drei gerade Linien der Ebene erfüllt werden, wenn Gleichgewicht Statt finden soll. Nur dürfen diese drei sich nicht in einem Puncte schneiden und auch nicht alle drei mit einander parallel sein. Man wird nämlich somit zu dreimal zwei Gleichungen geführt, welche in ihrer einfachsten Form keine andern als die sechs vorhin aufgestellten sind.

23. Den umgekehrten Weg von demjenigen einschlagend, welchen wir bei einem nach dem Gesetze der Gleichheit beweglichen Systeme von Puncten befolgten, wollen wir noch aus der jetzt erhaltenen Bedingung des Gleichgewichts an einem sich affin bleibenden Systeme von beweglichen Puncten und einer unbeweglichen Geraden, welche sämmtlich in derselben Ebene begriffen sind, die Art der Beweglichkeit selbst zu bestimmen suchen.

Zu dem Ende haben wir nur die jetzt gefundene Gleichung $\Sigma Xy\cos\alpha + \Sigma Yy\sin\alpha = 0$ mit der aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten folgenden $\Sigma X dx + \Sigma Y dy = 0$ zu vergleichen. Hiernach muſs, wenn man $dx = iy\cos\alpha$ setzt, $dy = iy\sin\alpha$, $dx_1 = iy_1\cos\alpha$, $dy_1 = iy_1\sin\alpha$ u. s. w., folglich $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = iy$ u. s. w. und $\frac{dy}{dx} = \tang\alpha$ u. s. w. sein. „Sind demnach zwei oder mehrere Puncte in einer Ebene dergestalt beweglich, daſs sie in Verbindung mit einer unbeweglichen Geraden der Ebene (der Axe der $x$) eine sich affin bleibende Figur bilden, so sind die von ihnen gleichzeitig beschriebenen Wege ($\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$) ihren Abständen ($y$) von der Geraden proportional und einander parallel" (indem jeder mit der Axe der $x$ den von einem Puncte zum andern constanten Winkel $\alpha$ bildet).

Um dieses geometrisch darzuthun, darf nur bewiesen werden, daſs wenn zwei Vierecke $ABCD$ und $ABC'D'$ in einer Ebene, welche eine gemeinschaftliche Seite $AB$ haben, einander affin sind, die Linien $CC'$ und $DD'$ einander parallel sind und sich wie die Abstände ihrer entsprechenden Endpuncte $C$ und $D$, oder $C'$ und $D'$, von der gemeinschaftlichen Seite $AB$, verhalten. Ich übergehe aber den Beweis hiervon, da er dem im Obigen geführten Beweise für den analogen Satz bei einander gleichen Figuren ganz ähnlich ist.

Daraus endlich, daſs, wenn das System keine unbewegliche Linie hat, die Bedingung für das Gleichgewicht, welche beim Vorhandensein einer unbeweglichen Linie Statt findet, in Bezug auf drei Linien der Ebene erfüllt sein muſs, können wir folgendes Porisma schlieſsen.

„Hat man in einer Ebene zwei einander affine Systeme von Puncten und drei gerade Linien, welche sich nicht in einem Puncte schneiden und auch nicht alle drei mit einander parallel sind, so ist es immer möglich, die Puncte des einen Systems mit den entsprechenden des andern dadurch zur

Coincidenz zu bringen, dafs man sie parallel mit einander um Linien fortbewegt, welche ihren (der Puncte) Entfernungen von der einen der drei Geraden proportional sind, und dafs man dieselbe Operation in Bezug auf jede der beiden andern Geraden wiederholt."

24. Aus demselben Grunde, wie bei einem Systeme von Puncten *in einer Ebene*, sind auch bei einem Systeme von Puncten im Raume, wenn sich dasselbe affin bleiben soll, d. h. wenn bei der Bewegung der Puncte die Verhältnisse zwischen den aus ihnen zu bildenden Pyramiden sich nicht ändern sollen, die Bedingungen des Gleichgewichts aus denen zusammengesetzt, welche Statt finden müssen, wenn das System sich ähnlich und wenn es sich gleich bleiben soll. Die Bedingungen des Gleichgewichts bei einem sich affin bleibenden Systeme von Puncten im Raume sind demnach (vergl. 4. und 15.) folgende zwölf:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma X y = 0, \quad \Sigma X z = 0, \quad \Sigma X x = 0,$$
$$\Sigma Y = 0, \quad \Sigma Y z = 0, \quad \Sigma Y x = 0, \quad \Sigma Y y = 0,$$
$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma Z x = 0, \quad \Sigma Z y = 0, \quad \Sigma Z z = 0.$$

Hieraus folgt zunächst eben so, wie bei einem Systeme von 4 Puncten in einer Ebene, dafs, wenn das System im Raume nur aus 5 Puncten besteht, die Richtungen der auf sie wirkenden Kräfte einander parallel sein müssen; dafs zweitens die Bedingungen erfüllt sein müssen, welche zum Gleichgewichte erforderlich sind, sobald die gegenseitigen Entfernungen der Puncte unveränderlich angenommen werden; und dafs drittens der Mittelpunct von irgend vier der fünf parallelen Kräfte mit dem Angriffspuncte der fünften Kraft zusammenfallen mufs.

Man kann hierbei noch bemerken, dafs, wenn bei einem Systeme paralleler Kräfte, sei es in einer Ebene oder im Raume, von zwei Angriffspuncten jeder der Mittelpunct der jedesmal übrigen Kräfte ist, dasselbe auch von jedem dritten Angriffspuncte gilt, und dafs die Kräfte, nicht nur wenn ihre Angriffspuncte fest mit einander verbunden sind, sondern auch dann, wenn sie nach dem Gesetze der Affinität beweglich sind, sich das Gleichgewicht halten.

Denn ist, — um den Satz nur von einem ebenen Systeme zu beweisen, der Angriffspunct $(x, y)$ der Kraft $(X, Y)$ der Mittelpunct der übrigen Kräfte, und werden die Kräfte parallel mit der Axe der $x$, also

$Y, Y_1, \ldots = 0$ angenommen, so hat man

$$x = \frac{X_1 x_1 + X_2 x_2 + \ldots}{X_1 + X_2 + \ldots} = \frac{-Xx + \Sigma X x}{-X + \Sigma X},$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{folglich} & x\Sigma X = \Sigma X x, \\ \text{und eben so} & y\Sigma X = \Sigma X y.\end{array}\right\} (a)$$

Ist ferner auch der Angriffspunct $(x_1, y_1)$ der Kraft $X_1$ der Mittelpunct der übrigen Kräfte, so hat man auf gleiche Weise:

$$x_1 \Sigma X = \Sigma X x \quad \text{und} \quad y_1 \Sigma X = \Sigma X y. \qquad (b)$$

Aus $(a)$ und $(b)$ aber folgt:

$$(x_1 - x)\Sigma X = 0, \qquad (y_1 - y)\Sigma X = 0.$$

Da nun $x_1 - x$ und $y_1 - y$ nicht zugleich Null sein können, so mufs $\Sigma X = 0$ sein, mithin auch $\Sigma X y = 0$ und $\Sigma X x = 0$; woraus das Uebrige von selbst folgt.

Statt der zwei letzten der obigen drei Bedingungen für das Gleichgewicht an einem Systeme von fünf in affiner Lage bleibenden Puncte im Raume (oder von vier Puncten in einer Ebene) kann man daher auch die Eine setzen, dafs von zweien der Puncte jeder der Mittelpunct der auf die jedesmal übrigen Puncte wirkenden parallelen Kräfte sein mufs.

**25.** Demjenigen endlich analog, was wir bei einem affin bleibenden Systeme von einer beliebigen Anzahl von Puncten in einer Ebene fanden, können wir, wenn das System im Raume enthalten ist, folgende Sätze aufstellen.

„Herrscht in einem solchen Systeme Gleichgewicht, so ist die Summe der Producte Null, welche man erhält, wenn man jede Kraft, geschätzt nach einer und derselben, aber beliebigen Richtung, in den Abstand ihres Angriffspunctes von einer und derselben, aber beliebigen Ebene multiplicirt. Ist diese Summe $= 0$, in Bezug auf dieselbe Ebene, für irgend drei nicht einer und derselben Ebene parallele Richtungen, nach welchen man die Kräfte schätzt, so ist sie es auch für jede vierte Richtung. Und wenn dasselbe auch noch in Bezug auf drei andere Ebenen gilt, welche mit der erstern eine Pyramide bilden, so gilt es auch für jede fünfte Ebene, und es herrscht Gleichgewicht." Enthält das System eine unbewegliche Ebene, so braucht diese Bedingung blofs in Bezug auf diese Ebene erfüllt zu sein, wenn Gleichgewicht Statt finden soll."

Hinzusetzen können wir noch, „dafs, wenn das System eine unbewegliche Linie oder einen unbeweglichen Punct enthält, die erwähnte

Bedingung in Bezug auf jede von zwei Ebenen, welche sich in der Linie schneiden, oder in Bezug auf jede von drei Ebenen, welche in dem Punct zusammenstofsen, beim Gleichgewichte erfüllt sein mufs."

„Bei einem sich affin bleibenden Systeme von Puncten, welches zugleich eine unbewegliche Ebene hat, sind die Puncte dergestalt beweglich, dafs die von ihnen gleichzeitig beschriebenen Wege einander parallel und ihren Abständen von der Ebene proportional sind."

„Dadurch, dafs man alle Puncte eines Systems parallel fortbewegt um Linien, welche sich wie die Abstände der Puncte von einer unbewegt bleibenden Ebene verhalten, kann man das System mit jedem andern System zur Congruenz bringen, welches dem erstern affin ist und mit ihm die gedachte Ebene gemein hat."

„Dadurch, dafs man dieselbe Operation in Bezug auf zwei Ebenen, oder auf drei Ebenen, welche sich nicht in einer und derselben Geraden, auch nicht in einer unendlich entfernten schneiden, oder in Bezug auf vier Ebenen wiederholt, welche nicht einen und denselben Punct, auch nicht einen unendlich entfernten, mit einander gemein haben, — dadurch kann man das gegebene System mit jedem andern ihm affinen Systeme zur Congruenz bringen, welches im ersten Falle die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, im zweiten Falle den Durchschnittspunct der drei Ebenen mit dem gegebenen Systeme gemein hat, im dritten Falle aber jede beliebige Lage zu dem gegebenen Systeme haben kann."

---

Eine Untersuchung über das Gleichgewicht bei der noch entfernteren Verwandtschaft der Collineation anzustellen, behalte ich mir für ein anderes Mal vor und bemerke hier nur, dafs unter den Bedingungsgleichungen bei dieser Verwandtschaft alle diejenigen mit vorkommen, welche wir bei der Affinität fanden, — denn je zwei einander affine Figuren stehen auch in der Verwandtschaft der Collineation; — dafs aber die übrigen Bedingungsgleichungen von den Coordinaten der Angriffspuncte die Quadrate und Producte der zweiten Dimension enthalten.

---

# 11.

# Beiträge zur Combinationslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen.

(Von Herrn Dr. *Stern* in Göttingen.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 6. im vorigen Hefte.)

---

## 8.

Aus der Formel

$$15.\quad (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\,\ldots\ldots = \sum_{0,\infty}^{z} (-1)^z . x^{\frac{3z^2 \mp z}{2}}$$

leitet *Euler (nov. comm. acad. Petr. T. 3. p. 155)* eine Recursionsformel zwischen der Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zu verschiedenen Summen ab. Da man nemlich

$$1 + {}^1C'x + {}^2C'x^2 + {}^3C'x^3 \ldots\ldots = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots} = \frac{1}{\sum\limits_{0,\infty}^{z}(-1)^z . x^{\frac{3z^2 \mp z}{2}}}$$

hat, so ergiebt sich hieraus

$$16.\quad \sum_{0,2n}^{3z^2 \mp z} (-1)^z . {}^{n - \frac{3z^2 \mp z}{2}}C' = 0,$$

wo man, wenn $n$ selbst in der Form $\frac{3z^2 \mp z}{2}$ enthalten ist, statt ${}^0C'$ die Einheit setzen mufs. *Euler* hätte sehr leicht eine ähnliche Recursionsformel zwischen der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung zu verschiedenen Summen finden können. Da nemlich

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\,\ldots\ldots = \frac{1-x^2}{1-x} . \frac{1-x^4}{1-x^2} . \frac{1-x^6}{1-x^3}\,\ldots\ldots = \frac{\sum\limits_{0,\infty}^{z}(-1)^z . x^{3z^2 \mp z}}{\sum\limits_{0,\infty}^{z}(-1)^z . x^{\frac{3z^2 \mp z}{2}}},$$

so ist auch

$$1 + {}^1Cx' + {}^2Cx^2 + {}^3Cx^3 \ldots\ldots = \frac{\sum\limits_{0,\infty}^{z}(-1)^z . x^{3z^2 \mp z}}{\sum\limits_{0,\infty}^{z}(-1)^z . x^{\frac{3z^2 \mp z}{2}}}$$

und mithin

$$17.\quad \sum_{0,2n}^{3z^2 \mp z} (-1)^z . {}^{n - \frac{3z^2 \mp z}{2}}C = (-1)^r \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $n = 3r^2 \mp r$ oder nicht in dieser Form enthalten ist.

Es giebt noch eine andere bisher unbekannte Recursionsformel für die Combinationen ohne Wiederholung, von der ich im Folgenden Gebrauch machen werde. Um sie zu finden wende ich den zuerst von *Gaufs* bewiesenen Satz an *(Summatio quar. serier. sing. art. 8.)*, dafs

$$\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^5}\;\ldots\ldots = \sum_{0,\infty}^{n} x^{\frac{n.n+1}{2}}$$

ist. Verbindet man diese Formel mit einer andern. die *Euler* bewiesen hat, dafs nemlich

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots\ldots} = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots\ldots,$$

so ergiebt sich

$$1+{}^1Cx' + {}^2Cx^2 + \ldots\ldots = \frac{\sum\limits_{0,\infty}^{z} x^{\frac{z.z+1}{2}}}{\sum\limits_{0,\infty}^{z} (-1)^z . x^{3z^2\mp z}},$$

und mithin

$$18.\qquad \sum_{0,n}^{3z^2\mp z} (-1)^z . {}^{n-(3z^2\mp z)}C = 1 \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $n$ in der Form $\frac{z.z+1}{2}$ oder nicht enthalten ist.

### 9.

Eine andere, sehr merkwürdige Anwendung der Formel (15) macht *Euler* in den *Comm. nov. acad. Petr. T. V.*, indem er vermittelst derselben eine Recursionsformel nachweiset, die zwischen den Summen der Divisoren der Zahlen statt hat. Das Gesetz ist folgendes. Nennt man $S.n$ die Summe der Divisoren der Zahl $n$, so ist

$$19.\qquad S.n = S.(n-1) + S.(n-2) - S.(n-5) - S.(n-7)\;\ldots\ldots$$
$$= \sum_{0,2n}^{3z^2\mp z} (-1)^{z+1} S.\left(n - \frac{3z^2\mp z}{2}\right),$$

wo man in dem besonderen Falle, wenn $n$ selbst eine Pentagonalzahl ist, statt $S.0$ den Werth $n$ setzen mufs. *Eulers* Beweis hat folgenden Gang. Er setzt

$$20.\qquad s = xS.1 + x^2S.2 + x^3S.3\;\ldots\ldots$$

Löset man die Summe der Divisoren in die einzelnen Factoren auf, so hat man offenbar

$$\begin{aligned} s = {} & 1(x + x^2 + x^3 \ldots\ldots) \\ & + 2(x^2 + x^4 + x^6 \ldots\ldots) \\ & + 3(x^3 + x^6 + x^9 \ldots\ldots) \end{aligned}$$

u. s. w.

oder

$$z = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} \ldots\ldots ^{*)}.$$

Hieraus folgt

$$-\int \frac{z\,dx}{x} = \log[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots] = \log(1-x-x^2+x^5+x^7\ldots)$$

und durch Differentiation

$$z = \frac{x+2x^2-5x^5\ldots\ldots}{1-x-x^2+x^5\ldots\ldots}.$$

Vergleicht man diesen Werth von $z$ mit (10), so findet man daraus das angegebene Recursionsgesetz.

*Euler* selbst nennt diesen Beweis, bei welchem Differential- und Integralrechnung angewandt wird, einen nicht ganz natürlichen; ich will daher versuchen hier einen anderen elementaren Beweis zu geben, an welchen sich zugleich andere neue Resultate anschliefsen werden, und welcher zeigt, wie sich hier die Logarithmen in die Beweisführung einmischen.

### 10.

Ich brauche für das Folgende drei bekannte Sätze aus der Theorie der Logarithmen. Setzt man nämlich

$$\log \sum_{0,\infty}^{m} A_m x^m = \log(1 + A_1x^1 + A_2x^2 \ldots) = a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots,$$

so ist

$$21. \quad na_n = -(n-1)A_1.a_{n-1} - (n-2)A_2.a_{n-2} \ldots + nA_n.$$

Ferner ist

$$22. \quad a_n = \sum_{1,n}^{h} (-1)^{h-1}.\frac{1}{h}\,\mathfrak{p}\,{}^n\overset{h}{C}{}',$$

wo $\mathfrak{p}\,{}^n\overset{h}{C}{}'$ die Combinationen mit Wiederholung der Classe $h$ zur Summe $n$ aus den Elementen $A_1$, $A_2$, ...., jede Gruppe mit der dazu gehörenden Permutationszahl multiplicirt, bedeutet. Auch ist

$$23. \quad A_n = \sum_{1,n}^{h} \mathfrak{p}\,\frac{{}^n\overset{h}{C}{}'}{1.2\ldots h},$$

wo sich das Combinationszeichen auf die Elemente $a_1, a\ , a_3 \ldots$ bezieht.

---

*) Diese Reihe wird jetzt gewöhnlich die *Lambert*sche genannt, aber mit Unrecht. Sie findet sich zwar in *Lamberts* Anlage zur Architektonik Bd. 2. S. 507; dieses Werk ist aber erst im Jahre 1771 erschienen, während *Eulers* Abhandlung vom Jahre 1760 ist.

Entwickelt man die Logarithmen von $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, .... in die bekannten nach Potenzen von $x$ fortschreitenden Reihen und setzt

$$\log[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots] = \log(1-x)+\log(1-x^2)+\log(1-x^3)\dots$$
$$= a_1x^1 + a_2x^2 + \dots,$$

so ist offenbar allgemein $a_n = -\frac{S.n}{n}$. Mithin

$$24. \quad \log \overset{z}{\underset{0,\infty}{\Sigma}} (-1)^z . x^{\frac{3z^2 \mp z}{2}} = -\frac{S.1}{1}x - \frac{S.2}{2}x^2 - \frac{S.3}{3}x^3 \dots$$

Substituirt man also in (21) statt $ra_r$ den Werth $-S_r$, so erhält man, in Uebereinstimmung mit (19),

$$S.n = S.(n-1) + S.(n-2) - S(n-5) \dots$$

Die Formel (22) giebt eine unabhängige combinatorische Formel zur Bestimmung der Summe der Divisoren einer Zahl $n$. Man hat nemlich

$$25. \quad S.n = n\left[\overset{h}{\underset{1,n}{\Sigma}} (-1)^h . \frac{1}{h}\, {}^{n}\overset{h}{C}'\right],$$

wo sich das Combinationszeichen nur auf alle in der Form $\frac{3z^2 \mp z}{2}$ enthaltene ganze Zahlen, als Elemente, bezieht und statt jedes Elementes sein Werth $(-1)^z$ gesetzt werden mufs.

Es soll z. B. die Summe der Divisoren der Zahl 12 gefunden werden. Hier ist $S.12 = 28$. Aus (25) ergiebt sich

$$-1.a_{12} + \tfrac{1}{2}.2a_5a_7 - \tfrac{1}{3}.3a_2a_5a_5 + \tfrac{1}{4}[6a_1a_1a_5a_5 + 12a_1a_2a_2a_7]$$
$$-\tfrac{1}{5}[20a_1a_1a_1a_2a_7 + 20a_1a_2a_2a_2a_5] + \tfrac{1}{6}[6(a_1)^5.a_7 + 60(a_1)^3(a_2)^2a_5 + (a_2)^6]$$
$$-\tfrac{1}{7}[42(a_1)^5a_2a_5 + 21(a_1)^2(a_2)^5] + \tfrac{1}{8}[8(a_1)^7a_5 + 70(a_1)^4(a_2)^4] - \tfrac{1}{9}[84(a_1)^6(a_2)^3]$$
$$+\tfrac{1}{10}[45(a_1)^8(a_2)^2] - \tfrac{1}{11}[11(a_1)^{10}a_2] + \tfrac{1}{12}(a_1)^{12} = 1 + \tfrac{1}{2}.2 - \tfrac{1}{3}.3.(-1)$$
$$+\tfrac{1}{4}(6.1 + 12 - 1) - \tfrac{1}{5}(20.1 + 20.1) + \tfrac{1}{6}[6.(-1) + 60.(-1) + 1]$$
$$-\tfrac{1}{7}(42.1 + 21.-1) + \tfrac{1}{8}(8.-1 + 70.1) - \tfrac{1}{9}.84.(-1) + \tfrac{1}{10}.45.1$$
$$-\tfrac{1}{11}.11.(-1) + \tfrac{1}{12} = 2\tfrac{1}{3}; \quad \text{also } S.12 = 12.2\tfrac{1}{3} = 28.$$

Wendet man die Formel (23) auf die Gleichung (24) an, so ergiebt sich daraus folgender Lehrsatz. *Man bilde aus den Werthen* $-\frac{S.1}{1}$, $-\frac{S.2}{2}$, $-\frac{S.3}{3}$ .... $-\frac{S.n}{n}$, *als Elementen, alle Combinationen mit Wiederholungen zur Summe $n$, setze jeder Gruppe ihre Permutationszahl vor und dividire jede Gruppe aus der Classe $h$ mit dem Producte* $1.2....h$, *so wird die Summe der entstehenden Werthe Null sein, wenn $n$ keine Pentagonalzahl ist; dagegen ist diese Summe* $=(-1)^z$ *wenn $n$ in der Form* $\frac{3z^2 \mp z}{2}$ *enthalten ist.*

11.

Zu ähnlichen Resultaten führt auch die Betrachtung des Productes $(1+x)(1-x^2)(1+x^3)(1-x^4)\ldots$. Es läfst sich leicht zeigen, dafs auch in der Entwickelung dieses Productes alle Glieder verschwinden, deren Exponent nicht in der Form $\frac{3z^2\mp z}{2}$ enthalten ist. Betrachtet man nemlich zuerst wieder das allgemeine Product $(1+a_1x^1)(1+a_2x^2)(1+a_3x^3)\ldots$, so ist in dessen Entwickelung der Coefficient des $r^{ten}$ Gliedes $=C_r$, und es ist früher nachgewiesen worden, dafs in diesem Ausdrucke eben so viel Gruppen mit einer geraden als mit einer ungeraden Anzahl von Elementen vorkommen, sobald $r$ keine Pentagonalzahl ist. Ist nun $r$ eine ungerade Zahl, so können die geraden Classen nur Formen enthalten, in welchen eine ungerade Anzahl ungerader Elemente und also auch eine ungerade Anzahl gerader Elemente vorkommt, die ungeraden Classen nur Formen, in welchen entweder nur eine ungerade Anzahl ungerader Elemente, oder eine ungerade Anzahl ungerader und eine gerade Anzahl gerader Elemente vorkommt. Ist $r$ eine gerade Zahl, so können die geraden Classen nur eine gerade Anzahl gerader Elemente, oder eine gerade Anzahl gerader und eine gerade Anzahl ungerader Elemente enthalten, die ungeraden Classen dagegen nur eine ungerade Anzahl gerader Elemente oder eine ungerade Anzahl gerader und eine gerade Anzahl ungerader Elemente. Substituirt man statt aller ungeraden Elemente den Werth $+1$, statt aller geraden den Werth $-1$ und betrachtet die in den einzelnen Gruppen vorkommenden Elemente als Factoren, so wird, wenn $r$ eine ungerade Zahl ist, der Werth jeder in einer geraden Classe enthaltenen Gruppe $=-1$, der jeder in einer ungeraden Classe enthaltenen Gruppe $=+1$, und das Entgegengesetzte findet Statt, wenn $r$ eine gerade Zahl ist. Jedenfalls wird also die Summe aller in jeder Classe enthaltenen Gruppen Null, sobald nicht $r$ eine Pentagonalzahl ist. Da man nun diese Substitution wirklich machen mufs, wenn man von dem allgemeineren Producte $(1+a_1x)(1+a_2x^2)\ldots$ zu dem speciellen $(1+x)(1-x^2)\ldots$ übergehen will, so müssen alle Glieder in der Entwickelung des letztern Productes wegfallen, deren Exponent keine Pentagonalzahl ist. Dagegen werden alle Glieder, deren Exponent eine Pentagonalzahl ist, mit dem Coefficienten $\pm 1$ vorkommen, und zur Bestimmung des Zeichens dieses Coefficienten gilt folgende Regel. Es haben immer vier auf einander folgende Glieder dasselbe Zeichen, und zwar

abwechselnd das positive und negative. Der allgemeine Satz, dafs der Coefficient von $x^r$ in der Entwickelung des Productes $(1+a_1x^1)(1+a_2x^2)\ldots$, wenn $r=\frac{3z^2\mp z}{2}$ ist, eine Gruppe mehr in den geraden oder ungeraden Classen enthält, je nachdem $z$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, geht für das specielle Product $(1+x)(1-x^2)\ldots$ in folgenden über. Ist $z$ eine gerade Zahl, von der Form $4m$, also $r$ eine gerade Zahl, so ist der Coefficient von $x^r$ gleich $+1$; ist $z=4m+2$, so ist $r$ ungerade und der Coefficient $=-1$. Ist dagegen $z$ eine ungerade Zahl, also $z(3z\mp1)$ jedenfalls eine gerade Zahl, so ist dieser Coefficient $=-1$, wenn $3z\mp1$ durch 4 theilbar ist, dagegen ist er $=+1$, wenn $3z\mp1$ nur durch 2 theilbar ist. Setzt man also allmälig $z=4m-1$, $4m$, $4m+1$, ...., so hat man das Schema

$$\begin{array}{llllllll} z= 4m-1, & 4m, & 4m+1, & 4m+2, & 4m+3, & 4m+4, & 4m+5, & \ldots \\ \quad -+ & ++ & +- & -- & -+ & ++ & +- & \ldots; \end{array}$$

woraus die angegebene Regel deutlich zu ersehen ist. Mithin ist

26. $(1+x)(1-x^2)(1+x^3)(1-x^4)\ldots=1+x-x^2-x^5-x^7-x^{12}+x^{15}+x^{22}\ldots$

Setzt man nun

$$\log[(1+x)(1-x^2)(1+x^3)\ldots]=b_1x^1-b_2x^2+b_3x^3\ \ldots,$$

so ist allgemein $\frac{S.n}{n}=b_n$, woraus man wieder ähnliche Resultate wie in §. 10. ableiten kann.

## 12.

Aus denselben Principien ergiebt sich nun ferner eine von der Formel (19) wesentlich verschiedene Recursionsformel für die Summe der Divisoren, indem bei derselben die Summe der Divisoren *aller* vorhergehenden Zahlen zur Bildung der Summe der Divisoren einer folgenden angewandt wird; zugleich zeigt sie einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen den Summen der Divisoren und der Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zu bestimmten Summen. Setzt man nemlich

$$\log\left(\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}\right)=-\log[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]$$
$$=-a_1x^1-a_2x^2\ \ldots,$$

so ist allgemein $-a_n=\frac{S.n}{n}$, mithin ist nach §. 4.

27. $\log[1+{}^1C'x+{}^2C'x^2\ldots]=\frac{S.1}{1}x^1+\frac{S.2}{2}x^2+\frac{S.3}{3}x^3\ \ldots$

und nach (21)

28. $S.n = n.{}^nC' - {}^1C'.S(n-1) - {}^2C'.S(n-2) - {}^3C'.S(n-3) \ldots.$

und da nach (10) der Werth von ${}^rC'$ unmittelbar gefunden werden kann, so drückt die Formel (28) einen Zusammenhang zwischen den Summen der Divisoren und bekannten Zahlen aus. So z. B. ist

$$S.2 = 2.2 - 1 = 3$$
$$S.3 = 3.3 - 1.3 - 2.1 = 4$$
$$S.4 = 5.4 - 1.4 - 2.3 - 3.1 = 7$$

u. s. w.

Aus (22) folgt

$$S.n = n \sum_{1,n}^{h} (-1)^{h-1}.\frac{1}{h}\mathfrak{p}\,{}^n\overset{h}{C'},$$

wo sich das Combinationszeichen auf die Elemente ${}^1C'$, ${}^2C'$ .... bezieht.

Eben so zeigt die Formel (23) wie man die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zur Summe $n$ finden kann, sobald die Summe der Divisoren aller Zahlen von 1 bis $n$ gegeben ist. Man hat nemlich

$$30. \quad {}^nC' = \sum_{1,n}^{h} \mathfrak{p}\frac{{}^n\overset{h}{C'}}{1.2\ldots.h},$$

wo sich das Combinationszeichen ${}^n\overset{h}{C'}$ auf die Gröfsen $\frac{S.1}{1}$, $\frac{S.2}{2}$, $\frac{S.3}{3}$ .... als Elemente bezieht.

13.

So wie in der Entwickelung der sogenannten *Lambert*schen Reihe jeder Coefficient die Summe der Divisoren aller successiven Zahlen angiebt, so sind die Coefficienten der entwickelten Reihe

$$\frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{6x^6}{1-x^6} \ldots.$$

die Summen der geraden Divisoren aller successiven Zahlen, und die Coefficienten der entwickelten Reihe

$$\frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} \ldots.$$

sind die Summen der ungeraden Divisoren. Man könnte also diese Reihen anwenden, um nach *Eulers* Behandlungsweise Recursionsformeln zwischen den Summen der geraden Divisoren und zwischen den Summen der ungeraden Divisoren zu finden. Das im Vorhergehenden angewandte Verfahren führt aber auch hier leicht zum Ziele. Entwickelt man

$$\log[(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6) \ldots.] = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 \ldots.$$

so ist offenbar allgemein $2n.a_{2n} = -Sp.n$, wenn $Sp.n$ die Summe der geraden Divisoren der Zahl $n$ bedeutet. Nun ist

$$(1-x^2)(1-x^4)\ldots\ldots = 1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}\ldots\ldots = \Sigma(-1)^n.x^{3n^2\mp n}.$$

Mithin nach (21)

31. $Sp.2n = Sp(2n-2)+Sp(2n-4)-Sp(2n-10)-Sp(2n-14)\ldots\ldots,$

wo man wieder für $Sp(2n-2n)$ den Werth $2n$ setzen mufs.

Die unabhängige Formel heifst

$$32. \quad Sp.2n = 2n \sum_{1,2n}^{h} (-1)^h.\frac{1}{h}\mathfrak{p}\,{}^{2n}\overset{h}{C},$$

wo sich das Combinationszeichen auf die Elemente $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1$, .... bezieht. Ist z. B. $2n = 8$, so ist

$$\sum_{1,8}^{h}(-1)^h\mathfrak{p}\,{}^8\overset{h}{C} = \tfrac{1}{2}a_4a_4+\tfrac{1}{3}.3a_2a_2a_4+\tfrac{1}{4}a_2a_2a_2a_2,$$

mithin $Sp.8 = 8(\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{1}{4}) = 14 = 2+4+8$.

Die Anwendung der Form (23) würde auch hier wieder zu einem merkwürdigen Satze führen. Eine zweite Recursionsformel giebt die Gleichung

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots\ldots} = 1+{}^1C'x^2+{}^2C'x^4+{}^3C'x^6\ldots\ldots,$$

aus welcher

$$\log(1+{}^1C'x^2+{}^2C'x^4\ldots\ldots) = \frac{Sp.2}{2}x^2+\frac{Sp.4}{4}x^4\ldots\ldots$$

und mithin

33. $Sp.2n = 2n.{}^nC'-{}^1C'Sp(2n-2)-{}^2C'Sp(2n-4)\ldots\ldots$

folgt. Die Formeln (32) und (33) würden wieder zwei neue Sätze über den Zusammenhang der Combinationen mit Wiederholung zu bestimmten Summen mit den Summen der geraden Divisoren geben. Ich werde jedoch im Folgenden die aus diesen Formeln fliefsenden Resultate nicht mehr besonders erwähnen.

## 14.

Entwickelt man

$$\log[(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots\ldots] = a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ldots\ldots,$$

so ist allgemein $-na_n$ der Summe der ungeraden Divisoren der Zahl $n$ gleich. Nun bezeichne $Si.n$ diese Summe. Entwickelt man daher das Product $(1-x)(1-x^3)\ldots\ldots$ in eine nach Potenzen von $x$ fortgehende Reihe, so kann man wieder eine Recursionsformel zwischen den Coefficienten dieser Reihe und den Werthen $Si.n$, $Si(n-1)\ldots\ldots$ finden.

Eine andere Recursionsformel giebt die bekannte Gleichung

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^6)\dots\dots} = 1+{}^1Cx^1+{}^2Cx^2+{}^3Cx^3\dots\dots$$

Aus ihr folgt

$$\log(1+{}^1Cx^1+{}^2Cx^2+{}^3Cx^3\dots\dots) = Si.1.x+\frac{Si.2}{2}x^2+\frac{Si.3}{3}x^3\dots\dots,$$

mithin nach (21)

34. $Si.n = n^nC - Si(n-1)^1C - Si(n-2)^2C\dots\dots$

Ist z. B. $n=7$, so ist $Si.n = 1+7 = 8$, und nach (34)

$$Si.n = 7.5-4.1-6.1-1.2-4.2-1.3-1.4 = 8.$$

15.

Es sei $Si.n - Sp.n = D.n$. Nun ist nach dem Vorhergehenden

$$\log\left(\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^6)\dots\dots}\right) = Si.1.x+\frac{Si.2}{2}x^2+\frac{Si.3}{3}x^3+\frac{Si.4}{4}x^4\dots\dots$$

$$\log\left(\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)\dots\dots}\right) = \frac{Sp.2}{2}x^2+\frac{Sp.4}{4}x^4\dots\dots$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab und bemerkt, daſs für die ungeraden Zahlen $Si.n = Dn$ ist, so ergiebt sich

$$\log\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots\dots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^6)\dots\dots} = \log\left[\sum_{0,\infty}^{n} x^{\frac{n.n+1}{2}}\right] \text{ (vergl. §. 8.)}$$

$$= \frac{D.1}{1}x+\frac{D.2}{2}x^2+\frac{D.3}{3}x^3\dots\dots$$

Mithin nach (21)

35. $D.n = -D(n-1)-D(n-3)-D(n-6)\dots\dots = -\sum_{0,n}^{z,\frac{z+1}{2}} D\left(n-\frac{z.z+1}{2}\right)$,

wo für $-D(0)$ der Werth $n$ substituirt werden muſs.

Diese Formel giebt zugleich einen neuen Ausdruck für $Si.n$. Ist nemlich $n$ eine ungerade Zahl, also $Si.n = Dn$, so hat man

36. $$\begin{aligned} Si.n &= -[Si(n-1)-Sp(n-1)]-[Si(n-3)-Sp(n-3)] \\ &\quad -Si(n-6)-Si(n-10)-[Si(n-15)-Sp(n-15)]\dots\dots \\ &= Sp(n-1)+Sp(n-3)+Sp(n-15)\dots\dots \\ &\quad -[Si(n-1)+Si(n-3)+Si(n-6)]\dots\dots, \end{aligned}$$

wo wieder statt $Sp(0)$ der Werth $n$ gesetzt werden muſs.

Ist dagegen $n$ eine gerade Zahl, so hat man

37. $$\begin{aligned} Si.n &= Sp.n-Si(n-1)-Si(n-3)-[Si(n-6)-Sp(n-6)] \\ &\quad -[Si(n-10)-Sp(n-10)]\dots\dots \\ &= Sp.n+Sp(n-6)+Sp(n-10)\dots\dots \\ &\quad -[Si(n-1)+Si(n-3)+Si(n-6)\dots\dots]. \end{aligned}$$

Hierdurch erhält man mithin auch eine neue Formel für $Sp.2n$, nemlich

$$38.\quad Sp.2n = Si.2n + Si(2n-1) + Si(2n-3) \dots - [Sp.(2n-6) + Sp.(2n-10) + \dots].$$

16.

Auch die Verwandlung des Ausdrucks $\log[(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots]$ in eine Reihe kann zur Auffindung ähnlicher Sätze gebraucht werden. Eben so die Entwickelung von $\log[(1-x)(1+x^2)(1-x^3)\dots]$ und ähnliche. Da jedoch diese Betrachtungen nur Wiederholungen der vorhergehenden wären, so will ich sie nicht weiter verfolgen und nur noch eine Bemerkung hinzufügen.

Aus dem merkwürdigen Ausdrucke

$$\frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots} = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 \dots,$$

den *Jacobi* gefunden hat (*Fund. nov. p. 185*), und an dessen Stelle man auch

$$[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots][(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots] = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 \dots$$

setzen kann, ergiebt sich nach §. 10. und 14.

$$\log(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 \dots)$$
$$= -2\frac{Si.1}{1}x - \left(\frac{2Si.2 + Sp.2}{2}\right)x^2 - \frac{2Si.3}{3}x^3 - \left(\frac{2Si.4 + Sp.4}{4}\right)x^4 \dots$$
$$= -2\frac{S.1}{1}x - \left(\frac{2S.2 - Sp.2}{2}\right)x^2 - \frac{2S.3}{3}x^3 - \left(\frac{2S.4 - Sp.4}{4}\right)x^4 \dots,$$

mithin

$$39.\quad 2S.n - Sp.n$$
$$= 2[2S(n-1) - Sp(n-1)] - 2[2S(n-4) - Sp(n-4)] + 2[2S(n-9) - Sp(n-9)] \dots,$$

wo man statt $2S(0) - Sp(0)$ den Werth $n$ substituiren muſs.

17.

Eine ganz ähnliche Reihe von Sätzen erhält man, wenn man statt der *Summe* der Divisoren die *Anzahl* derselben betrachtet. Es ist auffallend, daſs nicht schon *Euler* die Recursionsformel, welche den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Divisoren verschiedener Zahlen angiebt, gefunden hat. Hierzu hätte er nur nöthig gehabt, statt der Reihe

$$z = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} \dots$$

die Reihe
$$z = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} \ldots.$$
anzuwenden, in deren Entwickelung der Coefficient einer jeden Potenz von $x$ die Anzahl der Divisoren des entsprechenden Exponenten angiebt. Diese Reihe wird zwar auch gewöhnlich *Lambert* zugeschrieben und kommt an der oben erwähnten Stelle vor: sie war aber schon lange vorher, wenigstens in etwas veränderter Gestalt, *Eulern* bekannt. Denn in der Abhandlung „*Consideratio quarundam serierum* (*Nov. comm. ac. Petr. T.* 3)" kommt schon die Bemerkung vor, dafs in der Entwickelung der Reihe
$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} \ldots.$$
der Zähler jedes Bruches anzeigt, wie viel Divisoren der Exponent des Nenners hat.

Verfährt man wie im Vorhergehenden, so erhält man diese Recursionsformel auf folgende Weise. Man bezeichne durch $N.p$ die Anzahl der Divisoren der Zahl $p$, so ist offenbar
$$\lg[(1-x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^3)^{\frac{1}{3}}\ldots] = \lg(1-x) + \tfrac{1}{2}\lg(1-x^2) + \tfrac{1}{3}\lg(1-x^3)\ldots.$$
$$= -\frac{N.1}{1}x - \frac{N.2}{2}x^2 - \frac{N.3}{3}x^3 \ldots.$$
Es kommt nun zunächst darauf an, das Product $(1-x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^3)^{\frac{1}{3}}\ldots.$ nach den Potenzen von $x$ zu entwickeln. Bezeichnet man durch ${}^{\frac{1}{r}}\overset{m}{\mathfrak{B}}$ den $m^{\text{ten}}$ Binomialcoefficienten der Potenz $\frac{1}{r}$, so hat man
$$1-x = 1 - {}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}x'$$
$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{\mathfrak{B}}x^2 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^4 - {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^6 \ldots.$$
$$(1-x^3)^{\frac{1}{3}} = 1 - {}^{\frac{1}{3}}\overset{1}{\mathfrak{B}}x^3 + {}^{\frac{1}{3}}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^6 - {}^{\frac{1}{3}}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^9 \ldots.$$
u. s. w.

In diesen Reihen hat jedes Glied die Form ${}^{\frac{1}{r}}\overset{m}{\mathfrak{B}}x^{mr}$. Multiplicirt man nun diese Reihen mit einander, so wird man, um den Coefficienten irgend einer Potenz $x^t$ der resultirenden Reihe zu finden, folgendes bedenken müssen. Die Exponenten der ursprünglichen Reihen bilden die Folgen

$$0,\ 1.1,$$
$$0,\ 1.2,\ 2.2,\ 3.2,\ \ldots.$$
$$0,\ 1.3,\ 2.3,\ 3.3,\ \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

So oft man nun aus den Gliedern dieser Folgen Variationen zur Summe $t$ bilden kann, erhält man in der resultirenden Reihe den Exponenten $t$. Da nun jedem Gliede $m r$ der Coefficient $\pm {}^{\frac{1}{r}}\mathfrak{B}^{m}$ entspricht (wo das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $r$ gerade oder ungerade ist), so erhält man den Coefficienten von $x^t$, wenn man in jeder Gruppe statt $m r$ den Werth $\pm {}^{\frac{1}{r}}\mathfrak{B}^{m}$ (und statt Null die Einheit) setzt und die aus jeder Gruppe entspringenden Binominalcoefficienten mit einander multiplicirt; die Summe aller dieser Werthe ist der Coefficient von $x^t$. Ist z. B. $t = 6$, so sind die Variationen zur Summe 6:

$$1.6$$
$$2.3$$
$$3.2$$
$$1.1 + 1.5$$
$$1.2 + 1.4$$

Mithin ist der Coefficient von $x^6$ gleich $-{}^{\frac{1}{6}}\mathfrak{B}^{1} + {}^{\frac{1}{3}}\mathfrak{B}^{2} - {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}^{3} + {}^{1}\mathfrak{B}^{1}.{}^{\frac{1}{5}}\mathfrak{B}^{1} + {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}^{1}.{}^{\frac{1}{4}}\mathfrak{B}^{1}$.

Bezeichnet man nun der Kürze halber den Coefficienten von $x^t$ durch $A_t$, so ist

$$\log(1 + A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 \ldots) = -\frac{N.1}{1}x^1 - \frac{N.2}{2}x^2 - \frac{N.3}{3}x^3 \ldots,$$

mithin

40. $$N.n = -A_1.N(n-1) - A_2.N(n-2) - \ldots - nA_n.$$

Durch wirkliche Berechnung findet man

$$A_1 = -1,\quad A_2 = -\tfrac{1}{2},\quad A_3 = \tfrac{1}{6},\quad A_4 = -\tfrac{1}{24}, \ldots,$$

mithin

$$N.1 = 1$$
$$N.2 = 1 + 1 = 2$$
$$N.3 = 2 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 2$$
$$N.4 = 2 + 1 - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = 3$$

u. s. w.

Eben so würde man aus (22) eine unabhängige combinatorische Formel zur Bestimmung von $N.n$ finden. Ueberhaupt könnte man fast alle Sätze, die früher in Beziehung auf die Summe der Divisoren gefunden worden sind, auf analoge Weise auf die Anzahl derselben übertragen; man würde z. B. die Entwickelung von $\log[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^4)^{\frac{1}{4}}(1-x^6)^{\frac{1}{6}}\ldots]$ betrachten müssen, um die Anzahl der geraden Divisoren einer Zahl zu finden.

### 18.

An das Vorhergehende reiht sich unmittelbar die Auflösung einer anderen Aufgabe, nemlich eine Recursionsformel zwischen der Anzahl der Zahlen zu finden, die kleiner als eine Zahl und keine Factoren derselben sind. Es bezeichne $L.m$ die Anzahl der ganzen Zahlen, die kleiner als $m$ und keine Factoren von $m$ sind, so ist z. B. für $m=6$, der Werth von $L.m=2$. In der Reihe

$$\frac{1}{1}x+\frac{2}{2}x^2+\frac{3}{3}x^3\ldots\ldots$$

zeigt der Zähler jedes Coefficienten die Anzahl aller ganzen Zahlen an, die nicht gröfser als der Exponent der dazu gehörenden Potenz von $x$ sind. Betrachtet man diese Reihe als einen Logarithmen und setzt

$$x+x^2+x^3\ \ldots. = \log(1+\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\ldots.) = \log e^{\frac{x}{1-x}},$$

so kann man die Werthe von $\alpha_1$, $\alpha_2$,.... leicht bestimmen. Da nun ferner

$$\log(1+A_1x^1+A_2x^2\ldots.) = -\frac{N.1}{1}x-\frac{N.2}{2}x^2\ \ldots.$$

ist, so hat man

$$\log[(1+\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\ldots.)(1+A_1x^1+A_2x^2\ldots)] = \frac{L.1}{1}x+\frac{L.2}{2}x^2+\frac{L.3}{3}x^3\ldots.,$$

und da sowohl $\alpha_n$ als $A_n$ bekannte Gröfsen sind, so erhält man hieraus eine Recursionsformel zwischen den Gröfsen $L.1$, $L.2$, $L.3$, ....

Bei wirklicher Berechnung findet man

$$\alpha=1,\quad \alpha_2=\tfrac{3}{2},\quad \alpha_3=2\tfrac{1}{6},\quad \alpha_4=3\tfrac{1}{24},\ \ldots.,$$

mithin $(1+\alpha_1x+\alpha_2x^2\ldots.)(1+A_1x+A_2x^2\ldots.) = 1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^4\ldots.$

und $L.4 = 4.\frac{1}{4}-0.L.3-0.L.2-L1$

oder, da $L.1=0$ ist, $L.4=1$.

Auf dieselbe Weise kann auch eine Recursionsformel zwischen der Summe der ganzen Zahlen gefunden werden, die kleiner als eine Zahl und keine Factoren derselben sind. Zu diesem Zwecke betrachte man die Reihe

$$\frac{1.x}{1}+\frac{3.x^2}{2}+\frac{6.x^3}{3}\ldots.+\frac{m(1+m)}{2m}x^m+\ldots.$$

in welcher der Zähler des Coefficienten jedes Gliedes die Summe der ganzen Zahlen angiebt, die nicht gröfser als der Exponent der entsprechenden Potenz von $x$ sind. Man bezeichne diese Summe in Beziehung auf

die Zahl $m$ durch $Km$. Setzt man nun

$$\frac{1.x}{1}+\frac{3.x^2}{2}+\frac{6.x^3}{3}\ldots\ldots=\log(1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3\ldots\ldots),$$

so kann man wieder die Werthe von $\alpha$, $\alpha_2$, .... nach Formel (21) berechnen. Nun hat man ferner

$$\log(1-x-x^2+x^5+x^7\ldots\ldots)=-\frac{S.1}{1}x-\frac{S.2}{2}x^2\ldots\ldots,$$

mithin

$$\log[(1+\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3\ldots\ldots)(1-x-x^2+x^5+x^7\ldots\ldots)$$
$$=\frac{K.1}{1}x+\frac{K.2}{2}x^2+\frac{K.3}{3}x^3\ldots\ldots$$

Das allgemeine Glied des Productes

$$(1+\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2\ldots\ldots)(1-x-x^2\ldots\ldots)$$

ist $\sum\limits_{0,2n}^{3m^2\mp m}(-1)^m.\alpha_{n-\frac{3m^2\mp m}{2}}.x^n$.

Bezeichnet man diesen Ausdruck der Kürze halber durch $B_n x^n$, so hat man

41. $$K.n=nB_n-B_1.K_{n-1}-B_2.K_{n-2}\ldots\ldots$$

19.

Eine neue Reihe von Sätzen erhält man, wenn man die im Vorhergehenden betrachteten numerischen Transcendenten nur zwischen bestimmten Grenzen nimmt. Will man z. B. einen Ausdruck für die Summe der Divisoren einer Zahl $n$, die zwischen den Grenzen 1 und $r$ enthalten sind, finden, so bezeichne man diese Summe durch $S_r.n$. Entwickelt man nun $\log[(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^r)]$ in eine nach Potenzen von $x$ fortschreitende Reihe, so wird diese

$$-S_r.1.x-\frac{S_r.2}{2}x^2-\frac{S_r.3}{3}x^3\ldots\ldots$$

Setzt man nun $(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^r)=1+A_1 x+A_2 x^2\ldots\ldots+x^{r.\frac{r+1}{2}}$, so hat man

42. $$S_r.n=A_1.S_r(n-1)+A_2 S_r(n-2)+\ldots\ldots+nA_n.$$

Wird z. B. gefragt, wie grofs die Summe der zwischen 1 und 6 enthaltenen Divisoren der Zahl 12 ist, so hat man

$$S_6.12=S_6.11+S_6.10-S_6.7-2S_6.5+S_6.3+S_6.2+S_6.1+12$$
$$=1+8-1-12+4+3+1+12=16.$$

Die Entwicklung des *endlichen* Productes $(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^r)$ ist aber von der des unendlichen $(1-x)(1-x^2)\ldots.$ wesentlich verschieden und bedarf einer besonderen Untersuchung, indem hier nicht, wie dort, alle Glieder wegfallen, die nicht in der Form $\frac{3x^2\pm x}{2}$ enthalten sind*). Ich werde später auf diesen Gegenstand zurückkommen und will hier vorläufig nur folgende Bemerkungen anknüpfen. In der Entwickelung des endlichen Productes $(1-x)\ldots.(1-x^r)$ gehören die Glieder immer paarweise so zusammen, dafs die Summe der Exponenten $=\frac{r.r+1}{2}$ ist und die Coefficienten gleiche Gröfse und gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem $r$ gerade oder ungerade ist. Denn nimmt man an, dafs dieses Verhältnifs bei der Entwickelung von $(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^{r-1})$ wirklich Statt hat, so dafs je zwei Glieder $Ax^m$, $\pm Ax^n$ auf die angegebene Weise zusammengehören und multiplicirt man mit $1-x^r$, so gehören wieder die Glieder $Ax^m$ und $\pm Ax^{n+r}$ und eben so $\pm Ax^n$ und $-Ax^{m+r}$ zusammen, da $m+n+r=m+\frac{r-1.r}{2}-m+r=\frac{r.r+1}{2}$ ist. Da nun das angegebene Verhältnifs in der Entwickelung von $(1-x)(1-x^2)=x^0-x-x^2-x^3$ wirklich Statt hat, so gilt es auch allgemein. Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dafs in der Entwickelung des Productes $(1+x)(1+x^2)\ldots.(1-x^r)$ je zwei Glieder so zusammengehören, dafs die Summe der Exponenten $=\frac{r.r+1}{2}$ und die Coefficienten gleich sind. Bezeichnet man durch $[{}^mC_r]$ die Combinationen ohne Wiederholung zur Summe $m$ aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots. a_r$, durch ${}^mC_r$ ihre Anzahl und durch $D.{}^mC_r$ den Unterschied zwischen der Anzahl der in den geraden und ungeraden Classen enthaltenen Gruppen, so ist der Coefficient von $x^m$ in der Entwickelung von

$$(1+a_1x^1)(1+a_2x^2)\ldots.(1+a_rx^r)$$

gleich $[{}^mC_r]$. Setzt man die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots. a_r$ sämmtlich $=-1$, so kommt man auf das specielle Product $(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^r)$ zurück. Hieraus ergiebt sich folgender Satz. Ist $n=\frac{r.r+1}{2}-m$, so ist $D^m.C_r = D.{}^nC_r$ oder $D.{}^mC_r=-D.{}^nC_r$, je nachdem $r$ eine gerade oder ungerade

*) Diese Bemerkung ist um so weniger überflüssig, da ein ausgezeichneter Mathematiker das Gegentheil geglaubt hat und dadurch auf mehrere falsche Ausdrücke geführt worden ist.

Zahl ist. Setzt man die Coefficienten sämmtlich $=1$, so erhält man das Product $(1+x)(1+x^2)\ldots.(1+x^r)$. Hieraus ergiebt sich folgender Satz. Es ist immer ${}^mC_r={}^nC_r$, wenn $m+n=\frac{r.r+1}{2}$ ist. Aus den zwei Gleichungen $D.{}^rC_r=\pm D.{}^nC_r$ und ${}^mC_r={}^nC_r$ folgt alsdann noch der Satz: wenn $m+n=\frac{r.r+1}{2}$ ist, so ist sowohl die Anzahl der Gruppen mit gerader Elementenzahl, als die Anzahl der Gruppen mit ungerader Elementenzahl in $[{}^mC_r]$ und $[{}^nC_r]$ gleich, wenn $r$ eine gerade Zahl ist: ist dagegen $r$ eine ungerade Zahl, so enthält $[{}^mC_r]$ bezüglich so viele Gruppen mit gerader oder ungerader Elementenzahl, als $[{}^nC_r]$ Gruppen mit ungerader oder gerader Elementenzahl enthält.

---

# 12.

# Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen.

(Vom Herrn Prof. *E. E. Kummer*, Dr. phil. zu Liegnitz.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 5. im ersten Hefte dieses Bandes.)

---

## 4.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung des Integrales

$$D(x,\alpha) = \int \frac{l(\pm x)(x+\cos\alpha)\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}.$$

Aus der Definition folgen zunächst unmittelbar folgende Eigenschaften desselben:

$$D(x,-\alpha) = D(x,\alpha), \qquad D(x,\alpha+\pi) = D(-x,\alpha),$$

oder allgemeiner, wenn $k$ irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$D(x,\pm\alpha+2k\pi) = D(x,\alpha), \quad D(x,\pm\alpha+(2k+1)\pi) = D(-x,\alpha).$$

Da hiernach jede beliebige Function $D(x,\alpha)$ auf eine andere reducirt wird, für welche $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt, so werden wir unbeschadet der Allgemeinheit der zu entwickelnden Formeln gewöhnlich voraussetzen, dafs dieses zweite Element $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt. Wird nun $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ gesetzt, wodurch $D(x,\alpha)$ in $D(u,\alpha)$ übergeht, so hat man für dieses Integral in der Form $D(u,\alpha)$

$$D(u,\alpha\pm k\pi) = D(u,\alpha), \qquad D(u\pm k\pi,\alpha) = D(u,\alpha),$$
$$D(-u,-\alpha) = D(u,\alpha),$$

so dafs die Function $D(u,\alpha)$ sich gar nicht ändert, wenn zu einem ihrer beiden Elemente, oder auch zu beiden, beliebige Vielfachen von $\pi$ hinzugethan oder davon weggenommen werden, und eben so, wenn ihre Elemente beide zugleich mit umgekehrten Vorzeichen genommen werden. Die Continuität dieser Function wird unterbrochen, oder $D(u,\alpha)$ wird unendlich grofs, sobald $\sin(u+\alpha) = 0$ wird; deshalb werden wir gewöhnlich $u+\alpha$ als in den Grenzen 0 und $\pi$ liegend betrachten, welchen in $D(x,\alpha)$ die Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$ entsprechen. Für $\alpha = 0$ geht $D(x,\alpha)$ über in $\Lambda(x)$, aber $D(u,\alpha)$ in $\Lambda(-1)$, oder es wird $D(u,0) = \frac{\pi^2}{6}$. Wenn aber

$u$ und $\alpha$ zugleich verschwinden, so geht $D(u,\alpha)$ über in $\Lambda(x)$, wo $x$ den Werth bedeutet, welchem der Quotient $\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ oder $\frac{-u}{u+\alpha}$ sich unendlich nähert, wenn $u$ und $\alpha$ unendlich klein werden.

Die Differenzialquotienten des $D(x,\alpha)$ in Beziehung auf $x$ und $\alpha$ sind folgende:

$$\frac{dD(x,\alpha)}{dx} = \frac{l(\pm x)(x+\cos\alpha)}{1+2x\cos\alpha+x^2},$$

$$\frac{dD(x,\alpha)}{d\alpha} = -\frac{x\,l(\pm x)\sin\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2} + \text{arc tang}\,\frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha}$$

und deshalb ist das vollständige Differenzial, wenn beide Elemente $x$ und $\alpha$ zugleich veränderlich sind,

$$d.D(x,\alpha) = \frac{l(\pm x)((x+\cos\alpha)\,dx - x\sin\alpha\,d\alpha)}{1+2x\cos\alpha+x^2} + \text{arc tang}\,\frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha}.d\alpha$$

oder

$$d.D(x,\alpha) = \tfrac{1}{2}l(\pm x)\,dl(1+2x\cos\alpha+x^2) + \text{arc tang}\,\frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha}.d\alpha.$$

Der Kreisbogen, welcher in den in Beziehung auf $\alpha$ genommenen Differenzialen vorkommt, hat bekanntlich unendlich viele verschiedene Werthe und mufs deshalb näher bestimmt werden.

Für $x=0$ ist $D(x,\alpha)=0$, folglich auch $\frac{dD(x,\alpha)}{d\alpha}=0$. Deshalb mufs für diesen Werth des $x$ auch der Kreisbogen $=0$ werden. Wenn nun $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt, so wächst der Kreisbogen continuirlich zugleich mit $x$ und erhält für $x=\infty$ den Werth $\alpha$: wenn aber $x$ abnimmt, so nimmt auch der Kreisbogen continuirlich ab und für $x=-\infty$ wird derselbe gleich $\alpha-\pi$, so dafs dieser Kreisbogen immer in den Grenzen $\alpha-\pi$ und $\alpha$ eingeschlossen ist, wenn nämlich $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt und $x$ in den Grenzen $-\infty$ bis $+\infty$.

Setzt man $x=\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$, so erhält man hieraus auch die Differenzialquotienten und das vollständige Differenzial von $D(u,\alpha)$, nämlich

$$\frac{d.D(u,\alpha)}{du} = -l\left(\frac{\pm\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)\text{cotang}(u+\alpha),$$

$$\frac{d.D(u,\alpha)}{d\alpha} = l\left(\frac{\pm\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right).\frac{\sin u}{\sin\alpha.\sin(u+\alpha)} - u,$$

$$d.D(u,\alpha) = -l\left(\frac{\pm\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)(\text{cotang}(u+\alpha)(du+d\alpha) - \text{cotang}\,\alpha.d\alpha) - u\,d\alpha,$$

welches auch so dargestellt werden kann:

$$d.D(u,\alpha) = l\left(\frac{\pm\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)dl\left(\frac{\pm\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right) - u.d\alpha,$$

wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so kann man diese Formeln nicht unmittelbar zum differenziiren von $D(u,\alpha)$ anwenden, sondern man mufs dann zuvor den Elementen $u$ und $\alpha$ gewisse Vielfachen von $\pi$ nehmen oder dazu hinzuthun, von der Art, dafs diese Bedingungen erfüllt werden.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun die Formeln suchen, welche die Eigenschaften der Function $D(x,\alpha)$ oder $D(u,\alpha)$ enthalten. Zu diesem Zwecke bietet sich hier wieder dieselbe Methode dar, welche wir für die Function $A(x)$ angewendet haben, nämlich in $D(x,\alpha)$ statt $x$ irgend eine rationale Function von $x$ zu nehmen und alsdann dieses Integral in seine einfachen Bestandtheile zu zerlegen. Zunächst wollen wir $-x^n$ statt $x$ nehmen, wo $n$ eine ganze positive Zahl sein soll, und wollen $\alpha$ in $n\alpha$ verwandeln. Hierdurch wird

$$D(-x^n, n\alpha) = n\int_0 \frac{l(\pm x)\,(x^n - \cos n\alpha)\, n x^{n-1}.\, dx}{1 - 2x^n \cos n\alpha + x^{2n}}.$$

Die gebrochene rationale Function, welche in diesem Integrale enthalten ist, wird aber bekanntlich folgendermaafsen in ihre Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{(x^n - \cos n\alpha)\, n x^{n-1}}{1 - 2x^n \cos n\alpha + x^{2n}} = \sum_0^{n-1}{}_k \frac{x - \cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)}{1 - 2x\cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) + x^2},$$

und deshalb hat man sogleich durch die Integration der einzelnen Theile:

23. $$D(-x^n, n\alpha) = n \sum_0^{n-1}{}_k D\left(-x, \alpha + \frac{2k\pi}{n}\right).$$

Verwandelt man $\alpha$ in $\alpha + \frac{\pi}{n}$, so erhält man hieraus

24. $$D(+x^n, n\alpha) = n \sum_0^{n-1}{}_k D\left(-x, \alpha + \frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

Dies sind längst bekannte Resultate, welche auch gewöhnlich auf ähnliche Weise hergeleitet werden. Auf andere Werthe aber als $-x^n$ und $+x^n$ hat man diese Methode noch nicht angewendet, um eine Function derselben Art zu verwandeln, obgleich solches mit demselben guten Erfolge geschehen kann. Aus der oben angegebenen allgemeinen Methode der Zerlegung der in der Form $\int P \int Q\, dx\, dx$ enthaltenen Integrale folgt nämlich von selbst, dafs man, indem man für $x$ irgend beliebige rationale Functionen in $D(x,\alpha)$ substituirt, eine unendliche Anzahl verschiedener Formeln erhalten mufs, in welchen eine solche Function als Aggregat mehrerer Functionen derselben Art dargestellt wird. Obgleich nun aber

diese Methode nothwendig zu den gesuchten Resultaten führen mufs, so werden wir doch hier nicht weiter von derselben Gebrauch machen, weil wir leichter zum Ziele kommen, indem wir die Theorie der Function $(Dx, \alpha)$ auf die der einfacheren Function $\Lambda(x)$ gründen, deren Grund-Eigenschaften wir bereits entwickelt haben. Eben so werden wir auch die Theorie der Function $E(x, \alpha)$ auf die der Function $\Lambda(x)$ gründen. Der Uebergang von $\Lambda(x)$ zu $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$ geschieht durch Einführung eines imaginären Elementes $x e^{\alpha i}$ und es kann vermittelst der oben gefundenen Gleichung

$$\Lambda(x e^{\alpha i}) = D(x, \alpha) - \alpha \text{ arc tang} \frac{x \sin\alpha}{1 + x\cos\alpha} + iE(x, \alpha) + \frac{\alpha i}{2} l(1 + 2x\cos\alpha + x^2)$$

jede Eigenschaft der Function $\Lambda(x)$ auf die Functionen $D(x, \alpha)$ und $E(x, \alpha)$ übertragen werden. Die Bestimmung der Grenzen, in welchen die Kreisbogen der so erhaltenen Formeln liegen, macht hierbei einige Schwierigkeiten; wir werden die Grenzen sammt den Theilen der Formeln, welche von Logarithmen und Kreisbogen abhängig sind, anderweitig bestimmen, und zwar so, dafs die Formeln dadurch andere, von der Betrachtung des Imaginären ganz unabhängige Beweise erhalten. Da die Formel (2) des §. 2. die Grundformel für die Function $\Lambda(x)$ ist, aus welcher alle übrigen sich ableiten lassen, so werden wir nur die dieser entsprechende Grundformel für die Function $D(x, \alpha)$ herleiten, und aus dieser alsdann wieder die andern specielleren, deren Anzahl aufserordentlich grofs ist. Zu diesem Zwecke werde in der Formel (2) §. 2. $x$ in $x e^{\alpha i}$, $y$ in $y e^{\beta i}$ verwandelt, und es werde aufserdem gesetzt

$$1 - x e^{\alpha i} = r . e^{-ui}, \qquad 1 - y e^{\beta i} = \varrho e^{-vi},$$

oder, was dasselbe ist,

$$x \sin\alpha = r \sin u, \qquad y \sin\beta = \varrho \sin v,$$

$$1 - x\cos\alpha = r\cos u, \qquad 1 - y\cos\beta = \varrho \cos v,$$

$$x = \frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \qquad y = \frac{\sin v}{\sin(v+\beta)},$$

$$r = \frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}, \qquad \varrho = \frac{\sin\beta}{\sin(v+\beta)}.$$

Hierdurch erhält man

$$\Lambda(-xy e^{(\alpha+\beta)i}) = \Lambda(-x e^{\alpha i}) + \Lambda(y e^{\beta i}) + \Lambda\left(\frac{x\varrho}{r} e^{(\alpha+u-v)i}\right)$$

$$+ \Lambda\left(\frac{yr}{\varrho} e^{(\beta+v-u)i}\right) - \tfrac{1}{2}\left(l\left(\frac{\varrho}{r} e^{(u-v)i}\right)\right)^2 + C.$$

Zerlegt man jetzt die Functionen $\Lambda$ dieser Formel in ihre realen und imaginären Theile, so zerfällt die ganze Formel in einen realen und einen



imaginären Theil. Zieht man ferner hier, wo es sich um die Function $D(x, \alpha)$ handelt, nur den realen Theil in Betracht und bezeichnet alle Logarithmen und Kreisbogen, welche er enthält, einfach mit $L$, so erhält man

$$D(-xy, \alpha+\beta) = D(-x, \alpha) + D(-y, \beta) + D\left(\frac{x\varrho}{r}, \alpha+u-v\right) + D\left(\frac{yr}{\varrho}, \beta+v-u\right) + L.$$

Substituirt man für $x$, $y$, $r$, $\varrho$ ihre Werthe, ausgedrückt durch $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$, so hat diese Formel vier von einander unabhängige Gröſsen. Auſser diesen führen wir noch einen Hülfswinkel $\varphi$ ein, welcher dazu dient, die Formel selbst und die zur Bestimmung ihres logarithmischen Theiles $L$ nöthige Rechnung bedeutend zu vereinfachen. Dieser Winkel soll durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{xy\sin(\alpha+\beta)}{1-xy\cos(\alpha+\beta)},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin u\sin v\sin(\alpha+\beta)}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\beta)-\sin u\sin v\cos(\alpha+\beta)}.$$

Hieraus hat man nämlich durch einfache Rechnungen

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)} = \frac{\sin u\sin v}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\beta)} = xy,$$

$$\frac{-\sin(\varphi-u)}{\sin(\varphi+\alpha-v)} = \frac{\sin u\sin\beta}{\sin\alpha\sin(v+\beta)} = \frac{x\varrho}{r},$$

$$\frac{-\sin(\varphi-v)}{\sin(\varphi+\beta-u)} = \frac{\sin v\sin\alpha}{\sin\beta\sin(u+\alpha)} = \frac{yr}{\varrho}.$$

Substituirt man diese Werthe in der obigen Formel, und macht zugleich von der einfacheren Art der Bezeichnung $D\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \alpha\right) = D(u, \alpha)$ Gebrauch, so hat man

$$D(\varphi, \alpha+\beta) =$$
$$D(u, \alpha) + D(v, \beta) + D(\varphi-u, \alpha+u-v) + D(\varphi-v, \beta+v-u) + L.$$

Um nun den von Logarithmen und Kreisbogen abhängigen Theil $L$ zu bestimmen, werde ich diese Formel zuerst differenziiren und nachher wieder integriren. Damit aber die Differenziation nach Anleitung der oben gegebenen Formeln genau ausgeführt werden könne, müssen zunächst die Grenzen bestimmt werden, in welchen die Gröſsen $\alpha$, $\beta$, $u+\alpha$, $v+\beta$, $\varphi$, $\alpha+\beta$, $\alpha+u-v$ u. s. w. liegen. Von den vier Gröſsen $\alpha$, $\beta$, $u+\alpha$, $v+\beta$ wollen wir festsetzen, daſs sie alle in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, da dies unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann. Der Bogen $\varphi$

ist durch die obige Gleichung nicht vollständig bestimmt. Um ihn daher unzweideutig zu bestimmen, wollen wir festsetzen, dafs zugleich mit $u=0$ auch $\varphi=0$ sei, (und nicht $\varphi=\pi$, $\varphi=2\pi$, oder dergleichen; welches nach jener Formel ebenfalls Statt haben könnte). Ich füge jetzt den Gröfsen $\varphi$, $\varphi-u$, $\varphi-v$, $\alpha+\beta$, $\alpha+u-v$, $\beta+v-u$ gewisse Vielfachen von $\pi$ zu, oder ich nehme statt derselben resp. $\varphi+\lambda\pi$, $\varphi-u+\lambda'\pi$, $\varphi-v+\lambda''\pi$, $\alpha+\beta+k\pi$, $\alpha+u-v+k'\pi$ und $\beta+v-u+k''\pi$, wo $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, $k$, $k'$, $k''$ positive oder negative ganze Zahlen sind, von der Art, dafs die Gröfsen

$$\begin{array}{ll} \alpha+\beta+k\pi, & \varphi+\alpha+\beta+\lambda\pi+k\pi, \\ \alpha+u-v+k'\pi, & \varphi+\alpha-v+\lambda'\pi+k'\pi, \\ \beta+v-u+k''\pi, & \varphi+\beta-u+\lambda''\pi+k''\pi, \end{array}$$

alle in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen sollen. Hierdurch vermeidet man viele weitläuftige Erörterungen; denn um z. B. zu sagen $\alpha+\beta$ liege in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$, darf man nur sagen, es sei $k=-1$: statt $\alpha+u-v$ liege in den Grenzen $-\pi$ und 0, heifst es $k'=+1$ u. s. w. Auch erlangt man hierdurch den Vortheil, dafs die Formeln für das vollständige Differenzial der Function $D(u,\alpha)$, welche wir oben gegeben haben, unmittelbare Anwendung finden, da dieselben voraussetzen, dafs das zweite Element und die Summe beider Elemente der zu differenziirenden Function in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen. Statt der obigen Formel nehmen wir also folgende ihr völlig gleiche:

$$\begin{aligned} & D(\varphi+\lambda\pi,\ \alpha+\beta+k\pi) \\ = {} & D(u,\alpha)+D(v,\beta)+D(\varphi-u+\lambda'\pi,\ \alpha+u-v+k'\pi) \\ & +D(\varphi-v+\lambda''\pi,\ \beta+v-u+k''\pi)+L. \end{aligned}$$

Diese Formel differenziire ich, indem ich alle vier unabhängigen Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $u$ und $v$ als veränderlich betrachte und erhalte so:

$$\begin{aligned} & l\Big(\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)}\Big)\,dl\Big(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)}\Big)-(\varphi+\lambda\pi)(d\alpha+d\beta) \\ = {} & l\Big(\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\Big)\,dl\Big(\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\Big)-u\,d\alpha+l\Big(\frac{\sin v}{\sin(v+\beta)}\Big)\,dl\Big(\frac{\sin\beta}{\sin(v+\beta)}\Big)-v\,d\beta \\ & +l\Big(\frac{\sin(\varphi-u)}{\sin(\varphi+\alpha-v)}\Big)\,dl\Big(\frac{\sin(\alpha+u-v)}{\sin(\varphi+\alpha-v)}\Big)-(\varphi-u+\lambda'\pi)(d\alpha+du-dv) \\ & +l\Big(\frac{\sin(\varphi-v)}{\sin(\varphi+\beta-u)}\Big)\,dl\Big(\frac{\sin(\beta+v-u)}{\sin(\varphi+\beta-u)}\Big)-(\varphi-v+\lambda''\pi)(d\beta+dv-du)+dL. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt $1-2xy\cos(\alpha+\beta)+x^2y^2=R^2$, so findet man leicht:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)} = R, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)} = xy,$$
$$\frac{\sin(\alpha+u-v)}{\sin(\varphi+\alpha-v)} = \frac{R}{r}, \qquad \frac{-\sin(\varphi-u)}{\sin(\varphi+\alpha-v)} = \frac{x\varrho}{r},$$
$$\frac{\sin(\beta+v-u)}{\sin(\varphi+\beta-u)} = \frac{R}{\varrho}, \qquad \frac{-\sin(\varphi-v)}{\sin(\varphi+\beta-u)} = \frac{yr}{\varrho};$$

also, indem man diese Werthe substituirt,

$$dL = l(xy)\frac{dR}{R} - l(x)\frac{dr}{r} - l(y)\frac{d\varrho}{\varrho} - l\left(\frac{x\varrho}{r}\right)\left(\frac{dR}{R}-\frac{dr}{r}\right) - l\left(\frac{yr}{\varrho}\right)\left(\frac{dR}{R}-\frac{d\varrho}{\varrho}\right)$$
$$-(\lambda\pi-\lambda'\pi)d\alpha-(\lambda\pi-\lambda''\pi)d\beta-(u-v-\lambda'\pi+\lambda''\pi)(du-dv),$$

welches sich sogleich vereinfacht in

$$dL = -l\left(\frac{r}{\varrho}\right)\left(\frac{dr}{r}-\frac{d\varrho}{\varrho}\right)-(\lambda\pi-\lambda'\pi)d\alpha-(\lambda\pi-\lambda''\pi)d\beta$$
$$-(u-v-\lambda'\pi+\lambda''\pi)(du-dv),$$

und hieraus hat man durch Integration,

$$L = -\tfrac{1}{2}\left(l\frac{r}{\varrho}\right)^2-(\lambda-\lambda')\alpha\pi-(\lambda-\lambda'')\beta\pi-\tfrac{1}{2}(u-v-\lambda'\pi+\lambda''\pi)^2+\text{const.}$$

Damit nun die Formel völlig bestimmt sei, sind nur noch die ganzen Zahlen $\lambda$, $\lambda'$ und $\lambda''$, und die Constante zu bestimmen. Zu diesem Zwecke betrachte ich zunächst den Differenzialquotienten des Bogens $\varphi$ in Beziehung auf $u$:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\sin v\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin(v+\beta)\sin^2(u+\alpha)R^2},$$

aus welchem hervorgeht, dafs $\varphi$ zugleich mit $u$ wächst, sobald $\sin v.\sin(\alpha+\beta)$ positiv ist, dafs aber, wenn $\sin v\sin(\alpha+\beta)$ negativ ist, der Bogen $\varphi$ abnimmt, sobald $u$ zunimmt, und umgekehrt. ($\sin\alpha$ und $\sin(v+\beta)$ sind nämlich immer positiv, weil $\alpha$ und $v+\beta$ nach der Voraussetzung in den Grenzen $0$ und $\pi$ liegen.) Ferner folgt aus der Gleichung

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)} = \frac{\sin u.\sin v}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\beta)},$$

dafs nur dann $\sin(\varphi+\alpha+\beta)=0$ sein kann, wenn zugleich $\sin\varphi=0$ ist. Da aber nur für $u=0$, $\sin\varphi=0$ ist, so folgt, dafs $\sin(\varphi+\alpha+\beta)$ innerhalb der Grenzen $u=-\alpha$ und $u=\pi-\alpha$ niemals sein Vorzeichen ändern kann. $\varphi+\alpha+\beta$ liegt also immer in denselben Grenzen, in welchen $\alpha+\beta$ liegt, und da $\alpha+\beta+k\pi$ und $\varphi+\alpha+\beta+\lambda\pi+k\pi$ in den Grenzen $0$ und $\pi$ liegen, so folgt, dafs immer $\lambda=0$ ist. Um nun $\lambda'$ zu bestimmen, betrachte ich die Gleichung

$$\frac{-\sin(\varphi-u)}{\sin(\varphi+\alpha-v)} = \frac{\sin u\sin\beta}{\sin\alpha\sin(v+\beta)},$$

aus welcher hervorgeht, dafs nur dann $\sin(\Phi+\alpha-v)=0$ werden kann, wenn zugleich $\sin(\Phi-u)=$ wird: ist dies beides der Fall, so wird offenbar auch $\sin(\alpha+u-v)=0$. Für $u=0$ aber ist $\Phi+\alpha-v=\alpha+u-v$, also müssen diese beiden Gröfsen gemeinschaftlich in denselben Grenzen liegen, in welchen $\alpha-v$ liegt, und hieraus folgt, dafs dieselben immer in denselben Grenzen liegen müssen, wenn $\Phi$ zugleich mit $u$ wächst oder $\sin v \sin(\alpha+\beta)$ positiv ist. In diesem Falle hat man daher $\lambda'=0$. Wenn aber $\sin v.\sin(\alpha+\beta)$ negativ ist, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: erstens, wenn $\alpha+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt und $v$ in den Grenzen $-\beta$ und 0, und zweitens, wenn $\alpha+\beta$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt und $v$ in den Grenzen 0 und $\pi-\beta$. In dem ersten dieser Fälle liegt zunächst $\alpha-v$ in den Grenzen 0 und $\pi$, denn der gröfste Werth desselben ist $\alpha+\beta$ und der kleinste $\alpha$; deshalb liegen auch $\Phi+\alpha-v$ und $\alpha+u-v$ gemeinschaftlich in den Grenzen 0 und $\pi$, oder, wenn $k'=0$, so ist auch $\lambda'=0$. Wenn aber, indem $u$ wächst, $\alpha+u-v$ die Grenze $\pi$ überschreitet, so überschreitet zugleich $\Phi+\alpha-v$ abnehmend die Grenze 0; oder wenn $k'=-1$, so ist $\lambda'=+2$, und in diesem Falle ist überdies $k''=+1$. In dem zweiten Falle, wo $\alpha+\beta$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt und $v$ in den Grenzen 0 und $\pi-\beta$, ist ebenfalls $\alpha-v$ in den Grenzen 0 und $\pi$ enthalten, weil der gröfste Werth desselben $\alpha$ ist und der kleinste $\alpha+\beta-\pi$; deshalb liegen hier $\Phi+\alpha-v$ und $\alpha+u-v$ ebenfalls gemeinschaftlich in den Grenzen 0 und $\pi$, oder, wenn in diesem Falle $k'=0$ ist, so ist auch $\lambda'=0$: wenn aber, indem $u$ abnimmt, $\alpha+u-v$ die Grenze 0 überschreitet, so überschreitet zugleich $\Phi+\alpha-v$ zunehmend die Grenze $\pi$, d. h. wenn $k'=+1$, so ist hier $\lambda'=-2$ und überdies $k''=-1$. Da die Formel selbst und die Voraussetzungen über die Grenzen der darin vorkommenden Quantitäten ungeändert bleiben, wenn zugleich $\alpha$ und $\beta$, $u$ und $v$, $k'$ und $k''$, $\lambda'$ und $\lambda''$ mit einander vertauscht werden, so folgt, dafs diese Resultate, welche wir für die Zahl $\lambda'$ erhalten haben, auch für $\lambda''$ gelten. Wir ordnen nun die gefundenen Grenzbestimmungen in folgende fünf Fälle.

1. Wenn $k'=0$ oder $k''=0$, so ist $\lambda'=0$ und $\lambda''=0$.
2. Wenn $k=0$, $k'=-1$, $k''=+1$, so ist $\lambda'=+2$, $\lambda''=0$.
3. Wenn $k=-1$, $k'=-1$, $k''=+1$, so ist $\lambda'=0$, $\lambda''=-2$.
4. Wenn $k=0$, $k'=+1$, $k''=-1$, so ist $\lambda'=0$, $\lambda''=+2$.
5. Wenn $k=-1$, $k'=+1$, $k''=-1$, so ist $\lambda'=-2$, $\lambda''=0$.

$\lambda$ ist unter allen Bedingungen $=0$.

Da nun die Zahlen $\lambda$, $\lambda'$ und $\lambda''$, welche in dem Theile $L$ der allgemeinen Formel vorkommen, vollständig in allen einzelnen Fällen bestimmt sind, so ist nur noch die Constante zu bestimmen, welche keine der Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $u$, $v$ enthält, also rein numerisch ist. Da die in der Formel vorkommenden Functionen niemals unendlich werden, sobald $\alpha$, $\beta$, $u+\alpha$, $v+\beta$, wie wir vorausgesetzt haben, in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, und die Continuität nur dadurch unterbrochen wird, dafs $\lambda'$ und $\lambda''$ plötzlich andere Werthe bekommen: so folgt, dafs die Constante nur dann ihren Werth ändern kann, wenn $\lambda'$ und $\lambda''$ ihre Werthe ändern; und da, wie wir so eben gefunden haben, $\lambda'$ und $\lambda''$ in fünf besonderen Fällen besondere Werthe haben, so folgt, dafs auch die Constante fünf verschiedene, jenen Fällen entsprechende Werthe haben kann, welche wir jetzt bestimmen wollen.

In dem ersten Falle, wo $\lambda'=0$ und $\lambda''=0$, hat man unmittelbar, indem man $u=0$ und $v=0$ setzt, auch const. $=0$.

In dem zweiten Falle setze man $\alpha+u-v=\pi+4w$, $\beta+v-u=-8w$, wodurch $\alpha+\beta=\pi-4w$ wird, also, wenn $w$ positiv $<\frac{1}{8}\pi$, $k=0$, $k'=-1$, $k''=+1$ und deshalb $\lambda'=2$, $\lambda''=0$. Aufserdem setze man $u=\frac{1}{2}\pi+w$, $v=-\frac{1}{2}\pi-w$, so wird $\alpha=2w$, $\beta=\pi-6w$, $\alpha+u=\frac{1}{2}\pi+3w$, $\beta+v=\frac{1}{2}\pi-7w$; man nehme $w$ unendlich klein, so wird $\varphi=-\frac{1}{2}\pi-5w$. Substituirt man diese Werthe in der allgemeinen Formel, indem man für $L$ den gefundenen Ausdruck nimmt, so erhält man, mit Berücksichtigung, dafs $D(aw,bw)=\Lambda\left(\frac{-a}{a+b}\right)$, für $w$ unendlich klein:

$$\Lambda(-1)=2\Lambda(-1)+\Lambda(-3)+\Lambda(-\tfrac{1}{3})-\tfrac{1}{2}(l3)^2-\tfrac{1}{2}\pi^2+\text{const.},$$

und da $\Lambda(-3)+\Lambda(-\frac{1}{3})-\frac{1}{2}(l3)^2=\frac{1}{3}\pi^2$, $\Lambda(-1)=\frac{1}{6}\pi^2$, so ist auch in diesem zweiten Falle const. $=0$.

In dem dritten Falle setze man, um die Constante zu bestimmen, ähnlicherweise $\alpha+u-v=\pi+8w$, $\beta+v-u=-4w$, wodurch $\alpha+\beta=\pi+4w$, also, wenn $w$ positiv kleiner als $\frac{1}{8}\pi$ ist, $k=-1$, $k'=-1$, $k''=+1$ und dadurch $\lambda'=0$, $\lambda''=-2$ wird. Aufserdem nehme man $u=\frac{1}{2}\pi+w$, $v=-\frac{1}{2}\pi-w$, wodurch $\alpha=6w$, $\beta=\pi-2w$, $u+\alpha=\frac{1}{2}\pi+7w$, $v+\beta=\frac{1}{2}\pi-3w$, und, wenn $w$ unendlich klein genommen wird, $\varphi=-\frac{1}{2}\pi+5w$. Substituirt man diese Werthe, indem man $w$ unendlich klein nimmt, so erhält man

$$\Lambda(-1)=2\Lambda(-1)+\Lambda(-\tfrac{1}{3})+\Lambda(-3)-\tfrac{1}{2}(l3)^2-\tfrac{1}{2}\pi^2-2\pi^2+\text{const.}$$

oder, vereinfacht, const. $=2\pi^2$.

Für den vierten und fünften Fall könnte man die Constante auf ähnliche Weise bestimmen, wie wir es hier für den zweiten und dritten Fall gethan haben. Da aber diese beiden Fälle aus den beiden vorigen hervorgehen, wenn zugleich $\alpha$ und $\beta$, $u$ und $v$, $\lambda'$ und $\lambda''$ mit einander vertauscht werden, so folgt, dafs der vierte Fall dieselbe Constante haben mufs, als der zweite, nämlich const. $= 0$, und der fünfte dieselbe Constante, als der dritte, nämlich const. $= 2\pi^2$.

Die nun völlig bestimmte Grundformel, aus welcher wir alle übrigen Eigenschaften der Function $D(u, \alpha)$ zu entwickeln gedenken, kann jetzt vollständig folgendermaafsen dargestellt werden.

Wenn der Hülfswinkel $\varphi$ durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\tang\varphi = \frac{\sin u \sin v \sin(\alpha+\beta)}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\beta) - \sin u \sin v \cos(\alpha+\beta)},$$

und wenn die vier Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $u+\alpha$, $v+\beta$, alle in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so ist:

$$25. \quad D(\varphi, \alpha+\beta) = D(u,\alpha) + D(v,\beta) + D(\varphi-u, \alpha+u-v) \\ + D(\varphi-v, \beta+v-u) - \tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin\alpha \sin(v+\beta)}{\sin\beta\sin(u+\alpha)}\right)^2 + B,$$

wo $B$, der von Kreisbogen abhängige Theil, folgende Werthe hat:

1. $B = -\frac{1}{2}(u-v)^2$, wenn $\alpha+u-v$, oder $\beta+v-u$, oder beide zugleich in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen;
2. $B = -\frac{1}{2}(u-v-2\pi)^2 + 2\pi\alpha$, wenn $\alpha+u-v$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$, $\beta+v-u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, $\alpha+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen;
3. $B = -\frac{1}{2}(u-v-2\pi)^2 + 2\pi(\pi-\beta)$, wenn $\alpha+u-v$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$, $\beta+v-u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, $\alpha+\beta$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ sind;
4. $B = -\frac{1}{2}(u-v+2\pi)^2 + 2\beta\pi$, wenn $\alpha+u-v$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, $\beta+v-u$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$, $\alpha+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ sind;
5. $B = -\frac{1}{2}(u-v+2\pi)^2 + 2(\alpha-\pi)\pi$, wenn $\alpha+u-v$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, $\beta+v-u$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$, $\alpha+\beta$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegen.

## §. 5.

Aus dieser allgemeinen Formel wollen wir nun die specielleren und einfacheren Eigenschaften der Function $D(u, \alpha)$ entwickeln. Wir betrach-

ten zunächst den Fall, wo $\alpha+\beta=\pi$ ist; für diesen vereinigen sich die beiden Fälle 2. und 3, und eben so 4. und 5. in einen einzigen, indem die Werthe des von Kreisbogen abhängigen Theiles $B$ einander gleich werden. Ferner ist für $\alpha+\beta=\pi$, $\Phi=0$, so dafs die erste Function $D(\Phi,\alpha+\beta)$ die Form $D(0,\pi)$ oder, was dasselbe ist, $D(0,0)$ erhalt, welche, wie wir oben gezeigt haben, in die einfachere Function $\Lambda$ übergeht, und zwar hier in $\Lambda\left(\frac{-\sin u \sin v}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\alpha)}\right)$. Man hat daher, wenn überdies $v$ in $-v$ verwandelt wird,

$$26 \quad \Lambda\left(\frac{-\sin u \sin v}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\alpha)}\right)=D(u,\alpha)+D(v,\alpha)+D(-u,\alpha+u+v)$$
$$+D(-v,\alpha+u+v)-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin(u+\alpha)}{\sin(v+\alpha)}\right)^2+B,$$

und es ist unter der Voraussetzung, dafs $\alpha$, $u+\alpha$, $v+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen:

1. $B=-\frac{1}{2}(u+v)^2$, wenn $\alpha+u+v$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B=-\frac{1}{2}(u+v-2\pi)^2+2\pi\alpha$, wenn $\alpha+u+v$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt;
3. $B=-\frac{1}{2}(u+v+2\pi)^2+2\pi(\pi-\alpha)$, wenn $\alpha+u+v$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Eine ähnliche Formel erhält man, wenn man in der allgemeinen Formel (25) $u=v+\beta$ oder $u=v+\beta-\pi$ setzt, für welche beide Werthe der dort angegebene erste Fall Statt hat: auch wird für diese beiden Werthe $\Phi=v$ und es verschwinden deshalb die beiden Elemente der letzten Function $D(\Phi-v,\beta+v-u)$, welche in eine Function $\Lambda$ übergeht. Man erhält hierdurch folgende Formel:

$$27. \quad D(v,\alpha+\beta)=D(v+\beta,\alpha)+D(v,\beta)+D(-\beta,\alpha+\beta)$$
$$+\Lambda\left(\frac{\sin\alpha \sin v}{\sin\beta\sin(v+\alpha+\beta)}\right)-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin\alpha\sin(v+\beta)}{\sin\beta\sin(v+\alpha+\beta)}\right)^2+B,$$

und es ist unter der Voraussetzung dafs $\alpha$, $\beta$, $v+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen,

1. $B=-\frac{1}{2}\beta$; wenn $v+\alpha+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B=-\frac{1}{2}(\pi-\beta)^2$; wenn $v+\alpha+\beta$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt.

Setzt man in Formel (26) $v=-\alpha-u$ und $v=\pi-\alpha-u$, und bemerkt, dafs $\Lambda(-1)=\frac{1}{4}\pi^2$, so erhält man

$$28. \quad D(u,\alpha)+D(-u-\alpha,\alpha)=\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)+B,$$

und wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so ist

1. $B=\frac{1}{2}(\alpha-\pi)^2-\frac{1}{6}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B=\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{6}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Setzt man in Formel (26) $v=0$, so kann nur der erste der dort angegebenen Fälle Statt haben; es ist daher

$$29. \quad D(u,\alpha)+D(-u,\alpha+u) = \tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\right)^2+\tfrac{1}{2}u^2;$$

wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen.

Verwandelt man in (28) $\alpha$ in $\pi-\alpha-u$ und vertauscht in Formel (29) $\alpha$ und $u$, so erhält man durch Subtraction dieser beiden Gleichungen und durch Addition der unveränderten Formel (29):

$$30. \quad D(u,\alpha)+D(\alpha,u) = l\left(\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right) l\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\right)+B,$$

und wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so ist

1. $B=-\alpha u+\frac{1}{6}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B=-(\alpha-\pi)u+\frac{1}{6}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Subtrahirt man die Formeln (30) und (29) von einander und vertauscht alsdann $\alpha$ und $u$, so erhält man

$$31. \quad D(u,\alpha)-D(-\alpha,u+\alpha) = l\left(\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right) l\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\right)-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)^2+B;$$

und wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so ist

1. $B=-\alpha u-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{6}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B=-(\alpha-\pi)u-\frac{(\alpha-\pi)^2}{2}+\frac{1}{6}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Verbindet man eben so die Gleichungen (28) und (30) mit einander, so erhält man

$$32. \quad D(u,\alpha)-D(-u-\alpha,u) = l\left(\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right) l\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\right)-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\right)^2+B,$$

und wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so ist

1. $B=-\alpha u-\frac{(u-\pi)^2}{2}+\frac{1}{6}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B=-(\alpha-\pi)u-\frac{(u+\pi)^2}{2}+\frac{1}{6}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Diese fünf Formeln (28 bis 32), von welchen sich bei *Hill* zwei finden, aber ohne genaue Bestimmung der Grenzen für die Kreisbogen,

sind die einfachsten, welche überhaupt Statt haben, indem durch sie die Summe oder Differenz zweier Functionen $D$ durch Logarithmen und Kreisbogen ausgedrückt wird. Sie entsprechen auch genau den oben für die Function $\Lambda(x)$ gefundenen fünf einfachen Gleichungen, und sie können aus diesen eben so abgeleitet werden, wie wir die allgemeine Formel (25) aus der entsprechenden Formel (2) abgeleitet haben.

Von vorzüglichem Nutzen für die Theorie der Function $D(u, \alpha)$ ist besonders die Formel (30), weil man durch dieselbe alle Veränderungen, welche man mit dem einen der beiden Elemente vorgenommen hat, auf das andere Element übertragen kann.

Wir wollen diese einfachen Formeln zunächst wieder dazu benutzen, einige specielle Werthe der Function $D(u, \alpha)$ zu finden, welche sich durch Logarithmen und Kreisbogen ausdrücken lassen. Setzt man in (28) $\alpha = -2u$, so erhält man

$D(u, -2u) = u^2 - \frac{1}{12}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt;

$D(u, -2u) = (u-\pi)^2 - \frac{1}{12}\pi^2$, wenn $u$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$ liegt;

welche beide in folgende zusammengefafst werden können:

33. $D(\alpha, -2\alpha) = \alpha^2 - \frac{1}{12}\pi^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Setzt man in Formel (29) $u = \pi - 2\alpha$, so erhält man

34. $D(-2\alpha, \alpha) = \frac{1}{4}(\pi - 2\alpha)^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt.

Wird endlich in Formel (30) $u = \alpha$ gesetzt, so erhält man:

$D(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2}(l2\cos\alpha)^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{12}\pi^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und

$D(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2}(l2\cos\alpha)^2 - \frac{(\alpha-\pi)^2}{2} + \frac{1}{12}\pi^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$ liegt;

welche beide in folgende zusammengefafst werden können:

35. $D(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2}(l2\cos\alpha)^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{12}\pi^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Die Formeln, welche nun in Beziehung auf Einfachheit zunächst folgen, sind diejenigen, in welchen die Summe oder Differenz zweier Functionen $D(u, \alpha)$ durch Logarithmen und Kreisbogen und durch die einfachere Function $\Lambda(x)$ ausgedrückt wird. Da aber die Anzahl dieser Formeln aufserordentlich grofs ist, so werden wir uns hier darauf beschränken, einige der einfachsten herzuleiten.

Wird in Formel (26) $v = u$ gesetzt, so ist

36. $D(u, \alpha) + D(u, -\alpha - 2u) = \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{-\sin^2 u}{\sin^2(u+\alpha)}\right) + B,$

und wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so ist

1. $B = u^2$, wenn $\alpha+2u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B = (u-\pi)^2 - \alpha\pi$, wenn $\alpha+2u$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt;
3. $B = (u+\pi)^2 + (\alpha-\pi)\pi$, wenn $\alpha+2u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Wird ferner in Formel (26) $u+v=0$, $u+v=\pi$ und $u+v=-\pi$ gesetzt, so erhält man:

37. $D(u,\alpha) + D(-u,\alpha) = \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{-\sin^2 u}{\sin(u+\alpha)\sin(\alpha-u)}\right) + \frac{1}{4}\left(l\frac{\sin(u+\alpha)}{\sin(u-\alpha)}\right)^2 + B$

und es ist, wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen,

1. $B = 0$, wenn $\alpha-u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B = -\alpha\pi + \frac{1}{2}\pi^2$, wenn $\alpha-u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt;
3. $B = -(\pi-\alpha)\pi + \frac{1}{2}\pi^2$, wenn $\alpha-u$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt.

Man kann aus diesen Formeln eine sehr große Anzahl ähnlicher ableiten, indem man die darin vorkommenden Functionen $D$ mit Hülfe der fünf einfachen Gleichungen (28) bis (32) verwandelt, wobei man zugleich wo es zur Vereinfachung zweckmäßig ist, die Function $\Lambda$ mit verwandeln kann. Eine merkwürdige Verwandlung dieser Art erhält man, wenn man die Function $D(u, -\alpha-2u)$ der Formel (36) nach Formel (29) umformt, nämlich:

38. $D(u,\alpha) - D(u,\alpha+u) = \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{-\sin^2 u}{\sin^2(u+\alpha)}\right) - \frac{1}{2}\left(l\frac{\sin(u+2\alpha)}{\sin(u+\alpha)}\right)^2 + B.$

und wenn $\alpha$ und $\alpha+u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so ist

1. $B = \frac{1}{2}u^2$, wenn $\alpha+2u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B = \frac{1}{2}(\pi-u)^2 - \pi\alpha$, wenn $\alpha+2u$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt;
3. $B = \frac{1}{2}(\pi+u)^2 - \pi(\pi-\alpha)$, wenn $\alpha+2u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Vertauscht man in dieser Formel $u$ und $\alpha$, und verwandelt die beiden Functionen $D(\alpha, u)$ und $D(\alpha, u+\alpha)$ nach Formel (30) und die Function $\Lambda\left(\frac{-\sin^2\alpha}{\sin^2(u+\alpha)}\right)$ nach Formel (5), so erhält man, nach den gehörigen Reductionen, welche der logarithmische Theil zuläßt:

39. $D(u,\alpha) - D(u+\alpha,\alpha) = \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{-\sin u\sin(u+2\alpha)}{\sin(u+\alpha)}\right) - \frac{1}{2}\left(l\frac{\sin(u+2\alpha)}{\sin(u+\alpha)}\right)^2 + B,$

und wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so ist

1. $B = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{12}\pi^2$, wenn $u+2\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2. $B = \frac{(\alpha-\pi)^2}{2} - \frac{1}{12}\pi^2$, wenn $u+2\alpha$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt.

Die beiden Formeln (38) und (39) können leicht so verallgemeinert werden, dafs in der einen die Differenz $D(u,\alpha)-D(u,\alpha+nu)$ und in der andern $D(u,\alpha)-D(u+n\alpha,\alpha)$ durch die Function $\Lambda$, durch Logarithmen und Kreisbogen ausgedrückt werden. Verwandelt man nämlich in (38) nach einander $\alpha$ in $\alpha+u$, $\alpha+2u$, $\alpha+3u$, .... $\alpha+(n-1)u$ und addirt alle diese Gleichungen, so erhält man

$$40.\quad D(u,\alpha)-D(u,\alpha+nu)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k\,\Lambda\left(\frac{-\sin^2u}{\sin^2(\alpha+ku)}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k\left(l\frac{\sin(\alpha+(k+1)u)}{\sin(\alpha+ku)}\right)^2+B,$$

und wenn $\alpha$ und $u$ beide in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen und $\alpha+(n+1)u$ in den Grenzen $\lambda\pi$ und $(\lambda+1)\pi$, wo $\lambda$ eine positive ganze Zahl ist, so ist

1. $B=\frac{nu^2}{2}-\frac{\lambda\pi^2}{2}$, wenn $\alpha+u$ in den Grenzen 0 und $\pi$, und $\alpha+nu$ in den Grenzen $\lambda\pi$ und $(\lambda+1)\pi$ liegt:
2. $B=\frac{nu^2}{2}-(\alpha+nu)\pi+\frac{\lambda\pi^2}{2}$, wenn $\alpha+u$ in den Grenzen 0 und $\pi$, und $\alpha+nu$ in den Grenzen $(\lambda-1)\pi$ und $\lambda\pi$ liegt;
3. $B=\frac{nu^2}{2}+\alpha\pi-\frac{(\lambda+1)\pi^2}{2}$, wenn $\alpha+u$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$, und $\alpha+nu$ in den Grenzen $\lambda\pi$ und $(\lambda+1)\pi$ liegt;
4. $B=\frac{nu^2}{2}-nu\pi+\frac{(\lambda-1)\pi^2}{2}$, wenn $\alpha+u$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$, und $\alpha+nu$ in den Grenzen $(\lambda-1)\pi$ und $\lambda\pi$ liegt.

Verfährt man eben so mit Gleichung (39), so erhält man

$$41.\quad D(u,\alpha)-D(u+n\alpha,\alpha)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k\,\Lambda\left(\frac{-\sin(u+(k-1)\alpha)\sin(u+(k+1)\alpha)}{\sin^2(u+k\alpha)}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k\left(l\frac{\sin(u+(k+1)\alpha)}{\sin(u+k\alpha)}\right)^2$$
$$+\frac{n\alpha^2}{2}-\frac{n\pi^2}{12}-\lambda\alpha\pi+\frac{\lambda\pi^2}{2},$$

wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen und $u+(n+1)\alpha$ in den Grenzen $\lambda\pi$ und $(\lambda+1)\pi$.

Diese beiden Formeln (40) und (41) gewähren viele sehr interessante Folgerungen. Setzt man in der ersteren $\alpha=0$, so erhält man

$$42.\quad D(u,nu)=-\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k\,\Lambda\left(\frac{-\sin^2u}{\sin^2ku}\right)+\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k\left(l\frac{\sin(k+1)u}{\sin ku}\right)^2+B,$$

und es ist, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt und $(n+1)u$ in den Grenzen $\lambda\pi$ und $(\lambda+1)\pi$:

1. $B = -\frac{nu^2}{2} + \frac{\lambda\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}$, wenn $nu$ in den Grenzen $\lambda\pi$ und $(\lambda+1)\pi$ und

2. $B = -\frac{nu^2}{2} + nu\pi - \frac{\lambda\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}$, wenn $nu$ in den Grenzen $(\lambda-1)\pi$ und $\lambda\pi$ liegt.

Eben so giebt Formel (41), wenn man in derselben $u = 0$ setzt,

$$43.\quad D(n\alpha, \alpha) = -\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k A\left(\frac{-\sin(k-1)\alpha\sin(k+1)\alpha}{\sin^2 k\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k \left(l\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}\right)^2 + \frac{n\alpha^2}{2} - \frac{n\pi^2}{12} - \lambda\alpha\pi + \frac{\lambda\pi^2}{2},$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ und $(n+1)\alpha$ in den Grenzen $\lambda\pi$ und $(\lambda+1)\pi$ liegt.

Nach diesen beiden Formeln (42) und (43) kann man jede Function $D(u, \alpha)$, in welcher das erste Element ein Vielfaches des zweiten, oder das zweite Element ein Vielfaches des ersten ist, durch die einfachere Function $A$ und Kreisbogen und Logarithmen ausdrücken. Dieses Resultat aber ist nur ein specieller Fall weit allgemeinerer Resultate, welche wir alsbald entwickeln werden. Für jetzt wollen wir aus diesen Formeln noch einige interessante, die Function $A(x)$ betreffende Resultate ziehen. Nimmt man in (40) $\alpha = x.u$ und nimmt sodann $u$ unendlich klein, so erhält man

$$44.\quad A\left(\frac{-1}{1+x}\right) - A\left(\frac{-1}{n+1+x}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k A\left(\frac{-1}{(x+k)^2}\right) - \tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k \left(l\frac{x+k+1}{x+k}\right)^2,$$

wenn $1+x$ positiv ist. Man kann derselben auch folgende Gestalt geben:

$$45.\quad A(-1-x) - A(-n-1-x)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_k A(-(x+k)^2) - \sum_1^n{}_k l(x+k)\, l(x+k+1) - \frac{n\pi^2}{6}.$$

Nimmt man $x = 0$ und verwandelt $A(-k^2)$ nach Formel (1), so erhält man

$$46.\quad \sum_{-(n+1)}^{+n}{}_k A(k) = \sum_1^n{}_k lk\, l(k+1) + \frac{(n+1)\pi^2}{6}.$$

Diese Formel hat dazu gedient die Richtigkeit der oben berechneten Werthe der Function $A(x)$ zu prüfen. Uebrigens kann man diese Formeln auch aus den oben gefundenen einfachen Formeln für die Function $A(x)$ leicht zusammensetzen. Zwei neue allgemeine Formeln für diese Function, welche in denen des zweiten Paragraphen nicht enthalten sind, erhält man aber aus (40) und (41), wenn man in jener $u = \frac{m\pi}{n}$ und in dieser $\alpha = \frac{m\pi}{n}$ setzt, wo $m$ eine ganze positive Zahl vorstellt, welche kleiner als $n$ sein

soll. Da jedoch die beiden Formeln nicht wesentlich von einander verschieden sind, indem die eine aus der andern sich leicht ableiten läſst, so wollen wir nur die erste derselben hier aufstellen, nemlich:

$$47.\quad \sum_0^{n-1}{}_k\, \Lambda\left(\frac{-\sin^2\frac{m\pi}{n}}{\sin^2\left(\alpha+\frac{km\pi}{n}\right)}\right) = \sum_0^{n-1}{}_k \left(l\,\frac{\sin\left(\alpha+\frac{(k+1)m\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{km\pi}{n}\right)}\right)^2 + \frac{m(n-m)\pi^2}{n}.$$

Nimmt man hierin $n=2$, $m=1$, so erhält man die bekannte Formel (1) §. 2. Nimmt man aber für $n$ und $m$ irgend andere bestimmte Werthe, so erhält man eine unendliche Anzahl neuer Formeln; z. B. für $n=3$, $m=1$ erhält man

$$48.\quad \Lambda\left(\frac{-3}{4\sin^2\alpha}\right) + \Lambda\left(\frac{-3}{4\sin^2(\alpha+\frac{1}{3}\pi)}\right) + \Lambda\left(\frac{-3}{4\sin^2(\alpha+\frac{2}{3}\pi)}\right)$$

$$= \left(l\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\frac{1}{3}\pi)}\right)^2 + \left(l\,\frac{\sin(\alpha+\frac{1}{3}\pi)}{\sin(\alpha+\frac{2}{3}\pi)}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha+\frac{2}{3}\pi}{\sin\alpha}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\pi^2.$$

## §. 6.

Wir kehren nun zur Theorie der Function $D(u,\alpha)$ zurück; und zwar wollen wir jetzt eine merkwürdige Art von Formeln in Betracht ziehen, in denen drei Functionen $D$ vorkommen, deren zweite Elemente, oder deren erste Elemente unter einander gleich sind, und welche drei von einander unabhängige Quantitäten enthalten. Zu diesem Zwecke nehme ich die Formel (26), in welcher ich die drei verschiedenen Fälle, wo der von Kreisbogen abhängige Theil andere Werthe hat, folgendermaaſsen vereinige:

$$B = -\tfrac{1}{2}(u+v+2k\pi)^2 - 2k\pi\alpha + k(k+1)\pi^2,$$

wenn $\alpha$, $u+\alpha$, $v+\alpha$ und $\alpha+u+v+k\pi$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen. Ich verwandle jetzt $v$ in $-2\alpha-u-v-(k-1)\pi$ und erhalte so

$$\Lambda\left(\frac{-\sin u\sin(2\alpha+u+v)}{\sin(u+\alpha)\sin(\alpha+u+v)}\right) = D(u,\alpha) + D(-2\alpha-u-v,\alpha) + D(u,\alpha+v)$$

$$+ D(-2\alpha-u-v,\alpha+v) - \tfrac{1}{2}\left(l\,\frac{\sin(u+\alpha)}{\sin(u+v+\alpha)}\right)^2 - B',$$

$$\text{wo } B' = -\tfrac{1}{2}(2\alpha+v-(k+1)\pi)^2 - 2k\pi\alpha + k(k+1)\pi^2,$$

wenn $\alpha$, $u+\alpha$, $v+\alpha$ und $\alpha+u+v+k\pi$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen.

Vertauscht man in dieser Gleichung $u$ und $v$, wodurch $B'$ in $B''$ übergehen soll, und addirt diese bei den Gleichungen, sammt der unverän-

derten Gleichung (26), so erhält man

$$\Lambda\left(\frac{-\sin u \sin v}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\alpha)}\right)+\Lambda\left(\frac{-\sin u \sin(2\alpha+u+v)}{\sin(u+\alpha)\sin(\alpha+u+v)}\right)+\Lambda\left(\frac{-\sin v\sin(2\alpha+u+v)}{\sin(v+\alpha)\sin(\alpha+u+v)}\right)$$
$$=2D(u,\alpha)+2D(v,\alpha)+2D(-2\alpha-u-v,\alpha)+D(u,\alpha+v)+D(u,-\alpha-u-v)$$
$$+D(v,\alpha+u)+D(v,-\alpha-u-v)+D(-2\alpha-u-v,\alpha+v)+D(-2\alpha-u-v,\alpha+u)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin(u+\alpha)}{\sin(v+\alpha)}\right)^2-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin(\alpha+u+v)}{\sin(\alpha+u)}\right)^2-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin(\alpha+u+v)}{\sin(\alpha+v)}\right)^2+B+B'+B'',$$

wenn $\alpha$, $u+\alpha$, $v+\alpha$ und $\alpha+u+v+k\pi$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen. Die letzten 6 Functionen $D$, sammt den drei logarithmischen Theilen, heben sich vermöge der Formel (29) vollständig auf; denn nach dieser Formel ist

$$D(u,\alpha+v)+D(u,-\alpha-u-v)-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin(\alpha+u+v)}{\sin(\alpha+v)}\right)^2=\tfrac{1}{2}(u+k\pi)^2,$$

$$D(v,\alpha+u)+D(v,-\alpha-u-v)-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin(\alpha+u+v)}{\sin(\alpha+u)}\right)^2=\tfrac{1}{2}(v+k\pi)^2,$$

$$D(-2\alpha-u-v,\alpha+u)+D(-2\alpha-u-v,\alpha+v)-\tfrac{1}{2}\left(l\frac{\sin(\alpha+u)}{\sin(\alpha+v)}\right)^2$$
$$=\tfrac{1}{2}(\pi-2\alpha-u-v)^2,$$

wenn $\alpha$, $u+\alpha$, $v+\alpha$ und $\alpha+u+v+k\pi$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen. Substituirt man diese Werthe und setzt der Kürze wegen

$$\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}=x;\qquad \frac{\sin v}{\sin(v+\alpha)}=y;\qquad \frac{\sin(2\alpha+u+v)}{\sin(\alpha+u+v)}=z,$$

so erhält man

$$49.\quad \Lambda(-xy)+\Lambda(-xz)+\Lambda(-yz)$$
$$=2D(u,\alpha)+2D(v,\alpha)+2D(-2\alpha-u-v,\alpha)+C,$$

wo $C$ der von Kreisbogen abhängige Theil ist, welcher folgende einfache Form annimmt:

$$C=-2\alpha^2-\tfrac{1}{2}\pi^2-2(k-1)\pi\alpha+k(k+1)\pi^2,$$

wenn $\alpha$, $u+\alpha$, $v+\alpha$ und $\alpha+u+v+k\pi$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen.

Eine Formel, welche dieser ähnlich aber minder einfach ist, hat *Hill* in seiner zweiten Abhandlung bewiesen, und hat auf dieselbe ein Verfahren gegründet, welches mit der Addition, Subtraction, Multiplication und Division der elliptischen Integrale einige Aehnlichkeit hat. Hierzu ist jedoch eine andere Formel besser geeignet, welche wir sogleich aus dieser ableiten werden. Setzt man $v=0$, so erhält man aus Formel (49)

$$2D(-2\alpha-u,\alpha)+2D(u,\alpha)=\Lambda\left(\frac{-\sin u\sin(2\alpha+u)}{\sin^2(\alpha+u)}\right)+2\alpha^2-2\pi\alpha+\tfrac{1}{2}\pi^2,$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt. Verwandelt man hierin $u$ in $u+v$,

sogleich, wenn man in Formel (50) nach einander $v = u,\ 2u,\ 3u,\ \dots\ (n-1)u$ setzt und die so erhaltenen Gleichungen summirt, nemlich

$$53.\quad nD(u,\alpha)$$
$$D(nu,\alpha) - T(u,u,\alpha) - T(u,2u,\alpha) - \dots - T(u,(n-1)u,\alpha).$$

Setzt man hierin $\frac{u}{n}$ statt $u$, so hat man zugleich die allgemeine Formel für die Division:

$$54.\quad \frac{1}{n}D(u,\alpha)$$
$$= D\left(\frac{u}{n},\alpha\right) + \frac{1}{n}\left(T\left(\frac{u}{n},\frac{u}{n},\alpha\right) + T\left(\frac{u}{n},\frac{2u}{n},\alpha\right) + \dots + T\left(\frac{u}{n},\frac{(n-1)u}{n},\alpha\right)\right).$$

Setzt man hierin wieder $mu$ statt $u$ und verwandelt $D(mu,\alpha)$ nach Formel (53) in $mD(u,\alpha)$, so erhält man

$$55.\quad \frac{m}{n}D(u,\alpha) =$$
$$D\left(\frac{mu}{n},\alpha\right) + \frac{1}{n}\left[\left(T\frac{mu}{n},\frac{mu}{n},\alpha\right) + T\left(\frac{mu}{n},\frac{2mu}{n},\alpha\right) + \dots + T\left(\frac{mu}{n},\frac{m(n-1)u}{n},\alpha\right)\right]$$
$$-\frac{1}{n}\left(T(u,u,\alpha) + T(u,2u,\alpha) + \dots + T(u,(m-1)u,\alpha)\right),$$

welche Formel die Multiplication und Division dieser Function zugleich enthält. Wir übergehen hier, um diese Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, die interessanten besonderen Fälle, welche in diesen Formeln enthalten sind, und wollen nur einige allgemeine Folgerungen aus denselben ziehen. Nimmt man in Formel (55) $u = \pi$, so verschwindet $D(\pi,\alpha)$, und man hat die Function $D\left(\frac{m\pi}{n},\alpha\right)$, ausgedrückt durch die Functionen $\Lambda$. Nach Formel (30) kann man ferner diese Function in $D\left(\alpha,\frac{m\pi}{n}\right)$ verwandeln, so dafs eben sowohl $D\left(\alpha,\frac{m\pi}{n}\right)$ durch die Function $\Lambda$ ausgedrückt werden kann. Setzt man ferner in Formel (55) $u = \alpha$, so ist, wie wir oben gefunden haben, $D(\alpha,\alpha) = \frac{1}{2}(l\,2\cos\alpha)^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{12}\pi^2$: man erhält daher $D\left(\frac{m\alpha}{n},\alpha\right)$, ausgedrückt durch die einfachere Function $\Lambda$. Fafst man diese Resultate zusammen, so zeigt sich, dafs die Function $D(u,\alpha)$ sich in ein Aggregat mehrer einfacher Functionen $\Lambda(x)$ zerlegen läfst, wenn eines der beiden Elemente ein rationales Verhältnifs zur Zahl $\pi$ hat, oder wenn beide Elemente ein rationales Verhältnifs zu einander haben. Der Theil $T(u,v,\alpha)$, welcher vier Functionen $\Lambda$ enthält, kann nach den §. 2. gefundenen Formeln in mannigfache Formen gebracht werden: namentlich

können die vier Functionen $\Lambda$, welche er enthält, allemal auf drei reducirt werden. Wir übergehen aber der Kürze wegen diese Umformungen.

Zu der allgemeinen Formel (50), auf welche sich die Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Function $D(u, \alpha)$ gründet, giebt es noch eine andere, entsprechende, in welcher die drei Functionen dasselbe erste Element haben, und vermöge welcher man dieselben Veränderungen, welche hier mit dem ersten Elemente vorgenommen worden sind, auch in Beziehung auf das zweite Element ausführen kann. Diese entsprechende Formel findet man sogleich durch Anwendung der Formel (30). Verwandelt man nämlich alle drei Functionen $D(u+v, \alpha)$, $D(u, \alpha)$ und $D(v, \alpha)$ nach dieser Formel, und die vier Functionen $\Lambda$ nach Formel (5), und verwandelt sodann die Buchstaben $\alpha$ in $u$, $u$ in $\alpha$, $v$ in $\beta$, so erhält man, nach gehöriger Vereinfachung, wenn der Kürze halber gesetzt wird

$$\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)} = \xi, \qquad \frac{\sin u}{\sin(u+\beta)} = \eta, \qquad \frac{\sin u}{\sin(u+\alpha+\beta)} = \zeta,$$

56. $$D(u, \alpha+\beta) = D(u, \alpha) + D(u, \beta) + \tfrac{1}{2}\Lambda(-\zeta^2) - \tfrac{1}{2}\Lambda\left(\frac{-\xi\eta}{\eta}\right) - \tfrac{1}{2}\Lambda\left(\frac{-\xi\zeta}{\eta}\right) - \tfrac{1}{2}\Lambda\left(\frac{-\eta\zeta}{\xi}\right) + C,$$

wo $C$, der von Kreisbogen abhängige Theil, unter der Voraussetzung, dafs $\alpha$, $\beta$, $u+\alpha+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, folgende acht verschiedene Werthe hat:

I. Wenn $\alpha+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt.

1. $C = 0$, wenn $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$, $u+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ ist.
2. $C = \pi\alpha$, wenn $u+\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, $u+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt.
3. $C = \pi\beta$, wenn $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$, $u+\beta$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.
4. $C = -\pi(\pi-\alpha-\beta)$, wenn $u+\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, $u+\beta$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 ist.

II. Wenn $\alpha+\beta$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt.

1. $C = 0$, wenn $u+\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, $v+\beta$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.
2. $C = \pi(\pi-\alpha)$, wenn $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$, $v+\beta$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.
3. $C = \pi(\pi-\beta)$, wenn $u+\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, $v+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt.

4. $C = -\pi(\alpha+\beta-\pi)$, wenn $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$, $v+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt.

Vermittelst dieser Formel, welche, in sehr complicirter Form und ohne genaue Bestimmung des von Kreisbogen abhängigen Theiles, sich ebenfalls in *Hill's* Abhandlung findet, kann man jede beliebige Anzahl von Functionen $D$, deren erste Elemente alle gleich sind, so summiren, dafs sie durch eine solche Function ausgedrückt werden; mit Hinzufügung eines von der einfachen Transcendente $\varLambda(x)$ abhängigen Theiles; oder man kann

$$D(u,\alpha) \pm D(u,\beta) \pm D(u,\gamma) + \ldots .$$

durch eine einzige Function $D$ und mehrere Functionen $\varLambda$ ausdrücken. Ferner kann man die Function $D\left(u, \frac{m\alpha}{n}\right)$ durch die Function $D(u,\alpha)$ und durch Functionen $\varLambda$ ausdrücken. Eine nähere Entwickelung dieser Operationen aber, welche aufserordentlich leicht und einfach sind, übergehen wir.

Man kann auch die hier gefundenen Resultate benutzen, um daraus neue Eigenschaften der einfachen Function $\varLambda(x)$ abzuleiten. Um hiervon ein Beispiel zu geben, wollen wir in der Formel (51) $u$ und $v$ vertauschen und sie dann von dieser abziehen, dies giebt:

$$T(u, v+w, \alpha) + (v, w, \alpha) = T(v, u+w, \alpha) + T(u, w, \alpha).$$

Diese Gleichung, gehörig entwickelt und vereinfacht, giebt eine neue Formel für die Function $\varLambda$, welche zwölf dieser Transcendenten enthält, aber allgemeiner ist als die in §. 2. gefundenen, da sie vier von einander unabhängige Gröfsen $u$, $v$, $w$ und $\alpha$ enthält, während die oben entwickelten Formeln nur zwei unabhängige Gröfsen enthalten.

## §. 7.

Nachdem wir nun die Formeln aufgestellt haben, welche die einfachsten Eigenschaften der Function $D(u,\alpha)$ ausdrücken, wollen wir noch die einfachsten Reihen-Entwickelungen angeben, welche zur numerischen Berechnung dieser Function dienen.

Setzen wir, wie wir schon oben thaten,

$$1 - x e^{\alpha i} = r e^{-ui} \quad \text{oder} \quad x = \frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \quad r = \frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)},$$

$$r^2 = 1 - 2\cos\alpha + x^2, \qquad \tang u = \frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha},$$

so giebt die theilweise Integration:

$$D(u,\alpha) = lx\, lr - \int_0 lr \frac{dx}{x},$$

und wenn statt $lr = \frac{1}{2}l(1-2x\cos\alpha+x^2)$ die bekannte Reihen-Entwicklung genommen und integrirt wird,

$$57.\quad D(u,\alpha) = lx\,lr + \left(\frac{x\cos\alpha}{1^2} + \frac{x^2\cos2\alpha}{2^2} + \frac{x^3\cos3\alpha}{3^3} + \ldots\right).$$

in den Grenzen $u = -\frac{1}{2}\alpha$ bis $u = \frac{1}{2}(\pi-\alpha)$, wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt

Verwandelt man $u$ in $\pi-u-\alpha$, wodurch $x$ in $\frac{1}{x}$ übergeht, und formt sodann $D(-u-\alpha,\alpha)$ nach Formel (28) in $D(u,\alpha)$ um, so erhält man

$$58.\quad D(u,\alpha) = B + lx\,lr - \tfrac{1}{2}(lx)^2 - \left(\frac{\cos\alpha}{1^2x} + \frac{\cos2\alpha}{2^2x^2} + \frac{\cos3\alpha}{3^2x^3} + \ldots\right):$$

und wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt, ist

$B = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6}\pi^2$, von $u = -\alpha$ bis $u = -\frac{1}{2}\alpha$.

$B = \frac{1}{2}(\alpha-\pi)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$, von $u = \frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ bis $u = \pi-\alpha$.

Vertauscht man in diesen beiden Reihen-Entwickelungen $u$ und $\alpha$, wodurch $x$ in $r$ übergeht, und verwandelt alsdann wieder die Function $D(\alpha,u)$ nach Formel (30) in $D(u,\alpha)$, so erhält man

$$59.\quad D(u,\alpha) = B - \left(\frac{r\cos u}{1^2} + \frac{r^2\cos2u}{2^2} + \frac{r^2\cos3u}{3^2} + \ldots\right).$$

Wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, so ist

1. $B = -\alpha u + \frac{1}{6}\pi^2$ in den Grenzen $u = 0$ bis $u = \pi - 2\alpha$;

wenn aber $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$ liegt, so ist

2. $B = -(\alpha-\pi)u + \frac{1}{6}\pi^2$ in den Grenzen $u = -(2\alpha-\pi)$ bis $u = 0$.

Man erhält für

$$60.\quad D(u,\alpha) = B + \tfrac{1}{2}(lr)^2 + \left(\frac{\cos u}{1^2.r} + \frac{\cos2u}{2^2.r^2} + \frac{\cos3u}{3^2r^3} + \ldots\right),$$

1. $B = -\alpha u - \frac{(u-\pi)^2}{2} + \frac{1}{6}\pi^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und $u+\alpha$ in den Grenzen $\pi-\alpha$ und $\pi$ liegt; oder wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ bis $\pi$, und $u+\alpha$ in den Grenzen $\alpha$ und $\pi$ ist;

2. $B = -(\alpha-\pi)u - \frac{(u+\pi)^2}{2} + \frac{1}{6}\pi^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\alpha$, oder wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$, und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi-\alpha$ liegt.

Setzt man in (57) und (58) $\pi-\alpha-u$ statt $\alpha$, wodurch $x$ in $\frac{x}{r}$ übergeht und verwandelt $D(u,-\alpha-u)$ nach Formel (29) in $D(u,\alpha)$, so erhält man:

$$61.\quad D(u,\alpha) =$$

$$-\frac{u^2}{2} + lx\,lr - \tfrac{1}{2}(lr)^2 + \left(\frac{x\cos(\alpha+u)}{r} - \frac{x^2\cos2(\alpha+u)}{2^2.r^2} + \frac{x^3\cos3(\alpha+u)}{3^3r^3} - \ldots\right).$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $2\alpha$; oder wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$ liegt und $u+\alpha$ in den Grenzen $2\alpha-\pi$ bis $\pi$. Ferner für

$$D(u,\alpha) = B + \tfrac{1}{2}(lx)^2 - \left(\frac{r\cos(\alpha+u)}{x} - \frac{r^2\cos 2(\alpha+u)}{2^2 . x^2} + \frac{r^3\cos 3(\alpha+u)}{3^2 x^3} - \ldots\right),$$

1. $B = -\alpha u - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\pi^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und $u+\alpha$ in den Grenzen $2\alpha$ und $\pi$ liegt;
2. $B = -(\alpha-\pi)\,u - \frac{(\alpha-\pi)^2}{2} + \frac{1}{6}\pi^2$, wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$, und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $2\alpha-\pi$ liegt.

Die hier gegebenen sechs Reihen-Entwickelungen, von welchen man für jeden besonderen Fall die am besten convergirende zur Berechnung wählen kann, reichen zur Berechnung der Function $D(u,\alpha)$ vollständig aus.

## §. 8.

Nachdem wir nun die Grundformeln der Function $D(u,\alpha)$ entwickelt haben, wenden wir uns zu einer ähnlichen Behandlung des andern logarithmischen Integrals der zweiten Ordnung

$$E(x,\alpha) = \int_0 \frac{l(\pm x)\sin\alpha\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}.$$

Die Eigenschaften dieser Function sind großentheils denen der Function $D(x,\alpha)$ sehr ähnlich, und lassen sich ganz nach denselben Methoden entwickeln. Im Ganzen ist jedoch die Theorie der Function $E(x,\alpha)$ bei weitem einfacher; welches schon daraus hervorgeht, daſs sie sich durch andere Functionen derselben Art ausdrücken läſst, in welchen das Element $x$ den bestimmten Werth $x = -1$ hat; welche also nur von einem einzigen Elemente abhängig sind. Auch dadurch wird die Behandlung dieser Function leichter und angenehmer, daſs in den Formeln keine Kreisbogen vorkommen, die für die Function $D(x,\alpha)$ so viele Weitläuftigkeiten verursachen. Ferner wird diese Function in keinem Falle unendlich groſs, sondern bleibt immer continuirlich, selbst wenn $x$ unendlich groſs wird, so daſs auch die Distinctionen der verschiedenen Intervalle, innerhalb deren die Continuität Statt hat, hier wegfallen. Schon hieraus kann man erkennen, daſs in den Formeln auch keine Logarithmen vorkommen werden; denn diese würden für bestimmte Werthe der Variabeln unendlich werden; welches der Natur der Function $E(x,\alpha)$ zuwider ist. Aus der Definition folgen zunächst wieder folgende Eigenschaften:

$$E(x,-\alpha) = -E(x,\alpha); \qquad E(x,\alpha+\pi) = E(-x,\alpha);$$
$$E(x,\pm\alpha+2k\pi) = \pm E(x,\alpha); \quad E(x,\pm\alpha+(2k+1)\pi) = \pm E(-x,\alpha);$$

oder, wenn $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ gesetzt und $E\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)},\alpha\right)$ einfach durch $E(u,\alpha)$ bezeichnet wird, wie wir schon oben gethan haben,

$$E(u,\alpha+k\pi) = E(u,\alpha); \quad E(u+k\pi,\alpha) = E(u,\alpha);$$
$$E(-u,-\alpha) = -E(u,\alpha); \qquad E(u,0) = 0.$$

Ferner ist das vollständige Differenzial der Function $E(x,\alpha)$

$$d.E(x,\alpha) = l(\pm x)\, d\,\text{Arc tang}\,\frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha} - \tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\alpha+x^2)\,d\alpha.$$

oder, wenn $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ gesetzt wird,

$$dE(u,\alpha) = -l\left(\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)du - l\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\right)d\alpha.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun, genau denselben Gang verfolgend, welchen wir für die Entwickelung der Eigenschaften der Function $D(x,\alpha)$ gewählt haben, zunächst wieder $x$ in $-x^n$, $\alpha$ in $n\alpha$ verwandeln und das Integral $E(-x^n, n\alpha)$ in seine einfachen Bestandtheile zerlegen. Hierdurch wird

$$E(-x^n, n\alpha) = -n\int\frac{l(\pm x)\sin n\alpha . n x^{n-1}dx}{1-2x^n\cos n\alpha+x^{2n}};$$

und da sich die rationale Function unter dem Integrationszeichen bekanntlich folgendermaafsen in Partialbrüche zerlegen läfst:

$$\frac{n x^{n-1}\sin n\alpha}{1-2x^n\cos n\alpha+x^{2n}} = \sum_0^{n-1}{}_k\frac{\sin\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)}{1-2x\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)+x^2},$$

so erhält man durch Ausführung der Integration der einzelnen Theile sogleich

$$62. \quad E(-x^n, n\alpha) = n\sum_0^{n-1}{}_k E\left(-x,\ \alpha+\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Verwandelt man $\alpha$ in $\alpha+\frac{\pi}{n}$, so erhält man daraus

$$63. \quad E(+x^n, n\alpha) = n\sum_0^{n-1}{}_k E\left(-x,\ \alpha+\frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

Setzt man ferner in dem Integrale $E(x,\alpha)$, $\frac{1}{x}$ statt $x$, so bleibt dasselbe völlig ungeändert; woraus die einfache Formel hervorgeht

$$64. \quad E\left(\frac{1}{x},\alpha\right) = E(x,\alpha).$$

Dies sind diejenigen Eigenschaften der Function $E(x, \alpha)$, welche sich unter dieser Form am einfachsten darstellen lassen. Für die Entwickelung der übrigen werden wir von der Form $E(u, \alpha)$ Gebrauch machen und auch hier dieselben Methoden wie oben für die Function $D(u, \alpha)$ anwenden. Wir setzen deshalb auch hier in der für die Function $A(x)$ gefundenen allgemeinen Formel (2) $x e^{\alpha i}$ statt $x$ und $y e^{\beta i}$ statt $y$, $1 - x e^{\alpha i} = r e^{-ui}$ und $1 - y e^{\beta i} = \varrho e^{-vi}$ und zerlegen die imaginären Functionen $A$ in ihre realen und imaginären Theile, von welchen wir hier nur die letzteren in Betracht ziehen und welche

$$E(-xy, \alpha+\beta)$$
$$= E(-x, \alpha) + E(-y, \beta) + E\left(\frac{x\varrho}{r}, \alpha+u-v\right) + E\left(\frac{yr}{\varrho}, \beta+v-u\right) + L$$

geben, wo $L$ wieder der von Logarithmen und Kreisbogen abhängige Theil ist, oder vielmehr der Theil der Formel, welcher Logarithmen und Kreisbogen enthalten kann, von welchem wir aber sogleich zeigen werden, dafs er weder die einen, noch die anderen enthält. Wird jetzt wieder der Hülfswinkel $\varphi$ eingeführt, welcher durch die Gleichung

$$\tang \varphi = \frac{\sin u \sin v \sin(\alpha+\beta)}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\beta) - \sin u \sin v \cos(\alpha+\beta)}$$

bestimmt ist, so hat man, eben so wie oben,

$$xy = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)}; \quad x = \frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}; \quad y = \frac{\sin v}{\sin(v+\beta)};$$
$$\frac{x\varrho}{r} = \frac{-\sin(\varphi-u)}{\sin(\varphi+\alpha-v)}; \quad \frac{yr}{\varrho} = \frac{-\sin(\varphi-v)}{\sin(\varphi+\beta-u)};$$

und wenn man diese Werthe substituirt und von der einfacheren Art der Bezeichnung Gebrauch macht,

$$E(\varphi, \alpha+\beta) =$$
$$E(u,\alpha) + E(v,\beta) + E(\varphi-u, \alpha+u-v) + E(\varphi-v, \beta+v-u) + L.$$

Um nun $L$ zu bestimmen, werden wir diese Formel differenziiren, wobei die Grenzen, innerhalb deren $\alpha$, $u$, $\beta$, $v$ liegen, vollkommen gleichgültig sind, da das Differenzial von $E(u, \alpha)$ keine Kreisbogen enthält. Ferner würde es hier auch ganz überflüssig sein, in Beziehung auf alle vier unabhängige Variabeln zugleich, die Differenziation auszuführen, wie wir es oben für die Function $D(u, \alpha)$ gethan haben; denn es reicht hier vollständig hin, nur eine dieser Gröfsen, als welche ich $u$ nehme, als veränderlich zu betrachten. Wird die Differenziation in Beziehung auf $u$ ausgeführt, so erhält man

$$-l\left(\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)}\right)d\Phi = -l\left(\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)du - l\left(\frac{\sin(\varphi-u)}{\sin(\varphi+\alpha-v)}\right)(d\Phi-du)$$
$$-l\left(\frac{\sin(\alpha+u-v)}{\sin(\varphi+\alpha-v)}\right)du - l\left(\frac{\sin(\varphi-v)}{\sin(\varphi+\beta-u)}\right)d\Phi + l\left(\frac{\sin(\beta+v+u)}{\sin(\varphi+\beta+u)}\right)du + dL$$

Die Glieder dieser Gleichung, welche $d\Phi$ enthalten, verschwinden für sich, und eben so die Glieder, welche $du$ enthalten; es bleibt also nur $dL = 0$, oder es ist $L$ von $u$ unabhängig. Hieraus folgt zugleich, dafs $L$ auch von $v$ unabhängig sein mufs; denn man kann in der obigen Formel $u$ und $v$ mit einander vertauschen, wenn zugleich $\alpha$ und $\beta$ vertauscht werden, ohne dafs diese Formel sich ändert. Da also $L$ von $u$ und von $v$ unabhängig ist so setze ich $u = 0$ und $v = 0$, wodurch zugleich $\Phi = 0$ wird, und da dann alle Glieder der Formel verschwinden, so ist $L = 0$, und diese Bestimmung der Constante mufs für alle beliebigen Werthe der Variabeln gelten, weil unter keiner Bedingung in der Formel eine Discontinuität Statt findet. Es ist also

65. $E(\Phi,\ \alpha+\beta)$
$$= E(u,\alpha) + E(v,\beta) + E(\Phi-u,\ \alpha+u-v) + E(\Phi-v,\ \beta+u-v)$$
$$\text{wenn } \operatorname{tang}\Phi = \frac{\sin u \sin v \sin(\alpha+\beta)}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\beta) - \sin u \sin v \cos(\alpha+\beta)}.$$

Aus dieser allgemeinen Formel leiten wir nun wieder die speciellern Formeln her. Setzt man $\alpha+\beta = 0$, wodurch $\Phi = 0$, so erhält man

66. $E(u,\alpha) + E(-u,\ \alpha+u+v) = E(v,\alpha) + E(-v,\ \alpha+u+v)$;

setzt man aber $u = \beta+v$, wodurch $\Phi = v$, so erhält man

67. $E(v,\ \alpha+\beta) = E(v+\beta,\ \alpha) + E(v,\beta) + E(-\beta,\ \alpha+\beta)$.

Diese beiden Formeln entsprechen den für die Function $D(u,\alpha)$ gefundenen Formeln (26) und (27). Aus ihnen erhält man leicht auch die den fünf einfachen Gleichungen (28) bis (32) entsprechenden Ausdrücke:

68. $E(u,\alpha) = E(-u-\alpha,\ \alpha)$,

69. $E(u,\alpha) = E(u,\ -u-\alpha)$,

70. $E(u,\alpha) = E(\alpha,u)$,

71. $E(u,\alpha) = E(\alpha,\ -u-\alpha)$,

72. $E(u,\alpha) = E(-u-\alpha,\ u)$.

Die erste dieser fünf Formeln erhält man aus (66), wenn man $v = -\alpha-u$ nimmt; die zweite, wenn man $v = 0$ nimmt; und die übrigen drei entstehen aus der Verbindung der beiden ersten. Die merkwürdigste dieser Formeln ist die dritte, welche zeigt, dafs man die beiden Elemente der Function $E(u,\alpha)$ unter einander vertauschen kann. Diese Eigenschaft

kann man aber auch sogleich an dem oben gegebenen vollständigen Differenziale der Function $E(u, \alpha)$ erkennen. Zu den übrigen Formeln für die Function $D(u, \alpha)$, namentlich zu denen des §. 6., auf welchen die Addition, Subtraction, Multiplication und Division dieser Function beruhet, giebt es keine entsprechenden Formeln für die Function $E(u, \alpha)$. Dafür hat aber diese Function eine eigenthümliche Formel, welche mehr leistet als alle jene zusammen. Man erhält dieselbe indem man in (65) setzt: $u = \frac{\pi-\alpha}{2}$, $v = \frac{\pi-\beta}{2}$, wodurch $\varphi = \frac{\pi-\alpha-\beta}{2}$ wird, nämlich:

$$E\left(\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}, \alpha+\beta\right)$$
$$= E\left(\frac{\pi-\alpha}{2}, \alpha\right)+E\left(\frac{\pi-\beta}{2}, \beta\right)+E\left(\frac{-\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)+E\left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Da aber nach Gleichung (69) und (71) $E\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)+E\left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ $= -2E(\frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\alpha)$, so hat man, wenn man $\alpha$ in $2\alpha$ und $\beta$ in $2u$ verwandelt,

78. $$2E(u, \alpha)$$
$$= E(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha, 2\alpha)+E(\tfrac{1}{2}\pi-\beta, 2\beta)-E(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha-\beta, 2\alpha+2\beta).$$

Diese Formel ist wesentlich dieselbe, welche wir schon zu Ende des §. 1. gegeben haben; sie zeigt nämlich die Zerlegung der von zwei Elementen abhängigen Function in Functionen derselben Art, welche nur von einem Elemente abhängig sind. Die Function $E\left(\frac{\pi-\alpha}{2}, \alpha\right)$ ist nämlich dieselbe, welche nach der andern Art der Bezeichnung dargestellt wird als $E(-1, \alpha)$, und da sie nur von einem Elemente abhängig ist, so wollen wir sie in dem Folgenden einfach durch $E'(\alpha)$ bezeichnen, so daſs

$$E'(\alpha) = -\int_0^1 \frac{lx \sin\alpha . dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

Dieselbe Function kann auch, wie wir schon oben gefunden haben, definirt werden als

$$E'(\alpha) = -\int_0^\alpha l(\pm 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)\, d\alpha,$$

in welcher Form sie häufig vorkommt, so daſs *Clausen* die Mühe übernommen hat, eine Tafel derselben zu berechnen, welche sich im gegenwärtigen Journale Bd. VIII. pag. 298 abgedruckt findet. Die Eigenschaften dieser Function, welche unmittelbar aus der Definition folgen, sind:

$$E'(-\alpha) = -E'(\alpha); \quad E'(\alpha+2k\pi) = E'(\alpha); \quad E'(k\pi) = 0.$$

Um die anderen Eigenschaften zu finden, können wir in den bereits ent-

wickelten Formeln die Functionen $E(u, \alpha)$ durch diese einfache Function $E(\alpha)$ ausdrücken nach der Formel:

$$74.\quad 2E(u, \alpha) = E'(2u) + E'(2\alpha) - E'(2u + 2\alpha).$$

Wird dies zunächst bei der allgemeinen Formel (65) ausgeführt, so erhält man:

$$75.\quad E'(2\varphi) + E'(2\alpha + 2\beta) - E'(2\varphi + 2\alpha + 2\beta)$$
$$= E'(2u) + E'(2\alpha) - E'(2u + 2\alpha) + E'(2v) + E'(2\beta) - E'(2v + 2\beta)$$
$$+ E'(2\varphi - 2u) + E'(2\alpha + 2u - 2v) - E'(2\varphi + 2\alpha - 2v) + E'(2\varphi - 2v)$$
$$+ E'(2\beta + 2v - 2u) - E'(2\varphi + 2\beta - 2u),$$

$$\text{wenn}\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin u \sin v \sin(\alpha + \beta)}{\sin(u + \alpha)\sin(v + \beta) - \sin u \sin v \cos(\alpha + \beta)}.$$

Diese Formel ist zwar an sich merkwürdig genug, aber sie enthält zu viele solche Functionen um practisch brauchbar zu sein; auch enthält sie, obgleich sie sehr allgemein ist, nur wenig interessante specielle Fälle; die meisten besonderen Bestimmungen einer oder mehrerer der vier unabhängigen Gröfsen $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$, welche die Formel vereinfachen sollen, machen sie rein identisch. Ein specieller Fall, welcher der Erwähnung werth ist, ist der, welchen man erhält, wenn man $\alpha = \beta$ und $u = v$ setzt, nemlich:

$$76.\quad E'(2\varphi) - E'(2\varphi + 4\alpha) - 2E'(2\varphi - 2u) + E'(4\alpha) + 2E'(2u + 2\alpha)$$
$$- 4E'(2\alpha) + 2E'(2\varphi + 2\alpha - 2u) - 2E'(2u) = 0,$$

$$\text{wenn}\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sin^2 u \cos\alpha}{\sin\alpha + \sin 2u \cos\alpha};$$

Die specielleren Formeln (66) bis (72) geben alle nur identische Gleichungen, wenn man in ihnen die von zwei Elementen abhängigen Functionen ausdrückt. Eine wichtige allgemeine Formel aber erhält man unmittelbar aus Formel (62), wenn man $x = 1$ nimmt, wodurch $E(-x, \alpha)$ in $E'(\alpha)$ übergeht, nemlich

$$77.\quad E'(n\alpha) = n\sum_{0}^{n-1}{}_k E'\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

deren specielle Fälle für $n = 2, 3, 4$, folgende sind:

$$E'(2\alpha) = 2E'(\alpha) + 2E'(\alpha + \pi),$$
$$E'(3\alpha) = 3E'(\alpha) + 3E'(\alpha + \tfrac{2}{3}\pi) + 3E'(\alpha + \tfrac{4}{3}\pi),$$
$$E'(4\alpha) = 4E'(\alpha) + 4E'(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) + 4E'(\alpha + \pi) + 4E'(\alpha + \tfrac{3}{2}\pi).$$

Dies sind bekannte Eigenschaften dieser Function. Man kann aber auch aus Formel (62) eine allgemeinere Formel ähnlicher Art ableiten, welche zwei unabhängige Gröfsen enthält. Da nämlich die Function $E(x, \alpha)$ nicht nur für $x = -1$, sondern auch für jeden beliebigen Werth des $x$

sich durch die einfache Function $E(\alpha)$ ausdrücken läfst, so darf man nur diese Verwandlung allgemein ausführen, um die gesuchte Formel zu erhalten. Zu diesem Zwecke setze ich $x = \frac{\sin w}{\sin(w+\alpha)}$ und bestimme die Gröfsen $w_1$, $w_2$, $w_3$, .... $w_k$, .... $w_{n-1}$ so, dafs im Allgemeinen

$$\frac{\sin w}{\sin(w+\alpha)} = \frac{\sin(w_k)}{\sin\left(w_k+\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)};$$

aufserdem setze ich $x^n = \frac{\sin\psi}{\sin(\psi+n\alpha)}$, woraus man leicht zeigen kann, dafs $\psi = w + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1}$ ist. Ich behalte aber der Kürze wegen für diese Summe das Zeichen $\psi$ bei und habe so die Gleichung (62) unter folgender Form:

$$E(\psi, n\alpha) = n\sum_0^{n-1}{}_k E\left(w_k,\ \alpha+\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Werden jetzt die Functionen $E(\psi, n\alpha)$ und $E\left(w_k, \alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)$ zerlegt nach der Formel $2E(u,\alpha) = E(2u) + E(2\alpha) - E(2u+2\alpha)$, so erhält man:

$$E'(2\psi) + E'(2n\alpha) - E'(2\psi+2n\alpha) =$$
$$n\sum_0^{n-1}{}_k E'\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right) + n\sum_0^{n-1}{}_k E'(2w_k) - n\sum_0^{n-1}{}_k E'\left(2w_k+2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right).$$

Diese Formel läfst sich noch vereinfachen: denn aus (77) folgt dafs

$$n\sum_0^{n-1}{}_k E'\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right) = E'(2n\alpha)$$

wenn $n$ ungerade. dafs aber dieselbe Summe gleich $4E(n\alpha)$, wenn $n$ grade ist. Man hat daher

$$78.\quad E'(2\psi) - E'(2\psi+2n\alpha)$$
$$= n\sum_0^{n-1}{}_k E'(2w_k) - n\sum_0^{n-1}{}_k E'\left(2w_k+2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right),$$

wenn $n$ ungerade ist, und

$$79.\quad E'(2\psi) - E'(2\psi+2n\alpha) + 2E'(2n\alpha) - 4E'(n\alpha)$$
$$= n\sum_0^{n-1}{}_k E'(2w_k) - n\sum_0^{n-1}{}_k E'\left(2w_k+2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right),$$

wenn $n$ grade ist.

Es ist leicht zu übersehen, dafs es auch für die Function $E'(\alpha)$ mehrere. ja unendlich viele ähnliche Formeln giebt; denn da es für die Function $A(x)$ unendlich viele Formeln giebt, und da jede derselben eine entsprechende Formel für die Function $E(u,\alpha)$ gewährt, diese aber wieder auf die ein-

fache Function $E(\alpha)$ reducirt wird, so kann man auch für diese eine unendliche Anzahl von Formeln finden. Da aber die anderen auf diese Weise zu findenden Formeln zu complicirt sein würden, so übergehen wir dieselben.

## §. 9.

Die einfachen Reihen-Entwickelungen der Functionen $E(u, \alpha)$ und $E(\alpha)$, welche wir hier noch kurz angeben wollen, haben zwar für die numerische Berechnung derselben nur geringen Werth, da $E(u, \alpha)$ immer durch $E(\alpha)$ einfach ausgedrückt werden kann, für welche letztere Function, wie wir schon oben bemerkt haben, eine vollständige Tafel vorhanden ist: in theoretischer Beziehung aber haben sie denselben Werth als die Reihen-Entwickelungen der Function $D(u, \alpha)$, mit welchen sie sehr große Aehnlichkeit haben.

Setzt man wieder $1 - xe = re^{-ui}$, wodurch $x = \frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}$, $r = \frac{\sin \alpha}{\sin(u+\alpha)}$ $\operatorname{tang} u = \frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}$ wird, so hat man

$$E(u, \alpha) = -\int l(x)\, du,$$

und daher, durch theilweise Integration:

$$E(u, \alpha) = -u\,lx + \int u . \frac{dx}{x}.$$

Entwickelt man aber den Kreisbogen $u = \operatorname{arc\,tang} \frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}$ nach Potenzen von $x$, und integrirt, so hat man:

80. $$E(u, \alpha) = -u\,lx + \left(\frac{x \sin \alpha}{1^2} + \frac{x^2 \sin 2\alpha}{2^2} + \frac{x^3 \sin 3\alpha}{3^2} + \ldots\right),$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ und $u+\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}(\pi+\alpha)$ liegt.

Setzt man $\pi - u - \alpha$ statt $u$, so wird $E(-u-\alpha, \alpha) = E(u, \alpha)$ nach Formel (68), und $x$ geht über in $\frac{1}{x}$; man erhält also:

81. $$E(u, \alpha) = (\pi - u - \alpha)lx + \left(\frac{\sin \alpha}{1^2 . x} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2 . x^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2 . x^3} + \ldots\right)$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$, $u+\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}(\pi+\alpha)$ und $\pi + \frac{1}{2}\alpha$ liegt.

Vertauscht man in diesen beiden Formeln $u$ und $\alpha$, wodurch $x$ in $r$ übergeht und $E(u, \alpha)$ ungeändert bleibt, so hat man:

82. $$E(u, \alpha) = -\alpha\,lr + \left(\frac{r \sin u}{1^2} + \frac{r^2 \sin 2u}{2^2} + \frac{r^3 \sin 3u}{3^2} + \ldots\right),$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$, und $u + \alpha$ in den Grenzen $\alpha$ und $\pi - \alpha$,

83. $E(u,\alpha) = (\pi - u - \alpha)\, lr + \left(\frac{\sin u}{1^2 . r} + \frac{\sin 2u}{2^2 . r^2} + \frac{\sin 3u}{3^2 . r^3} + \dots\right),$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, $u+\alpha$ in den Grenzen $\pi-\alpha$ und $\pi+\alpha$, oder wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$, $u+\alpha$ in den Grenzen $\alpha$ und $2\pi-\alpha$ liegt.

Verwandelt man ferner in Formel (80) $\alpha$ in $\pi-\alpha-u$, wodurch $x$ übergeht in $-\frac{x}{r}$, und $E(u, -u-\alpha)$ in $E(u,\alpha)$, so hat man:

84. $E(u,\alpha)$

$$= -u\, l\left(\frac{x}{r}\right) - \left(\frac{x \sin(u+\alpha)}{1^2 . r^2} - \frac{x^2 \sin 2(u+\alpha)}{2^2 . r^3} + \frac{x^3 \sin 3(u+\alpha)}{3^2 . r^3} - \dots\right)$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $2\alpha$, oder wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$, $u+\alpha$ in den Grenzen $2\alpha-\pi$ und $\pi$ liegt.

Vertauscht man hierin wieder $u$ und $\alpha$, so hat man endlich:

85. $E(u,\alpha)$

$$= -\alpha\, l\left(\frac{r}{x}\right) - \left(\frac{r \sin(u+\alpha)}{1^2 . x} - \frac{r^2 \sin 2(u+\alpha)}{2^2 . x^2} + \frac{r^3 \sin 3(u+\alpha)}{3^2 . x^3} - \dots\right),$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, $u+\alpha$ in den Grenzen $2\alpha$ und $\pi$, oder wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$, $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $2\alpha-\pi$ liegt.

Hieraus erhält man ferner die Reihen-Entwickelungen für die einfache Function $E(\alpha)$, wenn man $u = \frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ setzt, wodurch $x = +1$ und $r = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$ wird, nemlich:

86. $E'(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \frac{\sin 4\alpha}{4^2} + \dots,$

87. $E'(\alpha) =$

$$-\alpha l(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) + \left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha . \cos\frac{1}{2}\alpha}{1^2} + \frac{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2 \sin\alpha}{2^2} - \frac{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3 \cos\frac{1}{2}\alpha}{3^2} - \dots\right),$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ und

88. $E'(\alpha) =$

$$\tfrac{1}{2}(\pi-\alpha)\, l(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) + \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{1^2\, 2\sin\frac{1}{2}\alpha} + \frac{\sin\alpha}{2^2 . (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2} - \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{3^2 . (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3} - \dots$$

wenn $\alpha$ in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$ liegt.

Für diese einfache Function $E(\alpha)$ erhält man auch leicht eine zur numerischen Berechnung brauchbarere Entwickelung aus der bekannten Reihe

$$l(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) = l\alpha - \frac{B_1 \alpha^2}{1.2.2} - \frac{B_2 \alpha^4}{1.2.3.4.4} - \frac{B_3 \alpha^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \dots$$

in welcher $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$ die *Bernoulli*schen Zahlen sind. Multiplicirt man diese Reihe mit $d\alpha$ und integrirt, so erhält man

$$89.\quad E'(\alpha) = -\alpha l\alpha + \alpha + \frac{B_1 \alpha^3}{1.2.2.3} + \frac{B_2 \alpha^5}{1.2.3.4.4.5} + \frac{B_3 \alpha^7}{1.2.3.4.5.6.6.7} + \dots$$

Verwandelt man hier wieder $\alpha$ in $2\alpha$, so erhält man die Entwickelung von $E'(2\alpha)$ und vermöge der Formel $E'(2\alpha) = 2E'(\alpha) + 2E'(\alpha+\pi)$, welche auch dargestellt werden kann durch $E'(2\alpha) = 2E'(\alpha) - 2E'(\pi-\alpha)$, erhält man die Entwickelung von $E'(\pi-\alpha)$, nämlich

$$90.\quad E'(\pi-\alpha) = \alpha l 2 - \frac{(2^2-1)B_1\alpha^3}{1.2.2.3} - \frac{(2^4-1)B_2\alpha^5}{1.2.3.4.4.5} - \frac{(2^6-1)B_3\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.6.7} - \dots$$

Diese beiden Reihen-Entwickelungen stimmen im Wesentlichen mit denen überein, welche *Clausen* zur Berechnung dieser Function angewendet hat. Wendet man die erstere in dem Intervalle $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ an, so convergirt sie im ungünstigsten Falle, wo $\alpha$ dem Werthe $\frac{2}{3}\pi$ sehr nahe liegt, immer noch so gut, dafs jedes folgende Glied kleiner ist als der neunte Theil des vorhergehenden. Für das Intervall $\frac{2}{3}\pi$ bis $\pi$ wird man aber die zweite Reihe anwenden, welche im ungünstigsten Falle, wo $\alpha$ dem Werthe $\frac{1}{3}\pi$ sehr nahe liegt, ebenfalls so gut convergirt, dafs jedes folgende Glied kleiner ist als der neunte Theil des vorhergehenden. Die von *Clausen* angewendeten Reihen aber sind durch Absonderung gewisser logarithmischer Theile noch bei weitem besser convergirend gemacht.

(Der Schlufs folgt.)

---

# 13.

# Nota ad theoriam eliminationis pertinens.

(Auct. *Richelot*, prof. math. Regiom.)

---

Natura aequationis finalis, quae ex duabus aequationibus algebraicis inter duas quantitates incognitas, altera eliminata, provenit, iam dudum geometrarum attentione digna habita est; quam ob rem, quod simplices eius proprietates, quas in sequentibus exponemus, adhuc latuisse videntur, miramur.

Datae sint duae functiones rationales integrae $f_1$ et $f_2$ variabilis $y$, quae secundum ipsius $y$ potestates evolutae, his gaudeant formis

$$1.\quad \begin{cases} f_1 = a'_m y^m + a'_{m-1} y^{m-1} + \dots + a'_0, \\ f_2 = a''_n y^n + a''_{n-1} y^{n-1} + \dots + a''_0. \end{cases}$$

Iam sit: $X = 0$ genuina aequatio finalis inter coefficientes $a'$ et $a''$, quae ex aequationibus $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, quantitate $y$ eliminata, prodit. Quam aequationem inveniendi methodi diversae a geometris adhibentur, ex quarum numero eius, quae a clarissimo *Sylvester* in diario *„The London and Edinburgh philosophical magazine and journal of science"* nuper exposita est, mentionem faciendi hanc occasionem haud praetermittere velim. Ibi illius eliminationis problema reducitur ad problema eliminationis $(m+n-1)$ quantitatum ex systemate $(m+n)$ aequationum linearium. Multiplicata enim aequatione $f_1 = 0$, ex ordine per $y^{n-1}, y^{n-2}, \dots y^0$, nec non aequatione: $f_2 = 0$, ex ordine per $y^{m-1}, y^{m-2}, \dots y^0$ adipiscimur systema $(m+n)$ aequationum linearium inter quantitates $y^{m+n-1}, y^{m+n-2}, \dots y^0$, quarum $(m+n-1)$ prioribus eliminatis, aequatio inter coefficientes $a'$ et $a''$ prodit. Quae eliminatio facillime ita instituitur, ut determinantem harum $(m+n)$ aequationum linearium ponamus $= 0$. Determinans vero, cum quantitates $a'$ et $a''$ in aequationibus ipsae tantum lineariter involvantur, et quantitates $a'$ in $n$, nec non quantitates $a''$ in $m$ ceteris aequationibus solis reperiantur, respectu illarum dimensionis $n$tae est, respectuque harum $m$tae. Unde concluditur, eam positam $= 0$, esse quaesitam illam aequationem finalem $X = 0$, quae omni factore superflua careat. Notissima enim est proprietas ab *Eulero* inventa aequationis $X = 0$, quod eius dimensio respectu quantitatum $a'$, est $= n$, atque respectu quantitatum $a''$, $= m$, ita ut quaeque functio integra evanescens, inter quantitates $a'$ et $a''$, has dimensiones quadrans, pro genuina aequatione finali habenda sit.

Sed adhuc aliam methodum veterem ab *Eulero* anno 1764 in Actis Acad. Ber. propositam, illam aequationem $X = 0$ inveniendi, in medium proferamus, cui disquisitiones sequentes superstruamus.

Nimirum sint $\pi_1$ et $\pi_2$ functiones rationales integrae argumenti $y$, altera $(n-1)$ti, altera $(m-1)$ti ordinis, quarum $(m+n)$ coefficientes potestatum ipsius $y$ eo determinentur, ut in expressione:

$$\pi_1 f_1 + \pi_2 f_2,$$

$(m+n)$ coefficientes potestatum:

$$y^{m+n-1},\ y^{m+n-2},\ \ldots\ y^0$$

una qualibet excepta, quae unitati aequalis ponatur, evanescant. Iam inde oriuntur $(m+n)$ aequationes lineares ad determinationem $(m+n)$ coefficientium illarum sufficientes. Qualiscunque excepta una illa coefficiens fuit, semper omnibus expressionibus coefficientium, quae ex aequationibus linearibus illis emanant, idem erit denominator, nimirum harum aequationum linearium determinans. Quae determinans sit $\Delta$. Iam igitur habeamus:

$$\pi_1 f_1 + \pi_2 f_2 = y^h;$$

unde, posito

$$\pi_1 \Delta = \varrho_1^{(h)}, \qquad \pi_2 \Delta = \varrho_2^{(h)},$$

sequitur, fore:

$$3.\qquad \varrho_1^{(h)} f_1 + \varrho_2^{(h)} f_2 = \Delta . y^h.$$

Quae aequatio docet, fore: $\Delta = 0$, si habeatur $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$. Iam vero expressio $\Delta$ respectu quantitatum $a'$ est $n$tae et respectu quantitatum $a''$ $m$tae dimensionis, id quod eo patet, quod in $(m+n)$ aequationibus linearibus quantitates $a'$ lineariter ut coefficientes apud $n$ singulas coefficientes determinandas functionis $\pi_1$, atque quantitatis $a''$ lineariter ut coefficientes apud $m$ ceteras constantes functionis $\pi_2$ proveniunt. Quibus collectis sequitur aequationem $\Delta = 0$ quaesitam esse finalem genuinam $X = 0$.

Ex antecedentibus sponte prodit, cum $\varrho_1^{(h)}$ et $\varrho_2^{(h)}$ sint functiones rationales integrae quantitatum $a'$, $a''$ et $y$, semper dari tales functiones multiplicatrices integras respectu quantitatum $a'$, $a''$ et $y$, alteram $(n-1)$ti, alteram $(m-1)$ti ordinis, quibus adhibitis fit generaliter

$$4.\qquad \varrho_1^{(h)} f_1 + \varrho_2^{(h)} f_2 = X . y^h,$$

ubi numerus $h$ numerum $m+n-1$ haud superat. Quibus positis problema nobis ponamus, inquirere, quomodo valores factorum $\varrho_1^{(h)}$, $\varrho_2^{(h)}$, atque ipsius $y$, si simul fiat $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, a functione $X$ pendeant.

Quem ad finem aequationem identicam (4.) secundum quantitatem $a'_\varkappa$, ubi $\varkappa$ quilibet numerorum

$$0,\ 1,\ \ldots\ m$$

est, differentiare placet, quo facto habebimus

$$y^{\lambda}\cdot\left(\frac{dX}{da'_{\varkappa}}\right) = \varrho_1^{(h)}\cdot\left(\frac{df_1}{da'_{\varkappa}}\right) + f_1\left(\frac{d\varrho_1^{(h)}}{da'_{\varkappa}}\right) + f_2\left(\frac{d\varrho_2^{(h)}}{da'_{\varkappa}}\right),$$

sive cum sit

$$\left(\frac{df_1}{da'_{\varkappa}}\right) = y^{\varkappa},$$

pro talibus valoribus ipsius $y$, qui utrique aequatione: $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, satisfaciunt:

$$5.\quad y^{\lambda-\varkappa}\left(\frac{dX}{da'_{\varkappa}}\right) = \varrho_1^{(h)}.$$

Prorsus eodem modo, iisdem suppositionibus valentibus, invenitur haec formula:

$$6.\quad y^{\lambda-\varkappa}\left(\frac{dX}{da''_{\varkappa}}\right) = \varrho_2^{(h)},$$

ubi $\varkappa$ numerus quilibet est numerorum

$$0,\ 1,\ \ldots\ n.$$

Inde sequitur, posito $h = \varkappa$, valores functionum multiplicatricium, pro iis valoribus ipsius $y$, qui utrique aequationi $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ satisfaciunt, fore:

$$7.\quad \varrho_1^{(h)} = \left(\frac{dX}{da'_h}\right),\qquad \varrho_2^{(h)} = \left(\frac{dX}{da''_h}\right).$$

sive

$$\varrho_1^0 = \left(\frac{dX}{da'_0}\right),\quad \varrho'_1 = \left(\frac{dX}{da'_1}\right),\quad \ldots\quad \varrho_1^{(m)} = \left(\frac{dX}{da'_m}\right),$$
$$\varrho_2^0 = \left(\frac{dX}{da''_0}\right),\quad \varrho'_2 = \left(\frac{dX}{da''_1}\right),\quad \ldots\quad \varrho_2^{(n)} = \left(\frac{dX}{da''_n}\right).$$

Si vero index $h$ numeros $m$ vel $n$ superat, expressiones valorum functionum multiplicatricium minus simplici forma gaudent. Quas antequam exponamus, ex aequationibus (5) et (6) derivare licet has relationes:

$$8.\quad \begin{cases} 1:y:y^2:\ \ldots\ y^m = \left(\frac{dX}{da'_0}\right):\left(\frac{dX}{da'_1}\right):\left(\frac{dX}{da'_2}\right):\ \ldots\ \left(\frac{dX}{da'_m}\right), \\ 1:y:y^2:\ \ldots\ y^n = \left(\frac{dX}{da''_0}\right):\left(\frac{dX}{da''_1}\right):\left(\frac{dX}{da''_2}\right):\ \ldots\ \left(\frac{dX}{da''_n}\right), \end{cases}$$

quae hoc theorema praebent:

„Differentialia partialia eius functionis rationalis integrae, quae posita $= 0$ aequatio finalis duarum aequationum datarum est, secundum „coefficientes potestatum ipsius $y$ in altera utra aequatione, erunt ut potestates cohaerentes radicis utrique aequationi satisfacientis."

Qualiscunque vero numerus $h$ est ex numeris:

$$0,\ 1,\ \ldots\ m+n-1,$$

semper numeri $\varkappa$, vel ex serie

$$0,\ 1,\ \ldots\ m$$

eligi possunt tales, ut fiat $h-\varkappa \overline{\gtrless} n$, vel ex serie

$$0,\ 1,\ \ldots\ n$$

ut fiat $h-\varkappa \overline{\gtrless} m$; unde concludimus ex aequationibus (5), (6) et (8) fore:

$$9.\qquad \frac{\left(\frac{dX}{da'_\varkappa}\right)\left(\frac{dX}{da''_{h-\varkappa}}\right)}{\left(\frac{dX}{da''_0}\right)} = \varrho_1^{(h)}, \qquad \frac{\left(\frac{dX}{da''_\varkappa}\right)\left(\frac{dX}{da'_{h-\varkappa}}\right)}{\left(\frac{dX}{da'_0}\right)} = \varrho_2^{(h)}.$$

ubi numerus $h$ numerum $m+n-1$ haud superat, nec non in illa $h-\varkappa \overline{\gtrless} n$, in hac $h-\varkappa \leqq m$ sumatur, necesse est.

Generaliores adhuc formulae similiter inveniuntur hae:

$$10.\qquad \frac{\left(\frac{dX}{da'_\varkappa}\right)\left(\frac{dX}{da''_{h-\varkappa+\lambda}}\right)}{\left(\frac{dX}{da''_\lambda}\right)} = \varrho_1^{(h)}, \qquad \frac{\left(\frac{dX}{da''_\varkappa}\right)\left(\frac{dX}{da'_{h-\varkappa+\lambda}}\right)}{\left(\frac{dX}{da'_\lambda}\right)} = \varrho_2^{(h)},$$

ubi in illa $h-\varkappa+\lambda \leqq n$, in hac $\leqq m$ esse debet. Si denique $h-\varkappa+\lambda \leqq m$ est, etiam habemus hanc formulam:

$$\frac{\left(\frac{dX}{da'_\varkappa}\right)\left(\frac{dX}{da'_{h-\varkappa+\lambda}}\right)}{\left(\frac{dX}{da'_\lambda}\right)} = \varrho_1^{(h)},$$

nec non, si $h-\varkappa+\lambda \leqq n$ est, hanc:

$$\frac{\left(\frac{dX}{da''_\varkappa}\right)\left(\frac{dX}{da''_{h-\varkappa+\lambda}}\right)}{\left(\frac{dX}{da''_\lambda}\right)} = \varrho_2^{(h)}.$$

Has vero omnes formulas nonnisi pro iis valoribus ipsius $y$ valere, pro quibus simul fiat $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, ex antecedentibus patet.

Ex formulis (8) prodit, quomodo quaelibet functio rationalis data ipsius $y$, pro tali valore argumenti, qui simultanea radix aequationum $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ est, exprimatur per differentialia partialia functionis $X$. Exempli gratia vero sumere placet functionem

$$\frac{\varrho_1^{(h)} f_1}{y^h},$$

$$\text{sive}\quad \varrho_1^{(h)}(a'_m y^{m-h} + a'_{m-1} y^{m-h-1} + \text{etc. } a'_0 y^{-h}),$$

quae ob factorem $f_1$ evanescere debet. Iam vero aequatione (5) adiuti, eam in hanc formam transformare possumus:

$$a'_m\left(\frac{dX}{da'_m}\right) + a'_{m-1}\left(\frac{dX}{da'_{m-1}}\right) + \ldots\ a'_0\left(\frac{dX}{da'_0}\right),$$

quae posita $=0$ erit aequatio finalis ab omni factore quantitates $a'$ et $a''$ involvente libera, quia respectu illarum $n$tae, respectuque harum $m$tae dimensionis est. Hoc vero etiam ex aequatione identica:

$$a'_m\left(\frac{dX}{da'_m}\right)+a'_{m-1}\left(\frac{dX}{da'_{m-1}}\right)+\ldots.a'_0\left(\frac{dX}{da'_0}\right)=nX$$

deducere licuisset, quae ex nota proprietate functionis $X$ sequitur.

Iam vero denique si $m=n+\lambda$ est, derivatur ex aequatione:

$$\frac{\varrho_1^{(h)}f_2}{y^{n-x}}=0,$$

ubi $x$ quilibet numerorum $0, 1, \ldots. \lambda$ esse potest, similibus substitutionibus factis, haec:

$$a''_n\left(\frac{dX}{da'_{n+x}}\right)+a''_{n-1}\left(\frac{dX}{da'_{n+x-1}}\right)+\ldots.a''_0\left(\frac{dX}{da'_x}\right)=0.$$

Has vero $\lambda+1$ expressiones non ob aequationem $X=0$, sed identice evanescere eo elucet, quod respectu quantitatum $a$ dimensionem $n$tam haud aequant.

Iam applicationem formularum antecedentium facere placet, ad systema duarum aequationum rationalium integrarum, duas incognitas quantitates continentium. Quam ob rem ponamus quantitates $a'$ et $a''$ functiones rationales integras esse argumenti $x$, nec non functiones $f_1$ et $f_2$ secundum potestates argumenti $x$ evolutas his formis gaudere:

$$11.\quad \begin{cases} f_1 = b'_p x^p + b'_{p-1}x^{p-1} + \ldots. + b'_0, \\ f_2 = b''_q x^q + b''_{q-1}x^{q-1} + \ldots. + b''_0, \end{cases}$$

ubi rursus coefficientes $b'$ et $b''$ denotant functiones rationales integras argumenti $y$.

Aequatio finalis genuina, quae eliminata variabili $x$, ex aequationibus $f_1=0$ et $f_2=0$ oritur, sit $Y=0$, nec non similiter ac antea sint $\sigma_1^{(h)}$ et $\sigma_2^{(h)}$ eae functiones simplissimae respectu quantitatum $b'$ et $b''$ integrae, quarum ope identice fit:

$$12.\quad \sigma_1^{(h)}f_1+\sigma_2^{(h)}f_2 = Yx^{\lambda}.$$

Unde inveniuntur formulae similes ac (5) et (6) pro $f_1=0$ et $f_2=0$ valentes:

$$13.\quad x^{h-\lambda}\left(\frac{dY}{db'_\lambda}\right)=\sigma_1^{(h)},$$

$$14.\quad x^{h-\lambda}\left(\frac{dY}{db''_\lambda}\right)=\sigma_2^{(h)}.$$

Iam vero notum est aequationes $X=0$ et $Y=0$ eiusdem ordinis esse, nec non ad singulam quamque radicem alterius generaliter singulam alterius

pertinere. Quae radices cohaerentes ex qualibet harum formularum inveniri possunt:

$$y = \frac{\left(\frac{dX}{da'_1}\right)}{\left(\frac{dX}{da'_0}\right)} = \frac{\left(\frac{dX}{da'_2}\right)}{\left(\frac{dX}{da'_1}\right)} = \dots = \frac{\left(\frac{dX}{da'_m}\right)}{\left(\frac{dX}{da'_{m-1}}\right)},$$

$$= \frac{\left(\frac{dX}{da''_1}\right)}{\left(\frac{dX}{da''_0}\right)} = \frac{\left(\frac{dX}{da''_2}\right)}{\left(\frac{dX}{da''_1}\right)} = \dots = \frac{\left(\frac{dX}{da''_n}\right)}{\left(\frac{dX}{da''_{n-1}}\right)}.$$

Sint igitur $y_1 x_1$, $y_2 x_2$, etc. paria radicum binarum simultanearum, et generaliter $y_\gamma x_\gamma$. Introducatur denique signum:

$$(\psi(x,y))^{(\gamma,\gamma)} \text{ vel } \psi^{(\gamma,\gamma)},$$

pro valore functionis $\psi(x,y)$ hoc: $\psi(x_\gamma, y_\gamma)$.

Aequationum (4) et (12)

$$15. \quad \begin{cases} \varrho_1^{(h)} f_1 + \varrho_2^{(h)} f_2 = X \cdot y^h, \\ \sigma_1^{(h)} f_1 + \sigma_2^{(h)} f_2 = Y \cdot x^h, \end{cases}$$

utramque secundum argumenta $x$ et $y$ differentiemus, atque deinde substituamus $x = x_\gamma$, $y = y_\gamma$, quo facto habebimus: ope formularum (5), (6), (13), (14) has quatuor aequationes:

$$\left[\left(\frac{dX}{da'_x}\right)\left(\frac{df_1}{dx}\right) + \left(\frac{dX}{da''_x}\right)\left(\frac{df_2}{dx}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)} = \left(\frac{dX}{dx}\right)^{(\gamma,\gamma)} y_\gamma^x,$$

$$\left[\left(\frac{dX}{da'_x}\right)\left(\frac{df_1}{dy}\right) + \left(\frac{dX}{da''_x}\right)\left(\frac{df_2}{dy}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{dY}{db'_\lambda}\right)\left(\frac{df_1}{dy}\right) + \left(\frac{dY}{db''_\lambda}\right)\left(\frac{df_2}{dy}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)} = \left(\frac{dY}{dy}\right)^{(\gamma,\gamma)} x_\gamma^\lambda,$$

$$\left[\left(\frac{dY}{db'_\lambda}\right)\left(\frac{df_1}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{db''_\lambda}\right)\left(\frac{df_2}{dx}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)} = 0,$$

unde, brevitatis causa introducta denotatione hac:

$$\Delta = \left(\frac{dX}{da'_x}\right)\left(\frac{dY}{db''_\lambda}\right) - \left(\frac{dX}{da''_x}\right)\left(\frac{dY}{db'_\lambda}\right),$$

derivantur, hae formulae:

$$\left[\Delta \cdot \frac{df_1}{dx}\right]^{(\gamma,\gamma)} = y_\gamma^x \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{db''_\lambda}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)},$$

$$\left[\Delta \cdot \frac{df_2}{dx}\right]^{(\gamma,\gamma)} = -y_\gamma^x \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{db'_\lambda}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)},$$

$$\left[\Delta \cdot \frac{df_1}{dy}\right]^{(\gamma,\gamma)} = -x_\gamma^\lambda \left[\left(\frac{dY}{dy}\right)\left(\frac{dX}{da''_x}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)},$$

$$\left[\Delta \cdot \frac{df_2}{dy}\right]^{(\gamma,\gamma)} = x_\gamma^\lambda \left[\left(\frac{dY}{dy}\right)\left(\frac{dX}{da'_x}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)};$$

quae formulae apte coniunctae, divisioneque per Δ facta, hanc memorabilem suppeditant:

$$16. \quad \left[\left(\frac{df_1}{dx}\right)\left(\frac{df_2}{dy}\right)-\left(\frac{df_2}{dx}\right)\left(\frac{df_1}{dy}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)} = y_\gamma^\varkappa x_\gamma^\lambda \left(\frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)}{\left(\frac{dX}{da'_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{db''_\lambda}\right)-\left(\frac{dX}{da''_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{db'_\lambda}\right)}\right)^{(\gamma,\gamma)}.$$

Advocato vero theoremate ab illustrissimo *Jacobi* invento (vid. *Diar. Crell. tom. 14. pag. 286*), nec non introducto signo summatorio:

$$\Sigma(x_\gamma^p y_\gamma^q \psi)^{(\gamma,\gamma)},$$

pro summa expressionum, quae oriuntur in expressione $x_\gamma^p y_\gamma^q \psi$, loco ipsius $x_\gamma$, $y_\gamma$ ex ordine omnibus radicibus simultaneis aequationum $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, substitutis, habebimus hoc theorema:

„Si duae functiones rationales integrae argumentorum $x$ et $y$, $f_1$ „et $f_2$, quarum illa ad $\mu$tam, haec ad $\nu$tam dimensionem ascendit, secundum „$x$ et $y$ evolutae his formis gaudent:

$$\begin{aligned} f_1 &= a'_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + a'_0 \\ &= b'_p x^p + b'_p x^{p-1} + b'_0, \\ f_2 &= a''_n y^n + a''_{n-1} y^{n-1} + a''_0 \\ &= b''_q x^q + b''_{q-1} x^{q-1} + b''_0, \end{aligned}$$

„nec non aequationes finales, quae oriuntur ex aequationibus:

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0,$$

„$x$ vel $y$ eliminato, sunt:

$$Y = 0, \qquad X = 0,$$

„expressio:

$$\Sigma\, x_\gamma^{\alpha-\lambda} y_\gamma^{\beta-k} \left(\frac{\left(\frac{dX}{da'_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{db''_\lambda}\right)-\left(\frac{dX}{da''_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{db'_\lambda}\right)}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}}\right)^{(\gamma,\gamma)},$$

„ad omnes radices aequationum $X = 0$ et $Y = 0$ simultaneas extensa, „evanescet pro omnibus valoribus integris haud negativis ipsorum $\alpha$ et $\beta$, „qui conditioni

$$\alpha + \beta + 2 < \mu + \nu,$$

„satisfaciunt."

Si in hoc theoremate ponimus: $\alpha = \lambda$, $\beta = \varkappa$, videmus expressionem:

$$\Sigma \left(\frac{\left(\frac{dX}{da'_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{db''_\lambda}\right)-\left(\frac{dX}{da''_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{db'_\lambda}\right)}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}}\right)^{(\gamma,\gamma)},$$

evanescere, dummodo erit $\varkappa + \lambda + 2 < \mu + \nu$.

Similiter ope formulae (16) theorema in commentatione citata p. 285 expositum transferri potest. Iam vero generalius theorema directe deducere placet.

Ex aequationibus (15), si in ultima ponitur $i$ loco ipsius $h$, sequuntur hae formulae:

$$\varrho_1^{(h)}\sigma_2^{(i)} - \varrho_2^{(h)}\sigma_1^{(i)} = \frac{y^h\sigma_2^{(i)}X - x^i\varrho_2^{(h)}Y}{f_1} = \frac{x^i\varrho_1^{(h)}Y - y^h\sigma_1^{(i)}X}{f_2}.$$

Quae formulae docent, cum pro radicibus non cohaerentibus aequationum $X=0$ et $Y=0$, functiones $f_1$ et $f_2$ evanescere nequeant, expressionem:

$$\varrho_1^{(h)}\sigma_2^{(i)} - \varrho_2^{(h)}\sigma_1^{(i)}$$

pro radicibus non simultaneis aequationum $f_1=0$ et $f_2=0$ evanescere. Cuius expressionis loco brevitatis gratia ponamus $V_{(h,i)}$. Ex nota vero theoria fractionum rationalium sequitur haec formula:

$$17.\quad \frac{V_{(h,i)}}{X.Y} =$$

$$W + \Sigma\left(\left(\frac{W'}{\frac{dX}{dx}}\right)^{(\gamma)}\frac{1}{x-x_\gamma}\right) + \Sigma\left(\left(\frac{W''}{\frac{dY}{dy}}\right)^{(\delta)}\frac{1}{y-y_\delta}\right) + \Sigma\left(\left(\frac{V_{(h,i)}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}}\right)^{(\gamma,\delta)}\frac{1}{(x-x_\gamma)(y-y_\delta)}\right),$$

ubi $W$, $W_1$ et $W_2$ respective denotant functiones integras, quae in fractionibus

$$\frac{V_{(h,i)}}{XY},\quad \frac{V_{(h,i)}}{Y},\quad \frac{V_{(h,i)}}{X}$$

continentur, nec non generaliter per

$$\Sigma\left(\psi^{(\gamma)}\frac{1}{x-x_\gamma}\right),\qquad \Sigma\psi^{(\delta)}\frac{1}{y-y_\delta},\qquad \Sigma\left(\psi^{(\gamma,\delta)}\frac{1}{(x-x_\gamma)(y-y_\delta)}\right)$$

respective significantur summae expressionum, quae, in expressionibus

$$\frac{\psi}{x-x_\gamma},\quad \frac{\psi}{y-y_\delta},\quad \frac{\psi}{(x-x_\gamma)(y-y_\delta)},$$

loco ipsorum $x_\gamma$ et $y_\delta$ omnibus radicibus aequationum $X=0$ et $Y=0$ substitutis oriuntur.

Quae formula ob proprietatem functionis $V_{(h,i)}$ modo memoratam, in hanc abit:

$$\frac{V_{(h,i)}}{X.Y} =$$

$$W + \Sigma\left(\left(\frac{W'}{\frac{dX}{dx}}\right)^{(\gamma)}\frac{1}{x-x_\gamma}\right) + \Sigma\left(\left(\frac{W''}{\frac{dY}{dy}}\right)^{\delta}\frac{1}{y-y_\delta}\right) + \Sigma\left(\left(\frac{V_{(h,i)}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}}\right)^{(\gamma,\gamma)}\frac{1}{(x-x_\gamma)(y-y_\gamma)}\right)$$

ubi per signum:

$$\Sigma\psi^{(\gamma,\gamma)}\frac{1}{(x-x_\gamma)(y-y_\gamma)}$$

summa expressionum denotatur, quae oriuntur, si loco $x_\gamma$ et $y_\gamma$ omnes radices simultaneae aequationum $f_1=0$ et $f_2=0$ substituuntur.

Iam vero in utroque termino multiplicationem faciamus per quamlibet functionem integram argumentorum $x$ et $y$, nimirum per $U$. Quae functio cum semper in hanc formam reduci possit:

$$U = U^{(\gamma,\gamma)} + U'(x-x_\gamma) + U''(y-y_\gamma),$$

ubi $x_\gamma$ et $y_\gamma$ simultaneae radices aequationum propositarum nec non $U'$ et $U''$ functiones rationales integrae sunt, habebimus:

$$U.\left(\frac{V_{(h,i)}}{\frac{dX}{dx}.\frac{dY}{dy}}\right)^{(\gamma,\gamma)}\frac{1}{(x-x_\gamma)(y-y_\gamma)}$$

$$= \left(\frac{U.V_{(h,i)}}{\frac{dX}{dx}.\frac{dY}{dy}}\right)^{(\gamma,\gamma)}\frac{1}{(x-x_\gamma)(y-y_\gamma)} + \left(\frac{V_{(h,i)}}{\frac{dX}{dx}.\frac{dY}{dy}}\right)^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{U'}{y-y_\gamma}+\frac{U''}{x-x_\gamma}\right).$$

Unde, summatione facta, facile concluditur, coefficientes potestatum ipsorum $x$ et $y$ *simul negativarum* in expressionibus

$$18.\quad \frac{UV_{(h,i)}}{XY},\quad \text{et}\quad \Sigma\left(\left(\frac{UV_{(h,i)}}{\frac{dX}{dx}.\frac{dY}{dy}}\right)^{(\gamma,\gamma)}\frac{1}{(x-x_\gamma)(y-y_\gamma)}\right)$$

easdem esse. Iam vero denique ex aequationibus (5), (6), (13), (14), sequitur fore:

$$[V_{(h,i)}]^{(\gamma,\gamma)} = x_\gamma^{i-\lambda}y_\gamma^{h-\varkappa}\left[\left(\frac{dX}{da'_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{da''_\lambda}\right)-\left(\frac{dX}{da''_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{da'_\lambda}\right)\right]^{(\gamma,\gamma)}$$

quibus collectis prodit hoc theorema memorabile:

„Si iisdem suppositionibus, ac in priori theoremate, factis, $U$ denotat functionem quamlibet rationalem integram argumentorum $x$ et $y$, coefficiens termini $x^{-(\alpha+1)}y^{-(\beta+1)}$ in evolutione expressionis:

$$\frac{U.(\varrho_1^{(h)}\sigma_2^{(i)}-\varrho_2^{(h)}\sigma_1^{(i)})}{X.Y}$$

„erit summa expressionum, quae oriuntur in expressione:

$$x^{i+\alpha-\lambda}y^{h+\beta-\varkappa}\frac{\left(\frac{dX}{da'_\varkappa}\right)\left(\frac{dY}{da''_\lambda}\right)-\left(\frac{dX}{da''_\lambda}\right)\left(\frac{dY}{da'_\varkappa}\right)}{\frac{dX}{dx}.\frac{dY}{dy}}.U,$$

„omnibus radicibus simultaneis aequationum $f_1=0$ et $f_2=0$ substitutis, „ubi $\alpha$ et $\beta$ numeri integri haud negativi, nec non $\varrho_1^{(h)}$, $\varrho_2^{(h)}$, $\sigma_1^{(i)}$, $\sigma_2^{(i)}$ functiones integrae simplicissimae sunt, quarum ope fit:

$$\varrho_1^{(h)}f_1+\varrho_2^{(h)}f_2 = Xy^h,\qquad \sigma_1^{(i)}f_1+\sigma_2^{(i)}f_2 = Yx^i."$$

Similes disquisitiones de systemate trium aequationum algebraicarum, in alia occasione geometris communicabo.

Regiomonti, 1. Mai 1840.

# 14.

# Den einen Kreis am innigsten osculirenden Kegelschnitt zu finden.

(Von Herrn Prof. *Lehmus* zu Berlin.)

---

Aufgabe. Für einen in der Peripherie eines Kreises gegebenen Punct den am innigsten osculirenden Kegelschnitt zu bestimmen.

Wird der Mittelpunct des gegebenen Kreises vom Halbmesser $r$, als Anfangspunct der Coordinaten-Achsen $X$, $Y$ angenommen, so ist die Gleichung für den Kreis

$$1.\quad y^2 + x^2 = r^2.$$

Bezeichnet nun $y'$ die derselben Abscisse $x$ angehörige Ordinate des gesuchten Kegelschnitts, so ist die allgemeine Form der Gleichung desselben

$$2.\quad ay'^2 + by'x + cx^2 + dy' + ex + f = 0$$

und zu Bestimmung der gegenseitigen Verhältnisse der sechs Parameter $a, b, c, d, e, f$ sind fünf Gleichungen erforderlich; es mufs nemlich $y' = y$; $dy'_x = dy_x$; $d^2y'_x = d^2y_x$; $d^3y'_x = d^3y_x$ und $d^4y'_x = d^4y_x$ werden, wodurch eine Osculation der vierten Ordnung entsteht. Bildet man diese Ableitungen nach (1.) und (2.) und setzt

$$3.\quad by + 2cx + e = A;$$

$$4.\quad 2ay + bx + d = B;$$

$$5.\quad ae^2 - bde + cd^2 - (4ac - b^2).f = C;$$

$$6.\quad bd - 2ae - (4ac - b^2)x = D,$$

so gehen obige fünf Bedingungen in folgende über:

$$7.\quad ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$

$$8.\quad Ay = Bx;$$

$$9.\quad 2Cy^3 = B^3r^2;$$

$$10.\quad 2CDy^5 + r^2B^5x = 0;$$

$$11.\quad r^2(r^2 + 4x^2)B^7 = 2Cy^7.[(4ac - b^2)B^2 + 5D^2],$$

aus welchen die Parameter, ihrem Verhältnifs nach, zu entwickeln sind.

Da nun für jeden Punct der Peripherie eines Kreises dieselbe Krümmung Statt findet, so ist die Wahl des Berührungspunctes gleichgültig, und es ist für die Bestimmung der Parameter erleichternd, den Punct $K$ zu wählen, für welchen $x = 0$, also $y = r$ ist.

Für diesen Punct $K$ wird dann

12. $A = br + e;$
13. $B = 2ar + d;$
14. $C = ae^2 - bde + cd^2 - (4ac - b^2)f;$
15. $D = bd - 2ae,$

und die Gleichungen (7.) bis (11.) gehen über in:

16. $ar^2 + dr + f = 0;$
17. $A = 0$ oder $br + e = 0;$
18. $2rC = B^3;$
19. $CD = 0,$

und, wenn (18.) und (19.) in (11.) aufgenommen werden,

20. $B^2 = r^2(4ac - b^2).$

Es folgt aber aus (17.)

21. $e = -br;$ aus (16.)
22. $f = -ar^2 - dr,$

und substituirt man diese Werthe, so wird

23. $C = cB^2;$
24. $D = b.B,$

und die übrigen drei Bedingungsgleichungen (18.) bis (20.) gehen über in

25. $B^2(B - 2cr) = 0,$
26. $bcB^3 = 0$ und
27. $B^2 = r^2(4ac - b^2).$

Es fällt in die Augen, dafs den beiden ersten, (25.) und (26.), Genüge geschieht für $B = 0$, woraus $d = -2ar$ und dann aus (27.) $c = \frac{b^2}{4a}$ folgt. Substituirt man aber die vier Werthe $\frac{b^2}{4a}$, $-2ar$, $-br$ und $ar^2$ (letztere beide aus (21.) und (22.) entnommen) für $c$, $d$, $e$, $f$ in (2.), so entsteht $2ay' + bx - 2ar = 0$, welche Gleichung keinen Kegelschnitt liefert, so dafs also die Bestimmung $B = 0$ der Aufgabe entspricht. Dies erhellet auch schon aus den anfänglichen allgemeinen 5 Bedingungsgleichungen (7.) bis (11.), indem für $B = 0$, (8.) in $A = 0$, (9.) in $C = 0$ übergeht, (10.) aber identisch wird und $D$ unbestimmt läfst, (11.) aber ebenfalls identisch wird, so dafs nur die drei Bedingungen $B = 0$, $A = 0$, $C = 0$ bleiben, welche zur Bestimmung der Parameter nicht ausreichend sind. Da hienach also $B$ nicht $= 0$ sein kann, so geben die übrigen 3 Gleichun-

gen (25.) bis (27.)

28. $2ar+d-2cr=0$;

29. $bc=0$;

30. $(2ar+d)^2=r^2(4ac-b^2)$.

Die Gleichung (29.) wird erfüllt, sowohl für $b=0$ als auch für $c=0$; es liefert aber für $c=0$ die Gleichung (28.) sogleich $B=0$, welche Bestimmung, dem Obigen gemäfs, nicht genügen kann, so dafs daher nur

31. $b=0$ bleibt, wozu (28.) dann

32. $d=2r(c-a)$ und (30.)

33. $4cr^2(a-c)=0$ liefert.

Da nun aber $c$ nicht $=0$ sein kann, so mufs aus (33.)

34. $a=c$ und dann aus (32.)

35. $d=0$ sein und man hat somit hieraus und aus (21.) und (22.)

36. $a=a,\ b=0,\ c=a,\ d=0,\ e=0,\ f=-ar^2$. Werden diese Resultate in (2.) gesetzt, so folgt

37. $y'^2+x^2=r^2$, woraus, wie nothwendig, sich ergeben mufste, dafs der dem gegebenen Kreis congruente Kreis der ihn am innigsten osculirende Kegelschnitt ist.

Zusatz. Verlangt man einen den Kreis in irgend einem seiner Puncte der Peripherie osculirenden Kegelschnitt, schliefst jedoch den congruenten Kreis selbst aus, bedingt also, dafs nicht $a=c$ und zugleich $b=0$ sein soll, und setzt dafür eine anfänglich noch unbestimmt gelassene Relation zwischen $a$, $b$ und $c$ fest, so sind aufser derselben nur noch die vier Bedingungen $y'=y$, $dy'_x=dy_y$, $d^2y'_x=d^2y_x$ und $d^3y'_x=d^3y_x$ zu erfüllen; die Bedingung $d^4y'_x=d^4y_x$ aber, d. h. die Gleichung (11.), fällt weg, und es bleibt ganz die vorige Auflösung, nur dafs zuletzt, aufser den Gleichungen (21.) und (22.), nemlich $e=-br$ und $f=-ar^2-dr$, statt derer (28.), (29.) und (30.) nur noch die beiden (28.) und (29.), nemlich $2ar+d-2cr=0$ und $bc=0$ bleiben, welche, mit der noch vorbehaltenen Relation zwischen $a$, $b$ und $c$ verbunden, die erforderlichen fünf Bedingungen liefern.

Wird nun *erstens* die in der dritten Ordnung osculirende Parabel verlangt, so hat man die Gleichungen:

1. $e=-br$;

2. $f=-ar^2-dr$;

3. $2ar+d-2cr=0$;

4. $bc = 0$;
5. $4ac = b^2$.

Der Gleichung (4.) entsprechend mufs $c = 0$ oder $b = 0$ sein; es folgt aber für $c = 0$ sogleich aus (5.) $b = 0$, dann aus (1.) $e = 0$; aus (3.) $d = -2ar$ und aus (2.) $f = ar^2$, und hiezu entsteht als verlangte Gleichung $a(y' - r)^2 = 0$, welche keine Parabel giebt. Es kann daher nur $b = 0$ genügen, wozu, weil $c$ nicht $= 0$ sein kann, aus (5.) $a = 0$, aus (1.) $e = 0$, aus (3.) $d = 2cr$ und aus (2.) $f = -2cr^2$ sich ergiebt und die verlangte Gleichung $cx^2 + 2cry' - 2cr = 0$ oder

$x^2 = 2r(r - y')$ entspringt; woraus hervorgeht, dafs diese Parabel den Kreis in $K$ in ihrem Scheitelpunct berührt, und dafs ihr Achsenparameter $= 2r$ ist.

Wird *zweitens* eine in der dritten Ordnung berührende Ellipse gesucht, so sind die Bedingungen:

1. $e = -br$;
2. $f = -ar^2 - dr$;
3. $2ar + d - 2cr = 0$;
4. $bc = 0$;
5. $4ac > b^2$.

Es kann aber, um (4.) zu genügen, nach (5.) $c$ nicht $= 0$, folglich mufs $b = 0$ sein, und hierzu folgt aus (1.) $e = 0$, aus (3.) $d = 2r(c - a)$, aus (2.) $f = (a - 2c)r^2$, und es entsteht als verlangte Gleichung

$$ay'^2 + cx^2 + 2r(c - a)y' - (2c - a)r^2 = 0.$$

Es müssen aber nach (5.) $a$ und $c$ gleiche Vorzeichen haben: daher mufs $\frac{c}{a}$ positiv sein, und bezeichnet man diese *absolute* Zahl (die nicht $= 1$ zu setzen ist, weil sonst der Kreis sich ergeben würde, und auch nicht $= 0$, weil sonst *kein* Kegelschnitt entstehen würde) durch $h$, so hat man

$$y'^2 + hx^2 + 2r(h - 1)y' - (2h - 1)r^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dafs jede solche Ellipse, wie auch $h$ bestimmt werden mag (nur nicht $= 1$ und nicht $= 0$), den Kreis in $K$ in dem einen ihrer Scheitelpuncte berührt, und zwar in dem einen Endpuncte der Achse $2hr$; die andere Achse ergiebt sich $= 2r\sqrt{h}$ und jene ist die gröfsere, wenn $h > 1$; die kleinere, wenn $h < 1$ genommen wird. Für die Differenz $(d^4 y'_x)_0 - (d^2 y_x)_0$ entsteht der Ausdruck $\frac{3}{r^3} \cdot \frac{h-1}{h}$, so dafs also

die Berührung der der 4ten Ordnung desto näher kommt, je näher $h$ der Einheit ist.

Wird *drittens* eine in der dritten Ordnung osculirende Hyperbel gefordert, so sind die Bedingungen:

1. $e = -br$;
2. $f = -ar^2 - dr$;
3. $2ar + d - 2cr = 0$;
4. $bc = 0$;
5. $4ac < b^2$.

Um (4.) zu erfüllen, mufs entweder $b = 0$ oder $c = 0$ sein. Für $c = 0$ ergiebt sich aber $(y' - r)(ay' + bx - ar) = 0$, welcher Gleichung keine Hyperbel entspricht. Es mufs also $b = 0$ sein, und dann erhält man die Gleichung

$$ay'^2 + cx^2 + 2r(c - a)y' - (2c - a)r^2 = 0.$$

Da nun, für $b = 0$, nach (5.) $a$ und $c$ einander entgegengesetzt sein müssen, so setze man $\frac{c}{a} = -h$, wo $h$ jede absolute Zahl, die Null ausgeschlossen vorstellt, und es entsteht

$$y'^2 - hx^2 - 2r(h+1)y' + (2h+1)r^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhellet, dafs für jeden Werth von $h$, nur 0 ausgeschlossen, die zugehörige Hyperbel den Kreis in $K$ in ihrem Scheitelpuncte berührt, dafs die Achse derselben $= 2rh$ und ihre Zwergachse $= 2r\sqrt{h}$ ist.

Für die Differenz $(d^4 y_x)_0 - (d^4 y_x)_0$ erhält man den Ausdruck $\frac{3}{r^3} \cdot \frac{h+1}{h}$ und die Osculation kommt also der der 4ten Ordnung desto näher, je *gröfser* $h$ genommen wird, ist aber nicht in dem Grade innig zu erreichen, wie bei der Ellipse.

---

# 15.

# Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten, No. 21. im 4ten Hefte des achtzehnten, No. 2. im 1sten, No. 8. im 2ten, No. 12. im 3ten Hefte des neunzehnten, No. 9. im 1sten Hefte und No. 12. im 2ten Hefte zwanzigsten Bandes.)

---

## Funfzehnter Abschnitt.

### §. 202.

**Ausdruck der Modular-Integrale der zweiten Art und zweiten Classe durch die Hülfs-Functionen und die davon abgeleiteten Functionen.**

Nach §. 116. ist $\mathfrak{S}(u,a) = u.\,\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$. Da nun nach §. 183.

$$\mathrm{lm}(a+u) = \frac{E}{K}.\frac{(a+u)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\sqrt{k'}}\right) \text{ und}$$
$$\mathrm{lm}(a-u) = \frac{E}{K}.\frac{(a-u)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(a-u)}{\sqrt{k'}}\right)$$

ist, so erhält man durch Subtraction

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}.au + \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}.$$

Ferner ist nach §. 201. auch $\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}.a + \mathrm{H}(a)$, also $u.\,\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}.au + \mathrm{H}(a)$. Werden diese Werthe substituirt, so erhält man sofort für das Sinus-Integral den Ausdruck

$$1.\quad \mathfrak{S}(u,a) = u.\mathrm{H}(a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}.$$

Das Cosinus-Integral ist nach §. 116. angegeben durch

$$\mathfrak{C}(u,a) = -u(\mathrm{E}-\mathrm{elc}\,a) + \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2};$$

und da nach §. 201. $\mathrm{E}-\mathrm{elc}\,a = \frac{E}{K}.a - \mathrm{G}(a)$ ist, so findet sich

$$2.\quad \mathfrak{C}(u,a) = u.\mathrm{G}(a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}.$$

Für das Differente-Integral wurde in §. 116.

$$\mathfrak{D}(u,a) = u(\mathfrak{El}'a - a) + \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$$

gefunden. Setzt man aber in der Formel (3.) des §. 201. *ai* statt *a*, indem man die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht, so erhält man

$$\mathfrak{El}'a = \left(1-\frac{E}{K}\right).a + \mathrm{B}(a) \quad\text{oder}\quad \mathfrak{El}'a - a = -\frac{E}{K}.a + \mathrm{B}(a).$$

Wird dieser Werth substituirt, so findet sich

$$3.\quad \mathfrak{D}(u, a) = u.\mathrm{B}(a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}.$$

Da nach Formel (7.) §. 183.

$$\mathrm{lm}(a\pm u) = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{(a\pm u)^2}{2} + \log\frac{\mathfrak{Bl}'(a\pm u)}{\sqrt{k'}}$$

ist, so findet man auch

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2} = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).au + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(a+u)}{\mathfrak{Bl}'(a-u)}}.$$

Ferner ist nach §. 201.

$$u.\mathrm{el}\,a = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).au + u.\mathfrak{B}'a:$$

also haben wir für das Sinus-Integral noch den zweiten Ausdruck

$$4.\quad \mathfrak{S}(u, a) = u.\mathfrak{B}'(a) - \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(a+u)}{\mathfrak{Bl}'(a-u)}},$$

und da nach §. 201. $E - \mathrm{elc}\,a = \left(1-\frac{E'}{K'}\right)a + \mathfrak{G}'(a)$ ist, so ist der zweite Ausdruck für das Cosinus-Integral

$$5.\quad \mathfrak{C}(u, a) = -u.\mathfrak{G}'(a) + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(a+u)}{\mathfrak{Bl}'(a-u)}}.$$

Aus der Formel (1.) §. 201. folgt $\mathfrak{El}'a = \frac{E'}{K'}.a + \mathfrak{H}'(a)$, oder auch $\mathfrak{El}'a - a = -\left(1-\frac{E'}{K'}\right)a + \mathfrak{H}'(a)$, und wird dieser Werth benutzt, so entsteht auch für das Differente-Integral der zweite Ausdruck

$$6.\quad \mathfrak{D}(u, a) = u.\mathfrak{H}'(a) + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(a+u)}{\mathfrak{Bl}'(a-u)}}.$$

Setzen wir in den Formeln (1. 2. 3.) $K-a$ statt $a$, so werden sie

$$7.\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(u, K-a) = u.\mathrm{G}(a) - \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Gl}(a-u)}{\mathrm{Gl}(a+u)}}, \\ \mathfrak{C}(u, K-a) = u.\mathrm{H}(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Gl}(a-u)}{\mathrm{Gl}(a+u)}}, \\ \mathfrak{D}(u, K-a) = u.\mathrm{A}(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Gl}(a-u)}{\mathrm{Gl}(a+u)}}. \end{cases}$$

Setzen wir auch in den Formeln (3. 4. 5.) $K-a$ statt $a$, so ist nach §. 170.

$$\log\mathfrak{Bl}'(K-a+u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K-a+u) + \log\mathfrak{Gl}'(a-u) \text{ und}$$
$$\log\mathfrak{Bl}'(K-a-u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K-a-u) + \log\mathfrak{Gl}'(a+u),$$

also

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(K-a+u)}{\mathfrak{Bl}'(K-a-u)}} = \eta'u - \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(a+u)}{\mathfrak{Gl}'(a-u)}}.$$

**Werden aufserdem die Formeln (11. §. 200.) benutzt, so erhält man**

$$8.\quad\begin{cases}\mathfrak{S}(u,K-a) = -u.\mathfrak{G}'(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{G}l'(a+u)}{\mathfrak{G}l'(a-u)}},\\ \mathfrak{C}(u,K-a) = \quad u.\mathfrak{B}'(a)-\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{G}l'(a+u)}{\mathfrak{G}l'(a-u)}},\\ \mathfrak{D}(u,K-a) = \quad u.\mathfrak{A}'(a)-\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{G}l'(a+u)}{\mathfrak{G}l'(a-u)}}.\end{cases}$$

**Zusatz 1.** Setzt man in den Formeln (1. 2. 3.) den Parameter $a=\frac{1}{2}K$, so ist nach §. 190.

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-u)}} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),$$

also

$$9.\quad\begin{cases}\mathfrak{S}(u,\frac{1}{2}K) = \dfrac{u(1-k')}{2}-\frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),\\ \mathfrak{C}(u,\frac{1}{2}K) = \dfrac{u(1-k')}{2}+\frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),\\ \mathfrak{D}(u,\frac{1}{2}K) = \dfrac{u(1+k')}{2}+\frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u).\end{cases}$$

Setzt man aber in den Formeln $u=\frac{1}{2}K$, so erhält man

$$10.\quad\begin{cases}\mathfrak{S}(\frac{1}{2}K,a) = \frac{1}{2}K.\mathrm{H}(a)-\frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1-k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a),\\ \mathfrak{C}(\frac{1}{2}K,a) = \frac{1}{2}K.\mathrm{G}(a)+\frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1-k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a),\\ \mathfrak{D}(\frac{1}{2}K,a) = \frac{1}{2}K.\mathrm{B}(a)+\frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1-k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).\end{cases}$$

**Zusatz 2.** Differenziirt man die Formeln (1. 2. 3.), so erhält man

$$11.\quad\begin{cases}\dfrac{k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2u} = \mathrm{H}(a)-\dfrac{\mathrm{H}(a+u)-\mathrm{H}(u-a)}{2} = \mathfrak{B}'(a)-\dfrac{\mathfrak{B}'(u+a)-\mathfrak{B}'(u-a)}{2},\\ \dfrac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}^2u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2u} = \mathrm{G}(a)+\dfrac{\mathrm{H}(a+u)-\mathrm{H}(u-a)}{2} = -\mathfrak{G}'(a)+\dfrac{\mathfrak{B}'(u+a)-\mathfrak{B}'(u-a)}{2},\\ \dfrac{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}^2u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2u} = \mathrm{B}(a)+\dfrac{\mathrm{H}(u+a)-\mathrm{H}(u-a)}{2} = \mathfrak{H}'(a)+\dfrac{\mathfrak{B}'(u+a)-\mathfrak{B}'(u-a)}{2}.\end{cases}$$

Eben so erhält man aus den Formeln (7. und 8.)

$$12.\quad\begin{cases}\dfrac{k^2\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{sn}^2u}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2a\,\mathrm{sn}^2u} = \mathrm{G}(a)-\dfrac{\mathrm{G}(u+a)-\mathrm{G}(u-a)}{2} = -\mathfrak{G}'(a)+\dfrac{\mathfrak{G}'(u+a)-\mathfrak{G}'(u-a)}{2},\\ \dfrac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}^2u}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2a\,\mathrm{sn}^2u} = \mathrm{H}(a)+\dfrac{\mathrm{G}(u+a)-\mathrm{G}(u-a)}{2} = \mathfrak{B}'(a)-\dfrac{\mathfrak{G}'(u+a)-\mathfrak{G}'(u-a)}{2},\\ \dfrac{\mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{dn}^2u}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2a\,\mathrm{sn}^2u} = \mathrm{A}(a)+\dfrac{\mathrm{G}(u+a)-\mathrm{G}(u-a)}{2} = \mathfrak{A}'(a)-\dfrac{\mathfrak{G}'(u+a)-\mathfrak{G}'(u-a)}{2}.\end{cases}$$

## §. 203.

**Ausdruck der Modular-Integrale der zweiten Art und vierten Classe durch die Hülfs-Functionen und die davon abgeleiteten Functionen.**

Vertauscht man in den Formeln (4. 5. 6. §. 202.) die beiden conjugirten Modul, indem man gleichzeitig $ai$ statt $a$ und $bi$ statt $b$ setzt, so erhält man, dem §. 117. gemäfs,

$$1.\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,a) = -u.\mathrm{B}(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Bl}(a-u)}{\mathrm{Bl}(a+u)}}, \\ '\mathfrak{C}(u,a) = -u.\mathrm{G}(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Bl}(a-u)}{\mathrm{Bl}(a+u)}}, \\ '\mathfrak{D}(u,a) = \phantom{-}u.\mathrm{H}(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Bl}(a-u)}{\mathrm{Bl}(a+u)}}. \end{cases}$$

Auf gleiche Weise verwandeln sich die Formeln (1. 2. 3. §. 202.) in

$$2.\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,a) = -u.\mathfrak{H}'(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(a-u)}{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(a+u)}}, \\ '\mathfrak{C}(u,a) = \phantom{-}u.\mathfrak{G}'(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(a-u)}{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(a+u)}}, \\ '\mathfrak{D}(u,a) = \phantom{-}u.\mathfrak{B}'(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(a-u)}{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(a+u)}}. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (1.) $K-a$ statt $a$, so werden sie

$$3.\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,K-a) = -u.\mathrm{A}(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}}. \\ '\mathfrak{C}(u,K-a) = -u.\mathrm{H}(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}}, \\ '\mathfrak{D}(u,K-a) = \phantom{-}u.\mathrm{G}(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}}. \end{cases}$$

Will man in den Formeln (2.) ebenfalls $K-a$ statt $a$ setzen, so ist, den Formeln (3. §. 168.) gemäfs,

$$\log\mathfrak{H}\mathrm{l}'(K-a-u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K-a-u)+\log\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a+u) \quad\text{und}$$
$$\log\mathfrak{H}\mathrm{l}'(K-a+u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K-a+u)+\log\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a-u),$$

also $$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(K-a-u)}{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(K-a+u)}} = -\eta'u+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a+u)}{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a-u)}}.$$

Benutzt man aufserdem die Formeln (11. §. 200.), so hat man

$$4.\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,K-a) = -u.\mathfrak{A}'(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a+u)}{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a-u)}}, \\ '\mathfrak{C}(u,K-a) = -u.\mathfrak{B}'(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a+u)}{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a-u)}}, \\ '\mathfrak{D}(u,K-a) = -u.\mathfrak{G}'(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a+u)}{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(a-u)}}. \end{cases}$$

**Zusatz 1.** Setzt man in den Formeln (1.) den Parameter $a = \frac{1}{2}K$, so ist nach §. 190.

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(\frac{1}{2}K-u)}{\mathrm{Bl}(\frac{1}{2}K+u)}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u), \text{ also.}$$

$$5.\quad\begin{cases} '\mathfrak{S}(u,\frac{1}{2}K) = -\frac{1}{2}((1+k')u) + \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u), \\ '\mathfrak{C}(u,\frac{1}{2}K) = -\frac{1}{2}((1-k')u) + \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u), \\ '\mathfrak{D}(u,\frac{1}{2}K) = \phantom{-}\frac{1}{2}((1-k')u) + \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u); \end{cases}$$

setzt man aber das Argument $u = \frac{1}{2}K$, so erhält man

$$6.\quad\begin{cases} '\mathfrak{S}(\frac{1}{2}K,a) = -\frac{1}{2}K.\mathrm{B}(a) + \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a), \\ '\mathfrak{C}(\frac{1}{2}K,a) = -\frac{1}{2}K.\mathrm{G}(a) + \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a), \\ '\mathfrak{D}(\frac{1}{2}K,a) = \phantom{-}\frac{1}{2}K.\mathrm{H}(a) + \frac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a). \end{cases}$$

**Zusatz 2.** Differenziirt man die Formeln (1.) und (2.), so erhält man

$$7.\quad\begin{cases} \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a - \mathrm{sn}^2 u} = -\mathrm{B}(a) + \frac{\mathrm{B}(u+a)-\mathrm{B}(u-a)}{2} \\ \qquad = -\mathfrak{H}'(a) + \frac{\mathfrak{H}'(u+a)-\mathfrak{H}'(u-a)}{2}, \\ \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}} = -\mathrm{G}(a) + \frac{\mathrm{B}(u+a)-\mathrm{B}(u-a)}{2} \\ \qquad = \mathfrak{G}'(a) + \frac{\mathfrak{H}'(u+a)-\mathfrak{H}'(u-a)}{2}, \\ \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,a}\cdot\frac{\mathrm{dn}^2 u}{1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}} = \mathrm{H}(a) + \frac{\mathrm{B}(u+a)-\mathrm{B}(u-a)}{2} \\ \qquad = \mathfrak{B}'(a) + \frac{\mathfrak{H}'(u+a)-\mathfrak{H}'(u-a)}{2}; \end{cases}$$

differenziirt man hingegen die Formeln (3.) und (4.), so erhält man

$$8.\quad\begin{cases} \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u} = -\mathrm{A}(a) + \frac{\mathrm{A}(u+a)-\mathrm{A}(u-a)}{2} \\ \qquad = -\mathfrak{A}'(a) + \frac{\mathfrak{X}'(u+a)-\mathfrak{X}'(u-a)}{2}, \\ \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a}} = -\mathrm{H}(a) + \frac{\mathrm{A}(u+a)-\mathrm{A}(u-a)}{2} \\ \qquad = -\mathfrak{B}'(a) + \frac{\mathfrak{X}'(u+a)-\mathfrak{X}'(u-a)}{2}, \\ \frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{dn}^2 u}{1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a}} = \mathrm{G}(a) + \frac{\mathrm{A}(u+a)-\mathrm{A}(u-a)}{2} \\ \qquad = -\mathfrak{G}'(a) + \frac{\mathfrak{X}'(u+a)-\mathfrak{X}'(u-a)}{2}. \end{cases}$$

## §. 204.

**Entwickelung des Ausdrucks $\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}$ und ähnlicher Ausdrücke mit anderen Hülfs-Functionen.**

Der Ausdruck $\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}$ und die ihm ähnlichen, welche in den vorhin entwickelten Formeln für die hyperbolischen Modular-Integrale vorkommen, lassen sich leicht unmittelbar nach den oben entwickelten Formeln berechnen; aber diese Berechnung versagt, wenn eine von den beiden Gröfsen $a$ und $u$ imaginär ist, während die andere reell bleibt, und es sich also um die Berechnung eines cyklischen Modular-Integrals der zweiten Art handelt, welches entweder der ersten oder dritten Classe, dem §. 117. und §. 122. gemäfs, angehört. Es ist alsdann durchaus nöthig, dafs der vorgelegte logarithmische Ausdruck entwickelt werde, damit, wenn eine der beiden Gröfsen $a$ und $u$ imaginär genommen wird, die imaginäre Form des Ausdrucks auf eine reelle Form zurückgebracht werden könne. Die erwähnte Entwickelung kann leicht auf mehr als eine Weise ausgeführt werden. Substituirt man in den Formeln (6. §. 174.) zuerst $a+u$ und dann $a-u$ für $u$, so erhält man durch die Subtraction

$$1.\quad\begin{cases}
\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}} = \mathrm{ArcTang}\left(\frac{\tang\eta u}{\tang\eta a}\right) + \frac{q^2\sin 2\eta a\sin 2\eta u}{1.\mathrm{Sin}\,2\eta K'} \\
\qquad + \frac{q^4\sin 4\eta a\sin 4\eta u}{2.\mathrm{Sin}\,4\eta K'} + \frac{q^6\sin 6\eta a\sin 6\eta u}{3.\mathrm{Sin}\,6\eta K'} + + \ldots \\
\log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(a-u)}{\mathrm{Bl}(a+u)}} = \mathrm{ArcTang}(\tang\eta a\,\tang\eta u) + \frac{q^2\sin 2\eta a\sin 2\eta u}{1.\mathrm{Sin}\,2\eta K'} \\
\qquad - \frac{q^4\sin 4\eta a\sin 4\eta u}{2.\mathrm{Sin}\,4\eta K'} + \frac{q^6\sin 6\eta a\sin 6\eta u}{3.\mathrm{Sin}\,6\eta K'} - + \ldots \\
\log\sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(a-u)}{\mathrm{Gl}(a+u)}} = \frac{\sin 2\eta a\sin 2\eta u}{1.\mathrm{Sin}\,2\eta K'} - \frac{\sin 4\eta a\sin 4\eta u}{2.\mathrm{Sin}\,4\eta K'} + \frac{\sin 6\eta a\sin 6\eta u}{3.\mathrm{Sin}\,6\eta K'} \\
\qquad - \frac{\sin 8\eta a\sin 8\eta u}{4.\mathrm{Sin}\,8\eta K'} + - \ldots \\
\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}} = \frac{\sin 2\eta a\sin 2\eta u}{1.\mathrm{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\sin 4\eta a\sin 4\eta u}{2.\mathrm{Sin}\,4\eta K'} + \frac{\sin 6\eta a\sin 6\eta u}{3.\mathrm{Sin}\,6\eta K'} \\
\qquad + \frac{\sin 8\eta a\sin 8\eta u}{4.\mathrm{Sin}\,8\eta K'} + + \ldots
\end{cases}$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln $ai$ statt $a$ und $ui$ statt $u$, so verwandeln sie sich in

2.

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta a}{\mathfrak{Tang}\,\eta a}\right) - \frac{q^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \frac{q^4\,\mathfrak{Sin}\,4\eta a\,\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{2.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} - \frac{q^6\,\mathfrak{Sin}\,6\eta a\,\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{3.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \ldots$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\,\eta a\,\mathfrak{Tang}\,\eta u) + \frac{q^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \frac{q^4\,\mathfrak{Sin}\,4\eta a\,\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{2.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \frac{q^6\,\mathfrak{Sin}\,6\eta a\,\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{3.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - + \ldots$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} = \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta a\,\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{2.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta a\,\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{3.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta a\,\mathfrak{Sin}\,8\eta u}{4.\,\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + - \ldots$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} = \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta a\,\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{2.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta a\,\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{3.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta a\,\mathfrak{Sin}\,8\eta u}{4.\,\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + + \ldots$$

**Bemerkenswerther sind die Reihen, welche wir aus den Formeln (5.—8. §. 187.) oder lieber aus den ihnen unmittelbar vorhergehenden vier Formeln herleiten. Ihnen gemäfs ist zunächst**

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} =$$

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{Sin}(\eta a+\eta u)}{\mathfrak{Sin}(\eta a-\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}\ldots\right\}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} =$$

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{Cos}(\eta a+\eta u)}{\mathfrak{Cos}(\eta a-\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}\ldots\right\}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} =$$

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}\ldots\right\}}$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} =$$

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}\ldots\right\}}.$$

Da aber

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}(a+b)}{\mathfrak{Sin}(a-b)}} = \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Tang}\,a+\mathfrak{Tang}\,b}{\mathfrak{Tang}\,a-\mathfrak{Tang}\,b}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,b}{\mathfrak{Tang}\,a}\right),$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}(a+b)}{\mathfrak{Cos}(a-b)}} = \log\sqrt{\frac{1+\mathfrak{Tang}\,a\,\mathfrak{Tang}\,b}{1-\mathfrak{Tang}\,a\,\mathfrak{Tang}\,b}} = \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\,a\,\mathfrak{Tang}\,b).$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,2c-\mathrm{Cos}(2a+2b)}{\mathrm{Cos}\,2c-\mathrm{Cos}(2a-2b)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}(c+a+b)\,.\,\mathrm{Sin}(c-a-b)}{\mathrm{Sin}(c+a-b)\,.\,\mathrm{Sin}(c-a+b)}}$$
$$=\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,b\,.\,\mathrm{Cot}(c+a))-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,b\,.\,\mathrm{Cot}(c-a)),$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,2c+\mathrm{Cos}(2a+2b)}{\mathrm{Cos}\,2c-\mathrm{Cos}(2a-2b)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}(c+a+b)\,.\,\mathrm{Cos}(c-a-b)}{\mathrm{Cos}(c+a-b)\,.\,\mathrm{Cos}(c-a+b)}}$$
$$=\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,b\,\mathrm{Tang}(c+a))-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,b\,.\,\mathrm{Tang}(c-a))$$

ist, so lassen sich die vorigen Formeln einfacher also darstellen:

3. $$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}}$$
$$\begin{aligned}=\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Tang}\,\eta u}{\mathrm{Tang}\,\eta a}\right)&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(2\eta K'+\eta a))\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(2\eta K'-\eta a))\\&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(4\eta K'+\eta a))\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(4\eta K'-\eta a))\\&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(6\eta K'+\eta a))+\ldots.\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(6\eta K'-\eta a))-\ldots.\end{aligned}$$

4. $$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}}$$
$$\begin{aligned}=\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Tang}\,\eta u}{\mathrm{Tang}\,\eta a}\right)&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Cot}(2\eta K'+\eta u))\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Cot}(2\eta K'-\eta u))\\&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Cot}(4\eta K'-\eta u))+\ldots.\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Cot}(4\eta K'-\eta u))-\ldots.\end{aligned}$$

5. $$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(a+u)}{\mathrm{Bl}(a-u)}}$$
$$\begin{aligned}=\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}\,\eta u)&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(2\eta K'+\eta a))\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(2\eta K'-\eta a))\\&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(4\eta K'+\eta a))\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(4\eta K'-\eta a))\\&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(6\eta K'+\eta a))+\ldots.\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(6\eta K'-\eta a))-\ldots.\end{aligned}$$

6. $$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(a+u)}{\mathrm{Bl}(a-u)}}$$
$$\begin{aligned}=\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}\,\eta u)&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}(2\eta K'+\eta u))\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}(2\eta K'-\eta u))\\&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}(4\eta K'+\eta u))+\ldots.\\&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}(4\eta K'-\eta u))-\ldots.\end{aligned}$$

$$7. \quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Sl}(a+u)}{\mathfrak{Sl}(a-u)}}$$

$$= \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'+\eta a)) + \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'+\eta a))$$
$$- \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'-\eta a)) - \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta a))$$
$$+ \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta a)) + \ldots$$
$$- \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta a)) - \ldots$$

$$8. \quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Sl}(a+u)}{\mathfrak{Sl}(a-u)}}$$

$$= \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Tang}(\eta K'+\eta u)) + \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'+\eta u))$$
$$- \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Tang}(\eta K'-\eta u)) - \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta u))$$
$$+ \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta u)) + \ldots$$
$$- \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta u)) - \ldots$$

$$9. \quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}}$$

$$= \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'-\eta a)) + \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'-\eta a))$$
$$- \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'+\eta a)) - \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'+\eta a))$$
$$+ \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'-\eta a)) + \ldots$$
$$- \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'+\eta a)) + \ldots$$

$$10. \quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}}$$

$$= \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Cot}(\eta K'-\eta u)) + \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'-\eta u))$$
$$- \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Cot}(\eta K'+\eta u)) - \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'+\eta u))$$
$$+ \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'-\eta u)) + \ldots$$
$$- \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'+\eta u)) - \ldots$$

Alle diese acht Doppelreihen, in welchen die zu je zweien unter einander stehenden Glieder nicht getrennt werden müssen, haben einen sehr hohen Grad der Convergenz, und die Berechnung der einzelnen Glieder ist so einfach, wie sie nur gewünscht werden kann.

Die Convergenz in diesen Reihen wird sichtbarer, wenn man die zusammengehörigen Glieder vereinigt. Man erhält alsdann

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\eta u}{\mathfrak{Tang}\eta a}\right) - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K' - \mathfrak{Cos}2\eta a\,\mathfrak{Cos}2\eta u}\right)$$
$$- \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K' - \mathfrak{Cos}2\eta a\,\mathfrak{Cos}2\eta u}\right) - \ldots$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}(\mathfrak{Tang}\eta a\,\mathfrak{Tang}\eta u) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}2\eta a\,\mathfrak{Sin}2\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K' + \mathfrak{Cos}2\eta a\,\mathfrak{Cos}2\eta u}\right)$$
$$+ \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K' + \mathfrak{Cos}2\eta a\,\mathfrak{Cos}2\eta u}\right) + \ldots$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Sl}(a+u)}{\mathfrak{Sl}(a-u)}}$$

$$= \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'+\mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right)+\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'+\mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right)$$

$$+\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'+\mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right)+\dots$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a+u)}{\mathfrak{Hl}(a-u)}}$$

$$= \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'-\mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right)+\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'-\mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right)$$

$$+\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'-\mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right)+\dots$$

Die Convergenz in diesen Reihen ist desto gröſser, je kleiner der Modul $k$ ist, weil die Gröſsen $\mathfrak{Cos}\,2\eta K$, $\mathfrak{Cos}\,4\eta K'$, $\mathfrak{Cos}\,6\eta K'$, $\mathfrak{Cos}\,8\eta K'$ etc. dann sehr rasch zunehmen.

## §. 205.

Da nach §. 170.

$$\log \mathrm{sn}'(a\pm u)=\log\frac{1}{\sqrt{k'}}+\log\mathfrak{Al}(a\pm u)-\log\mathfrak{Bl}(a\pm u)$$

ist, so ist

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}'(a+u)}{\mathrm{sn}'(a-u)}}.$$

Eben so ist

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}'(a-u)}{\mathrm{cn}'(a+u)}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Sl}(a+u)}{\mathfrak{Sl}(a-u)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}'(a-u)}{\mathrm{dn}'(a+u)}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}'(a+u)}{\mathrm{tn}'(a-u)}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Sl}(a+u)}{\mathfrak{Sl}(a-u)}}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}'(a-u)}{\mathrm{snc}'(a+u)}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Sl}(a+u)}{\mathfrak{Sl}(a-u)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{cnc}'(a+u)}{\mathrm{cnc}'(a-u)}},$$

und diese Formeln können, dem §. 37. gemäſs, auch also dargestellt werden:

1. $$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'u}\right)$$
$$=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\cdot\frac{\mathrm{cn}'a}{\mathrm{cnc}'a}\right),$$

2. $$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}\cdot\frac{\mathrm{sn}'u}{\mathrm{snc}'u}\right),$$

$$3.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u),$$

$$4.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\right),$$

$$5.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right),$$

$$6.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}\cdot\frac{\mathrm{sn}'u}{\mathrm{snc}'u}\right).$$

Setzt man in den Gleichungen (3. §. 170.) noch $u\pm a$ statt $u$, und nimmt auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man die Gleichungen

$$7.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(K-u+a)}{\mathfrak{Al}(K-u-a)}} = \eta a+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(u-a)}{\mathfrak{Hl}(u+a)}},$$

$$8.\quad -\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(K-u-a)}{\mathfrak{Hl}(K-u+a)}} = \eta a-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(u+a)}{\mathfrak{Al}(u-a)}},$$

$$9.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(K-u+a)}{\mathfrak{Bl}(K-u-a)}} = \eta a-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(u+a)}{\mathfrak{Gl}(u-a)}},$$

$$10.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(K-u+a)}{\mathfrak{Gl}(K-u-a)}} = \eta a-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(u+a)}{\mathfrak{Bl}(u-a)}}.$$

Aus den Formeln (2. §. 185.) folgt

$$11.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} = \frac{\pi a u}{2KK'}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}'(ai+ui)}{\mathfrak{Hl}'(ai-ui)}},$$

$$12.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} = \frac{\pi a u}{2KK'}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}'(ai+ui)}{\mathfrak{Al}'(ai-ui)}},$$

$$13.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a+u)}{\mathfrak{Hl}(a-u)}} = \frac{\pi a u}{2KK'}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(ai+ui)}{\mathfrak{Bl}'(ai-ui)}},$$

$$14.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} = \frac{\pi a u}{2KK'}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(ai+ui)}{\mathfrak{Gl}'(ai-ui)}}.$$

## §. 206.

**Die bequemsten Ausdrücke der Modular-Integrale der ersten und dritten Classe, welche rasch convergiren, wenn ihr Modul $k<\sin\frac{1}{4}\pi$ ist.**

Da

$$'\mathfrak{S}'(ui,a) = -iS(u,a),\quad '\mathfrak{C}'(ui,a) = i.\,C(u,a),\quad '\mathfrak{D}'(ui,a) = i.\,D(u,a),$$

und auch eben so

$$\mathfrak{S}'(ui,a) = -i'S(u,a),\quad \mathfrak{C}'(ui,a) = i.'C(u,a),\quad \mathfrak{D}'(ui,a) = i.'D(u,a)$$

ist, so verwandeln sich die Formeln (2. und 4. §. 203.) und die Formeln (4. 5. 6. und 8. §. 202.), wenn wir der Kürze wegen

$$1.\quad \begin{cases} \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{H}l(a-ui)}{\mathfrak{H}l(a+ui)}} = H(u,a), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{A}l(a+ui)}{\mathfrak{A}l(a-ui)}} = A(u,a), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{B}l(a+ui)}{\mathfrak{B}l(a-ui)}} = B(u,a), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{G}l(a+ui)}{\mathfrak{G}l(a-ui)}} = G(u,a), \end{cases}$$

setzen, in die folgenden:

$$2.\quad \begin{cases} S(u,a) = -H(u,a)+u.\mathfrak{H}(a) & \text{und} & 'S(u,a) = B(u,a)-u.\mathfrak{B}(a), \\ C(u,a) = H(u,a)+u.\mathfrak{G}(a) & \text{-\,-} & 'C(u,a) = B(u,a)-u.\mathfrak{G}(a), \\ D(u,a) = H(u,a)+u.\mathfrak{B}(a) & \text{-\,-} & 'D(u,a) = B(u,a)+u.\mathfrak{H}(a), \\ S(u,K'-a) = -A(u,a)+u.\mathfrak{A}(a) & \text{-\,-} & 'S(u,K'-a) = -G(u,a)+u.\mathfrak{G}(a), \\ C(u,K'-a) = A(u,a)-u.\mathfrak{B}(a) & \text{-\,-} & 'C(u,K'-a) = -G(u,a)+u.\mathfrak{B}(a), \\ D(u,K'-a) = A(u,a)-u.\mathfrak{G}(a) & \text{-\,-} & 'D(u,K'-a) = -G(u,a)+u.\mathfrak{A}(a). \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun der Kürze wegen durch $[X]$ den cyklischen Arcus, dessen (trigonometrische) Tangente die von den eckigen Klammern eingeschlossene Gröfse $X$ ist, so werden die cyklischen Arcus $H(u,a)$, $A(u,a)$, $B(u,a)$ und $G(u,a)$, welche in den vorstehenden zwölf Formeln vorkommen, am bequemsten nach den folgenden Doppelreihen berechnet, welche man, dem §. 204. gemäfs, findet, wenn man in den dortigen Reihen (3. 5. 7. 9.) $ui$ statt $u$ setzt, und den dadurch entstehenden Factor $i$ wegwirft:

$$3.\quad A(u,a) = [\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}\,\eta a]$$
$$+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K'+\eta a)]+\ldots$$
$$-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K'-\eta a)]-\ldots$$

$$4.\quad B(u,a) = [\operatorname{tng}\eta u.\mathfrak{Tang}\,\eta a]$$
$$+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'+\eta a)]+\ldots$$
$$-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'-\eta a)]-\ldots$$

$$5.\quad G(u,a) =$$
$$[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta a)]+\ldots$$
$$-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'-\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta a)]-\ldots$$

$$6.\quad H(u,a) =$$
$$[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'-\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'-\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'-\eta a)]+\ldots$$
$$-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'+\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'+\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'+\eta a)]-\ldots$$

Jedes Glied in diesen vier Reihen ist also ein cyklischer Arcus, dessen Tangente das jedesmal von eckigen Klammern umschlossene Product ist.

Mit Beziehung auf die vorstehenden Formeln haben wir nun dem Zusatze 2. zu §. 201. gemäfs

$$7.\quad S(u,a) = -H(u,a)$$
$$+\eta u\,\mathrm{Cot}(\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Cot}(3\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Cot}(5\eta K'-\eta a) + \ldots.$$
$$-\eta u\,\mathrm{Cot}(\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Cot}(3\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Cot}(5\eta K'+\eta a) - \ldots.$$

$$8.\quad C(u,a) = H(u,a)$$
$$+\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'+\eta a) + \ldots.$$
$$-\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'-\eta a) - \ldots.$$

$$9.\quad D(u,a) = H(u,a) + \eta u\,\mathrm{Tang}\,\eta a$$
$$+\eta u\,\mathrm{Tang}(2\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(4\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'+\eta a) + \ldots.$$
$$-\eta u\,\mathrm{Tang}(2\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'-\eta a) - \ldots.$$

$$10.\quad {}'S(u,a) = B(u,a) - \eta u\,\mathrm{Tang}\,\eta a$$
$$-\eta u\,\mathrm{Tang}(2\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(4\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(6\eta K'+\eta a) - \ldots.$$
$$+\eta u\,\mathrm{Tang}(2\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(4\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(6\eta K'-\eta a) + \ldots.$$

$$11.\quad {}'C(u,a) = B(u,a)$$
$$-\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'+\eta a) - \ldots.$$
$$+\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'-\eta a) + \ldots.$$

$$12.\quad {}'D(u,a) = B(u,a)$$
$$+\eta u\,\mathrm{Cot}(\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Cot}(3\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Cot}(5\eta K'-\eta a) + \ldots.$$
$$-\eta u\,\mathrm{Cot}(\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Cot}(3\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Cot}(5\eta K'+\eta a) - \ldots.$$

$$13.\quad S(u,K'-a) = -A(u,a) + \eta u\,\mathrm{Cot}\,\eta a$$
$$+\eta u\,\mathrm{Cot}(2\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathrm{Cot}(4\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathrm{Cot}(6\eta K'+\eta a) + \ldots.$$
$$-\eta u\,\mathrm{Cot}(2\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathrm{Cot}(4\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathrm{Cot}(6\eta K'-\eta a) - \ldots.$$

$$14.\quad C(u,K'-a) = A(u,a) - \eta u\,\mathrm{Tang}\,\eta a$$
$$-\eta u\,\mathrm{Tang}(2\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(4\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(6\eta K'+\eta a) - \ldots.$$
$$+\eta u\,\mathrm{Tang}(2\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(4\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(6\eta K'-\eta a) + \ldots.$$

$$15.\quad D(u,K'-a) = A(u,a)$$
$$-\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'+\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'+\eta a) - \ldots.$$
$$+\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'-\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'-\eta a) + \ldots.$$

$$16.\quad {}'S(u,K'-a) = -G(u,a)$$
$$+\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'+\eta a) + \ldots.$$
$$-\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'-\eta a) - \ldots.$$

$$17.\quad {}'\mathrm{C}(u,K'-a) = -\mathrm{G}(u,a) + \eta u\,\mathfrak{Tang}\,\eta a$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'+\eta a) + \ldots$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'-\eta a) - \ldots$$

$$18.\quad {}'\mathrm{D}(u,K'-a) = -\mathrm{G}(u,a) + \eta u\,\mathfrak{Cot}\,\eta a$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K'+\eta a) + \eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K'+\eta a) + \ldots$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K'-\eta a) - \eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K'-\eta a) - \ldots$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln $u = K$, so wird $\eta u = \frac{1}{2}\pi$. Ferner ist

$$19.\quad \mathrm{A}(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi,\quad \mathrm{B}(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi,\quad \mathrm{G}(K,a) = 0,\quad \mathrm{H}(K,a) = 0.$$

Auch hat man

$$20.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(K-u,a) + \mathrm{B}(u,a) = \mathrm{A}(u,a) + \mathrm{B}(K-u,a) = \tfrac{1}{2}\pi, \\ \mathrm{G}(K-u,a) = \mathrm{H}(u,a) \text{ und} \\ \mathrm{H}(K-u,a) = \mathrm{G}(u,a). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (1—6. §. 205.) ebenfalls $ui$ statt $u$ und dividirt durch $i$, so erhält man

$$21.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u,a) - \mathrm{B}(u,a) = \operatorname{arctng}\left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right), \\ \mathrm{B}(u,a) + \mathrm{H}(u,a) = \operatorname{arctng}\left(\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}.\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}\right), \\ \mathrm{B}(u,a) - \mathrm{G}(u,a) = \operatorname{arctng}\left(\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{dnc}\,u}{\mathrm{tnc}\,u}\right) = \operatorname{arctng}\left(k'^2\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right) \\ \mathrm{A}(u,a) + \mathrm{H}(u,a) = \operatorname{arctng}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right), \\ \mathrm{G}(u,a) + \mathrm{H}(u,a) = \operatorname{arctng}\left(k.\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right), \\ \mathrm{A}(u,a) - \mathrm{G}(u,a) = \operatorname{arctng}\left(\frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}.\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}\right). \end{cases}$$

Zugleich wird man sich erinnern, dafs nach dem Zusatze (1) zu §. 200. und nach den Formeln (7—10. §. 205.) ist:

$$22.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}(a) - \mathfrak{B}(a) = \frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a} = \frac{k\,\mathrm{cn}'a}{\mathrm{cnc}'a}, \\ \mathfrak{B}(a) + \mathfrak{H}(a) = \frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}, \\ \mathfrak{B}(a) - \mathfrak{G}(a) = k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \mathfrak{A}(a) + \mathfrak{H}(a) = \frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\ \mathfrak{G}(a) + \mathfrak{H}(a) = k.\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}, \\ \mathfrak{A}(a) - \mathfrak{G}(a) = \frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} \mathfrak{A}(K'-a) &=& \eta + \mathfrak{H}(a), \\ \mathfrak{H}(K'-a) &=& -\eta + \mathfrak{A}(a), \\ \mathfrak{B}(K'-a) &=& \eta - \mathfrak{G}(a), \\ \mathfrak{G}(K'-a) &=& \eta - \mathfrak{B}(a), \\ \mathrm{A}(u,K'-a) &=& \eta u + \mathrm{H}(u,a), \\ \mathrm{H}(u,K'-a) &=& -\eta u + \mathrm{A}(u,a), \\ \mathrm{B}(u,K'-a) &=& \eta u - \mathrm{G}(u,a), \\ \mathrm{G}(u,K'-a) &=& \eta u - \mathrm{B}(u,a). \end{array}$$

**Zusatz 1.** Die Function $G(u, a)$ ist $= 0$ statt $u = 0$ und $u = K$; daher giebt es einen Werth von $u$ zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = K$, für welchen die Function $G(u, a)$ ein Maximum ist, und dasselbe gilt von der Function $H(u, a)$. Für den Werth $u$, zu welchem das Maximum gehört, mufs $\frac{dH(u, a)}{du} = 0$ sein. Benutzen wir diese Gleichung und differenziiren die Gleichung $S(u, a) = -H(u, a) + u . \mathfrak{H}(a)$, so erhalten wir zur Bestimmung von $u$ die Gleichung

$$\mathfrak{H}(a) = \frac{dS(u, a)}{du} = \frac{k^2 \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}'^2 a (1 + k^2 \operatorname{tn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u)}$$

oder

$$\mathfrak{H}(a) = \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a (1 + k^2 \operatorname{tn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u)},$$

und hieraus folgt durch Auflösung

$$\operatorname{sn}^2 u = \operatorname{tnc}'^2 a \left( \frac{\mathfrak{H}(a)}{\frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \mathfrak{H}(a)} \right),$$

welche Gleichung sich, da $\frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \mathfrak{H}(a) = \mathfrak{A}(a)$ ist, auf

$$1. \quad \operatorname{sn} u = \operatorname{tnc}' a \sqrt{\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}$$

reducirt. Hieraus folgt $\operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{cnc}' a} \sqrt{\frac{\operatorname{cnc}'^2 a . \mathfrak{A}(a) - \operatorname{snc}'^2 a . \mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}$. oder, den Formeln (19.) im Zusatze zu §. 200. gemäfs,

$$2. \quad \operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{cnc}' a} . \sqrt{\frac{\mathfrak{G}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}, \text{ also}$$

$$3. \quad \operatorname{tn} u = \operatorname{snc}' a . \sqrt{\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{G}(a)}}.$$

Da der Formel (1.) gemäfs

$$k \operatorname{sn} u = \frac{\operatorname{cn}' a}{\operatorname{sn}' a} \sqrt{\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}, \text{ also } \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{sn}' a} \sqrt{\frac{\operatorname{sn}'^2 a \mathfrak{A}(a) - \operatorname{cn}'^2 \mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}$$

ist, so ist

$$4. \quad \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{sn}' a} \sqrt{\frac{\mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}, \text{ also}$$

$$5. \quad \operatorname{snc} u = \frac{1}{\operatorname{dnc}' a} \sqrt{\frac{\mathfrak{G}(a)}{\mathfrak{B}(a)}},$$

$$6. \quad \operatorname{cnc} u = \frac{k'}{k} \operatorname{cn}' a \sqrt{\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{B}(a)}}.$$

Für den durch die Formeln (1—6.) bestimmten Werth von $u$ ist $H(u, a)$ ein Maximum; nimmt man aber das Complement $K - u$ statt $u$, so ist für diesen Werth $G(u, a)$ ein Maximum.

**Zusatz 2.** Die Formeln im Zusatze zu §. 202. und §. 203. geben nun

$$S(u, \tfrac{1}{2}K') = \tfrac{1}{2}(1+k).u - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1+k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

$$C(u, \tfrac{1}{2}K') = -\tfrac{1}{2}(1-k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1+k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

$$D(u, \tfrac{1}{2}K') = \tfrac{1}{2}(1-k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1+k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

$$S(\tfrac{1}{2}K, a) = \tfrac{1}{2}K.\mathfrak{H}(a) - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1-k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\right),$$

$$C(\tfrac{1}{2}K, a) = \tfrac{1}{2}K.\mathfrak{G}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1-k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\right),$$

$$D(\tfrac{1}{2}K, a) = \tfrac{1}{2}K.\mathfrak{B}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1-k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\right).$$

Ferner ist

$$'S(u, \tfrac{1}{2}K') = -\tfrac{1}{2}(1-k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1-k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

$$'C(u, \tfrac{1}{2}K') = \tfrac{1}{2}(1-k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1-k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

$$'D(u, \tfrac{1}{2}K') = \tfrac{1}{2}(1+k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1-k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

$$'S(\tfrac{1}{2}K, a) = -\tfrac{1}{2}K.\mathfrak{B}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1+k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\right),$$

$$'C(\tfrac{1}{2}K, a) = -\tfrac{1}{2}K.\mathfrak{G}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1+k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\right),$$

$$'D(\tfrac{1}{2}K, a) = \tfrac{1}{2}K.\mathfrak{H}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\left((1+k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\right).$$

## §. 207.

**Die bequemsten Ausdrücke der Modular-Integrale der ersten und dritten Classe, welche rasch convergiren, wenn ihr Modul $k > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist.**

Da

$$\mathfrak{S}(u, ai) = i.\,S(u, a), \quad \mathfrak{C}(u, ai) = i.\,C(u, a), \quad \mathfrak{D}(u, ai) = i.\,D(u, a),$$

und eben so

$$'\mathfrak{S}(u, ai) = i.'S(u, a), \quad '\mathfrak{C}(u, ai) = i.'C(u, a), \quad '\mathfrak{D}(u, ai) = i.'D(u, a)$$

ist, so verwandeln sich die Formeln (4. 5. 6. §. 202.) und die Formeln (2. §. 203.), wenn man zur Abkürzung

$$1.\ \begin{cases} \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{B}l'(u+ai)}{\mathfrak{B}l'(u-ai)}} = B'(a, u) \quad \text{und} \quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{A}l'(u+ai)}{\mathfrak{A}l'(u-ai)}} = A'(a, u), \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{H}l'(u-ai)}{\mathfrak{H}l'(u+ai)}} = H'(a, u) \quad \text{-\,-} \quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{G}l'(u+ai)}{\mathfrak{G}l'(u-ai)}} = G'(a, u) \end{cases}$$

setzt, in die folgenden:

$$2.\quad\begin{cases} \mathrm{S}(u,a) = \phantom{-}u\,.\,\mathrm{B}'(a) - \mathrm{B}'(a,u), \\ \mathrm{C}(u,a) = -u\,.\,\mathrm{G}'(a) + \mathrm{B}'(a,u), \\ \mathrm{D}(u,a) = \phantom{-}u\,.\,\mathrm{H}'(a) + \mathrm{B}'(a,u), \\ '\mathrm{S}(u,a) = -u\,.\,\mathrm{H}'(a) + \mathrm{H}'(a,u), \\ '\mathrm{C}(u,a) = \phantom{-}u\,.\,\mathrm{G}'(a) + \mathrm{H}'(a,u), \\ '\mathrm{D}(u,a) = \phantom{-}u\,.\,\mathrm{B}'(a) + \mathrm{H}'(a,u). \end{cases}$$

Die Functionen $\mathrm{A}'(a,u)$, $\mathrm{B}'(a,u)$, $\mathrm{G}'(a,u)$ und $\mathrm{H}'(a,u)$ sind dieselben mit $\mathrm{A}(u,a)$, $\mathrm{B}(u,a)$, $\mathrm{G}(u,a)$ und $\mathrm{H}(u,a)$, wenn man in diesen $a$ mit $u$ vertauscht und statt des Moduls $k$ den conjugirten $k'$ nimmt. Setzt man in den Formeln (7—10. §. 205.) $ai$ statt $a$, indem man die conjugirten Modul vertauscht und die Gleichungen durch $i$ dividirt, so erhält man

$$3.\quad\begin{cases} \mathrm{A}'(a,K-u) = \phantom{-}\eta' a + \mathrm{H}'(a,u), \\ \mathrm{H}'(a,K-u) = -\eta' a + \mathrm{A}'(a,u), \\ \mathrm{B}'(a,K-u) = \phantom{-}\eta' a - \mathrm{G}'(a,u), \\ \mathrm{G}'(a,K-u) = \phantom{-}\eta' a - \mathrm{B}'(a,u), \end{cases} \quad \text{auch ist} \quad \begin{array}{l} \mathrm{A}'(K'-a) = \mathrm{B}'(a), \\ \mathrm{B}'(K'-a) = \mathrm{A}(a), \\ \mathrm{G}'(K'-a) = \mathrm{H}'(a), \\ \mathrm{H}(K'-a) = \mathrm{G}'(a). \end{array}$$

Setzt man in den Formeln (2.) noch $K-u$ statt $u$, so erhält man

$$4.\quad\begin{cases} \mathrm{S}(K-u,a) = \phantom{-}(K-u)\,.\,\mathrm{B}'(a) - \eta' a + \mathrm{G}'(a,u), \\ \mathrm{C}(K-u,a) = -(K-u)\,.\,\mathrm{G}'(a) + \eta' a - \mathrm{G}'(a,u), \\ \mathrm{D}(K-u,a) = \phantom{-}(K-u)\,.\,\mathrm{H}'(a) + \eta' a - \mathrm{G}'(a,u), \\ '\mathrm{S}(K-u,a) = -(K-u)\,.\,\mathrm{H}'(a) - \eta' a + \mathrm{A}'(a,u), \\ '\mathrm{C}(K-u,a) = \phantom{-}(K-u)\,.\,\mathrm{G}'(a) - \eta' a + \mathrm{A}'(a,u). \\ '\mathrm{D}(K-u,a) = \phantom{-}(K-u)\,.\,\mathrm{B}'(a) - \eta' a + \mathrm{A}'(a,u). \end{cases}$$

Bezeichnen wir wieder der Kürze wegen durch $[X]$ den cyklischen Arcus, dessen trigonometrische Tangente die gegebene Gröfse $X$ ist, so haben wir

$$5.\quad \mathrm{A}'(a,u) = [\mathrm{tng}\,\eta' a\, \mathfrak{Cot}\,\eta' u]$$
$$+ [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Cot}(2\eta' K + \eta' u)] + [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Cot}(4\eta' K + \eta' u)]$$
$$- [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Cot}(2\eta' K - \eta' u)] - [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Cot}(4\eta' K - \eta' u)]$$
$$+ [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Cot}(6\eta' K + \eta' u)] + \ldots.$$
$$- [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Cot}(6\eta' K - \eta' u)] - \ldots.$$

$$6.\quad \mathrm{B}'(a,u) = [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u]$$
$$+ [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Tang}(2\eta' K + \eta' u)] + [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Tang}(4\eta' K + \eta' u)]$$
$$- [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Tang}(2\eta' K - \eta' u)] - [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Tang}(4\eta' K - \eta' u)]$$
$$+ [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Tang}(6\eta' K + \eta' u)] + \ldots.$$
$$- [\mathrm{tng}\,\eta' a\,.\,\mathfrak{Tang}(6\eta' K + \eta' u)] - \ldots.$$

$$7.\quad G'(a,u) =$$
$$[\mathrm{tng}\,\eta' a\,\mathfrak{Tang}(\eta' K+\eta' u)] + [\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Tang}(3\eta' K+\eta' u)]$$
$$-[\mathrm{tng}\,\eta' a\,\mathfrak{Tang}(\eta' K-\eta' u)] - [\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Tang}(3\eta' K-\eta' u)]$$
$$+[\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Tang}(5\eta' K+\eta' u)] + \ldots.$$
$$-[\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Tang}(5\eta' K-\eta' u)] - \ldots.$$

$$8.\quad H'(a,u) =$$
$$[\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Cot}(\eta' K-\eta' u)] + [\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Cot}(3\eta' K-\eta' u)]$$
$$-[\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Cot}(\eta' K+\eta' u)] - [\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Cot}(3\eta' K+\eta' u)]$$
$$+[\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Cot}(5\eta' K-\eta' u)] + \ldots.$$
$$-[\mathrm{tng}\,\eta' a.\mathfrak{Cot}(5\eta' K+\eta' u)] - \ldots.$$

Hiernach ist also

$$9.\quad \begin{cases} A'(a,0)=\tfrac{1}{2}\pi,\ B'(a,0)=0,\quad G'(a,0)=0,\quad H'(a,0)=0, \\ A'(a,K)=\eta' a,\ B'(a,K)=\eta' a,\ G'(a,K)=\eta' a,\ H'(a,K)=\tfrac{1}{2}\pi-\eta' a, \\ \tfrac{1}{2}\pi-A'(K'-a,u) = B'(a,u),\qquad B'(K'-a,u) = \tfrac{1}{2}\pi-A'(a,u), \\ \quad G'(K'-a,u) = H'(a,u) \text{ und } H'(K'-a,u) = G'(a,u). \end{cases}$$

Wird in den Formeln (2) das Argument $u=K$, oder in den Formeln (4) das Argument $u=0$ gesetzt, so erhält man

$$10.\quad \begin{cases} S(K,a) = \quad K.B'(a)-\eta' a, \\ C(K,a) = -K.G'(a)+\eta' a, \\ D(K,a) = \quad K.H'(a)+\eta' a, \\ 'S(K,a) = -K.H'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-\eta' a, \\ 'C(K,a) = \quad K.G'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-\eta' a, \\ 'D(K,a) = \quad K.B'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-\eta' a. \end{cases}$$

Subtrahirt man hiervon die Formeln (4), so erhält man noch

$$11.\quad \begin{cases} S(K,a)-S(K-u,a) = \quad u.B'(a)-G'(a,u), \\ C(K,a)-C(K-u,a) = -u.G'(a)+G'(a,u), \\ D(K,a)-D(K-u,a) = \quad u.H'(a)+G'(a,u), \\ 'S(K,a)-'S(K-u,a) = -u.H'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-A'(a,u), \\ 'C(K,a)-'C(K-u,a) = \quad u.G'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-A'(a,u), \\ 'D(K,a)-'D(K-u,a) = \quad u.B'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-A'(a,u). \end{cases}$$

Mit Beziehung auf die Formeln (5. 6. 7. 8.) erhalten wir nun die folgenden zur Berechnung der Modular-Integrale der ersten und dritten Classe bequemsten Formeln.

$$12.\begin{cases} S(u,a) = -B'(a,u) + \eta' u \tang \eta' a + \frac{2\eta' u.p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u.p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} \\ \qquad + \frac{2\eta' u.p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u.p^8 \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \ldots \\ C(u,a) = B'(a,u) - \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - + \ldots \\ D(u,a) = B'(a,u) + \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + + \ldots \\ 'S(u,a) = H'(a,u) - \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - \ldots \\ 'C(u,a) = H'(a,u) + \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \ldots \\ 'D(u,a) = H'(a,u) + \eta' u \operatorname{tng} \eta' a + \frac{2\eta' u.p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u.p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} \\ \qquad + \frac{2\eta' u.p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' u.p^8 \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \ldots \end{cases}$$

in welchen $p = e^{-\eta' K} = e^{-\frac{\pi K}{2K'}}$ ist. Ferner hat man

$$13.\begin{cases} S(K,a) = -\eta' a + \eta' K \tang \eta' a + \frac{2\eta' K.p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' K.p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} \\ \qquad + \frac{2\eta' K.p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' K.p^8 \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \ldots \\ C(K,a) = \eta' a - \frac{2\eta' K \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - + \ldots \\ D(K,a) = \eta' a + \frac{2\eta' K \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + \ldots \\ 'S(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a - \frac{2\eta' K \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - \ldots \\ 'C(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a + \frac{2\eta' K \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \ldots \\ 'D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a + \eta' K \operatorname{tng} \eta' a + \frac{2\eta' K.p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' K.p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' K.p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - + \ldots \end{cases}$$

Die Modular-Integrale des Arguments $K-u$ werden berechnet nach den Formeln

$$14.\begin{cases} S(K,a) - S(K-u,a) = \\ -G'(a,u) + \eta' u \operatorname{tng} \eta' a + \frac{2\eta' u p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - + \ldots \\ C(K,a) - C(K-u,a) = \\ G'(a,u) - \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - + \ldots \\ D(K,a) - D(K-u,a) = \\ G'(a,u) + \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + \ldots \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&{}'\mathrm{S}(K,a) - {}'\mathrm{S}(K-u,a) = \\
&\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{A}'(a,u) - \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - \dots \\
&{}'\mathrm{C}(K,a) - {}'\mathrm{C}(K-u,a) = \\
&\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{A}'(a,u) + \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \dots \\
&{}'\mathrm{D}(K,a) - {}'\mathrm{D}(K-u,a) = \\
&\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{A}'(a,u) + \eta' u \operatorname{tng} \eta' a + \frac{2\eta' u p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - + \dots
\end{aligned}\right.$$

Vertauscht man in den Formeln (21. §. 206.) $a$ mit $u$ und den Modul $k$ mit $k'$, so erhält man

$$15. \left\{\begin{aligned}
\mathrm{A}'(a,u) - \mathrm{B}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \cdot \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{tn} u}\right) \text{ oder} \\
\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{A}'(a,u) + \mathrm{B}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right), \\
\mathrm{B}'(a,u) + \mathrm{H}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right), \\
\mathrm{B}'(a,u) - \mathrm{G}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a} \cdot k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right), \\
\mathrm{A}'(a,u) + \mathrm{H}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}\right) \text{ oder} \\
\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{A}'(a,u) - \mathrm{H}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a} \cdot \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right), \\
\mathrm{G}'(a,u) + \mathrm{H}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \cdot \frac{k' \operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}\right), \\
\mathrm{A}'(a,u) - \mathrm{G}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{snc} u}{\operatorname{sn} u}\right) \text{ oder} \\
\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{A}'(a,u) + \mathrm{G}'(a,u) &= \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{snc}' a}{\operatorname{sn}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right).
\end{aligned}\right.$$

Aufserdem ist dem Zusatze zu §. 200. gemäfs

$$16. \left\{\begin{aligned}
\mathrm{A}'(a) + \mathrm{B}'(a) &= \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a}, \\
\mathrm{B}'(a) + \mathrm{H}'(a) &= \frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a}, \\
\mathrm{B}'(a) - \mathrm{G}'(a) &= k^2 \cdot \frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a} = \frac{k \operatorname{cnc}' a}{\operatorname{cn}' a}. \\
\mathrm{A}'(a) - \mathrm{H}'(a) &= \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a} = \frac{k \operatorname{cn}' a}{\operatorname{cnc}' a}, \\
\mathrm{G}'(a) + \mathrm{H}(a) &= k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a, \\
\mathrm{A}'(a) + \mathrm{G}'(a) &= \frac{\operatorname{snc}' a}{\operatorname{sn}' a}.
\end{aligned}\right.$$

Setzt man in den Formeln (11.—14. §. 205.) noch $ui$ für $u$, und dividirt man die Gleichung durch $i$, so erhält man

$$17.\quad \begin{cases} \mathrm{B}(u,a) = \frac{\pi a u}{2KK'} + \mathrm{H}'(a,u), & -\mathrm{H}(u,a) = \frac{\pi a u}{2KK'} - \mathrm{B}'(a,u), \\ \mathrm{A}(u,a) = \frac{\pi a u}{2KK'} + \frac{1}{2}\pi - \mathrm{A}'(a,u), & \mathrm{G}(u,a) = \frac{\pi a u}{2KK'} - \mathrm{G}'(a,u), \end{cases}$$

und den Formeln (15. §. 200.) gemäfs ist

$$18.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}(a) = \frac{\pi a}{2KK'} + \mathrm{A}'(a), & \mathfrak{G}(a) = \frac{\pi a}{2KK'} - \mathrm{G}'(a), \\ \mathfrak{B}(a) = \frac{\pi a}{2KK'} + \mathrm{H}'(a), & \mathfrak{H}(a) = -\frac{\pi a}{2KK'} + \mathrm{B}'(a), \end{cases}$$

Durch die Formeln (17. und 18.) lassen sich diejenigen §. 206. auf die so eben entwickelten und umgekehrt diese auf jene zurückführen.

**Anmerkung.** Da, wie die Erfahrung lehrt, die Modular-Integrale der zweiten und vierten Classe, welche von hyperbolischer Art sind, in den Anwendungen (der Mechanik und Geometrie) selten oder vielleicht gar nicht vorkommen, so übergehen wir der Kürze wegen die Zusammenstellung der Reihen, durch welche diese Integrale ausgedrückt werden.

## §. 208.

### Reihen für die Quadrate der acht Hülfs-Functionen.

Erheben wir die Reihe

$$\frac{\mathfrak{Gl}\,u}{\sqrt{\eta}} = 1 + 2q^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u + 2q^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta u + 2q^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta u + 2q^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta u + \dots$$

zum Quadrate, und machen wir Gebrauch von der Formel $2\,\mathfrak{Cos}\,a\,\mathfrak{Cos}\,b = \mathfrak{Cos}(a+b) + \mathfrak{Cos}(a-b)$, so erhalten wir eine Reihe von der Form

$$\frac{\mathfrak{Gl}^2 u}{\eta} = a + 2\overset{1}{a}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u + 2\overset{2}{a}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta u + 2\overset{3}{a}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta u + \dots,$$

und für das Anfangsglied $a$ die Reihe

$$a = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + 2q^{64} + 2q^{100} + \dots,$$

welche leicht summirt werden kann. Setzen wir nämlich in der bekannten Reihe

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + 2q^{32} + 2q^{50} + \dots$$

$q^2$ statt $q$, d. h. statt des Moduls $k$ dem §. 51. gemäfs den nächst kleineren Modul $\lambda = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}$, also statt des Quadranten $K$ den kleineren $L = \frac{1+k'}{2}.K$, so verwandelt sich diese Reihe in die Reihe $a$; daher ist

$$a = \sqrt{\frac{(1+k')K}{\pi}} = \sqrt{\frac{1+k'}{2\eta}} = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + 2q^{64} + 2q^{100} + \dots$$

Die übrigen Coefficienten $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$ etc. werden leichter recurrirend gefunden, wenn man bedenkt, dafs in Anwendung der Bezeichnung $x = e^{\eta u}$, $\mathfrak{Gl}(u + 2K') = \frac{x^2}{q^2}.\mathfrak{Gl}\,u$ ist. Setzen wir aber auf ähnliche Art, wie in §. 188., in der Reihe

$$\frac{\mathfrak{Gl}^2 u}{\eta} = a + \overset{1}{a}x^2 + \overset{2}{a}x^4 + \overset{3}{a}x^6 + \overset{4}{a}x^8 + \dots \\ + \overset{1}{a}x^{-2} + \overset{2}{a}x^{-4} + \overset{3}{a}x^{-6} + \overset{4}{a}x^{-8} + \dots$$

$u + 2K'$ statt $u$, also $\frac{x}{q^2}$ statt $x$, so erhalten wir die Gleichung

$$\left\{\begin{matrix} a + \frac{\overset{1}{a}x^2}{q^4} + \frac{\overset{2}{a}x^4}{q^8} + \frac{\overset{3}{a}x^6}{q^{12}} + \frac{\overset{4}{a}x^8}{q^{16}} + \frac{\overset{5}{a}x^{10}}{q^{20}} + \dots \\ + \overset{1}{a}q^4x^{-2} + \overset{2}{a}q^8x^{-4} + \overset{3}{a}q^{12}x^{-6} + \overset{4}{a}q^{16}x^{-8} + \overset{5}{a}q^{20}x^{-10} + \dots \end{matrix}\right\} = \frac{x^4}{q^4}.\frac{\mathfrak{Gl}^2 u}{\eta}$$

$$= \left\{\begin{matrix} \frac{\overset{2}{a}}{q^4} + \frac{\overset{1}{a}x^2}{q^4} + \frac{ax^4}{q^4} + \frac{\overset{1}{a}x^6}{q^4} + \frac{\overset{2}{a}x^8}{q^4} + \frac{\overset{3}{a}x^{10}}{q^4} + \dots \\ + \frac{\overset{3}{a}x^{-2}}{q^4} + \frac{\overset{4}{a}x^{-4}}{q^4} + \frac{\overset{5}{a}x^{-6}}{q^4} + \frac{\overset{6}{a}x^{-8}}{q^4} + \frac{\overset{7}{a}x^{-10}}{q^4} + \dots \end{matrix}\right\},$$

und wenn wir in ihr die ersten oder auch die zweiten Horizontal-Reihen identificiren, so erhalten wir übereinstimmend die folgenden einfachen Bestimmungen:

$$\overset{1}{a} = \overset{1}{a},\ \overset{2}{a} = a.q^4,\ \overset{3}{a} = \overset{1}{a}.q^8,\ \overset{4}{a} = \overset{2}{a}.q^{12},\ \overset{5}{a} = \overset{3}{a}.q^{16},\ \overset{6}{a} = \overset{4}{a}.q^{20},\ \dots,$$

welchen gemäfs der Coefficient $\overset{1}{a}$ allein noch unbestimmt bleibt. Setzen wir, was erlaubt ist, $\overset{1}{a} = a\alpha q$, indem wir $\alpha$ als noch unbekannt ansehen, so haben wir

$$\overset{1}{a} = a.\alpha q,\ \overset{2}{a} = a.q^4,\ \overset{3}{a} = a.\alpha q^9,\ \overset{4}{a} = a.q^{16},\ \overset{5}{a} = a.\alpha q^{25},\ \overset{6}{a} = a.q^{36} \text{ u. s. w.}$$

Substituiren wir diese Werthe und setzen $k = \sin\theta$, also $k' = \cos\theta$, so erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{Gl}^2 u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta.(1 + 2\alpha q\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u + 2q^4\,\mathfrak{Cos}\,4\eta u + 2\alpha q^9\,\mathfrak{Cos}\,6\eta u \\ + 2q^{16}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta u + 2\alpha q^{25}\,\mathfrak{Cos}\,10\eta u + \dots),$$

und diese Reihe verwandelt sich, wenn $u + iK$ statt $u$, also $\eta u + \frac{1}{2}\pi i$ statt $\eta u$ gesetzt wird, in

$$\frac{\mathfrak{Hl}^2 u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta(1 - 2\alpha q\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u + 2\eta^4\,\mathfrak{Cos}\,4\eta u - 2\alpha q^9\,\mathfrak{Cos}\,6\eta u \\ + 2q^{16}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta u - 2\alpha q^{25}\,\mathfrak{Cos}\,10\eta u + - \dots).$$

## §. 209.

**Entwickelung der Quadrate der Modular-Functionen desjenigen Argumentes $u$, für welches die Function $\mathrm{H}(u, a)$ oder $\mathrm{G}(u, a)$ ein Maximum ist.**

Schon im Zusatze (1.) zu §. 206. wurden die Modular-Functionen des Argumentes $u$ hergeleitet, für welches die Function

$$\mathrm{H}(u, a) = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{H}\mathrm{l}(a-ui)}{\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+ui)}}$$

ein Maximum ist. Wir leiten hier dieselben Formeln noch auf eine andere Art her. Soll $\mathrm{H}(u, a)$ ein Maximum sein, so mufs $\frac{d\,\mathrm{H}(u, a)}{du} = 0$ sein und also den Formeln (6. §. 200.) gemäfs

$$\mathfrak{H}(a-ui) + \mathfrak{H}(a+ui) = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\mathfrak{H}\mathrm{l}(a-ui).\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+ui)$, so erhält man

$$\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+ui).\mathfrak{H}\mathrm{l}(a-ui).\mathfrak{H}(a-ui) + \mathfrak{H}\mathrm{l}(a-ui).\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+ui).\mathfrak{H}(a+ui) = 0,$$

oder $\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+ui).\frac{d\,\mathfrak{H}\mathrm{l}(a-ui)}{da} + \mathfrak{H}\mathrm{l}(a-ui).\frac{d\,\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+ui)}{da} = 0$, oder auch

$$\frac{d[\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+ui).\mathfrak{H}\mathrm{l}(a-ui)]}{da} = 0,$$

wenn nach $a$ differenziirt wird. Da aber nach §. 191.

$$\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+u).\mathfrak{H}\mathrm{l}(a-u) = \frac{\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 a.\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 u}{k'} - \frac{\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a.\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 u}{k'},$$

also $\mathfrak{H}\mathrm{l}(a+ui).\mathfrak{H}\mathrm{l}(a-ui) = \frac{\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 a.\mathrm{Hl}^2 u + \mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a.\mathrm{Al}^2 u}{k'}$

ist, so ist die vorige Gleichung einerlei mit

$$\mathrm{Hl}^2 u.d\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 a + \mathrm{Al}^2 u.d\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{Al}^2 u}{\mathrm{Hl}^2 u} = \frac{-d\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 a}{d\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a},$$

und da $\frac{\mathrm{Al}^2 u}{\mathrm{Hl}^2 u} = k\,\mathrm{sn}^2 u$ ist, so ist

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{1}{k}.\frac{-d\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 a}{d\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a} = \frac{1}{k}.\frac{\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 a}{\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a}.\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)} = (\mathrm{tnc}' a)^2.\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)},$$

wie im Zusatze zu §. 206. Ueberhaupt können die Formeln im Zusatze zu §. 206. auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{1}{k}.\frac{-d\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 a}{d\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a}, \qquad \mathrm{dn}^2 u = k'.\frac{d\mathfrak{B}\mathrm{l}^2 a}{d\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a},$$

und

$$\mathrm{cn}^2 u = \frac{k'}{k}.\frac{d\mathfrak{G}\mathrm{l}^2 a}{d\mathfrak{A}\mathrm{l}^2 a}, \qquad \mathrm{tn}^2 u = \frac{1}{k'}.\frac{-d\mathfrak{H}\mathrm{l}^2 a}{d\mathfrak{G}\mathrm{l}^2 a}.$$

Setzt man nun in den Formeln (2. §. 208.) $a$ statt $u$, und differenziirt wirklich die Reihen für die Quadrate der hyperbolischen Functionen in Ansehung des Argumentes $a$, so erhält man die Formeln

$$\mathrm{sn}^2 u =$$

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{q\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a-2q^4\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a+3q^9\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a-4q^{16}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a+5q^{25}\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a-+\ldots}{q\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a-2q^4\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a+3q^9\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a-4q^{16}\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a+5q^{25}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a-+\ldots}$$

$$\mathrm{cn}^2 u =$$

$$\frac{k'}{k}\cdot\frac{q\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a+2q^4\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a+3q^9\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a+4q^{16}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a+5q^{25}\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a+\ldots}{q\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a-2q^4\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a+3q^9\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a-4q^{16}\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a+5q^{25}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a-+\ldots}$$

$$\mathrm{dn}^2 u =$$

$$k'\cdot\frac{q\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a+2q^4\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a+3q^9\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a+4q^{16}\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a+5q^{25}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a+\ldots}{q\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a--2q^4\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a+3q^9\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a-4q^{16}\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a+5q^{25}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta u-+\ldots}$$

$$\mathrm{tn}^2 u =$$

$$\frac{1}{k'}\cdot\frac{q\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a-2q^4\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a+3q^9\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a-4q^{16}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a+5q^{25}\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a-+\ldots}{q\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a+2q^4\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a+3q^9\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a+4q^{16}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a+5q^{25}\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a+\ldots}$$

in welchen $k=\sin\theta$ und $k'=\cos\theta$ ist und welche das Argument $u$ bestimmen, für welches die Function

$$\mathrm{H}(u, a) = \mathrm{G}(K-u, a)$$

ein Maximum ist. Es ist indessen die Rechnung nach den im Zusatze zu §. 206. aufgestellten Formeln nicht minder bequem.

## Sechszehnter Abschnitt.

### §. 210.

Neue Modular-Integrale, welche von denen der zweiten Art und zweiten Classe abhängen.

Betrachten wir zuerst die beiden von $a$ und $u$ abhängigen Modular-Integrale

$$M = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,.\,du}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u},$$

$$N = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,.\,du}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u},$$

so erhalten wir durch Addition und Subtraction

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{S}(u, a),$$

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}a\,\mathrm{snc}u),$$

daher erhält man, wenn man diese Gleichungen aufs Neue durch Addition und Subtraction verbindet, die Formeln

$$1.\quad\begin{cases}\int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u.du}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) + \mathfrak{S}(u,a),\\ \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u.du}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) - \mathfrak{S}(u,a).\end{cases}$$

Da $\frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = -\frac{1}{\mathrm{sn}\,a} + \frac{1}{\mathrm{sn}\,a}\cdot\frac{1}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}$ und $\frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = \frac{1}{\mathrm{sn}\,a} - \frac{1}{\mathrm{sn}\,a}\cdot\frac{1}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}$ ist, so erhält man, wenn man diese Gleichungen noch mit $\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.du$ multiplicirt und integrirt,

$$2.\quad\begin{cases}\int_0 \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{du}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}.u + \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) + \mathfrak{S}(u,a),\\ \int_0 \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{du}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}.u - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) + \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) + \mathfrak{S}(u,a).\end{cases}$$

Betrachten wir nun die Integrale

$$M = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{snc}\,u.du}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u},$$

$$N = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{snc}\,u.du}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u},$$

und beachten, dafs $1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{snc}^2 u = \frac{k'^2(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 u}$ ist, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u),$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}^2 u.du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{C}(u,a).$$

Daher ergeben sich die Integrale

$$3.\quad\begin{cases}\int_0 \frac{k\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{snc}\,u.du}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) + \mathfrak{C}(u,a),\\ \int_0 \frac{k\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{snc}\,u.du}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) - \mathfrak{C}(u,a).\end{cases}$$

Da $\frac{k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = -\frac{1}{\mathrm{snc}\,a} + \frac{1}{\mathrm{snc}\,a}\cdot\frac{1}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u}$ und eben so $\frac{k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \frac{1}{\mathrm{snc}\,a} - \frac{1}{\mathrm{snc}\,a}\cdot\frac{1}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u}$ ist,

so erhält man, wenn man die beiden Gleichungen mit $\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a.du$ multiplicirt und integrirt,

$$\int_0 \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\cdot\frac{du}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}.u + \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) + \mathfrak{C}(u,a),$$

$$\int_0 \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\cdot\frac{du}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}.u - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) + \mathfrak{C}(u,a).$$

Da aber $\mathfrak{C}(u,a)+\frac{\text{dnc}\,a}{\text{tnc}\,a}\,u=\mathfrak{D}(u,a)$ ist, so reduciren sich die beiden Gleichungen auf

$$4.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k'\,\text{cnc}\,a}{\text{cn}\,a}\cdot\frac{du}{1-k\,\text{snc}\,a\,\text{snc}\,u} = \mathfrak{D}(u,a)+\text{ArcTang}\,(k\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,u), \\ \int_0 \frac{k'\,\text{cnc}\,a}{\text{cn}\,a}\cdot\frac{du}{1+k\,\text{snc}\,a\,\text{snc}\,u} = \mathfrak{D}(u,a)-\text{ArcTang}\,(k\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,u). \end{cases}$$

## §. 211.

**Integrale, welche von Modular-Integralen der zweiten Art und vierten Classe abhängen.**

Betrachten wir zunächst die beiden Integrale

$$M=\int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}\cdot\frac{\text{tn}\,u\,.\,du}{\text{tn}\,a-\text{tn}\,u},$$

$$N=\int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}\cdot\frac{\text{tn}\,u\,.\,du}{\text{tn}\,a+\text{tn}\,u},$$

so erhalten, wir durch Addition und Subtraction,

$$\tfrac{1}{2}(M+N)=\int_0 \frac{1}{\text{cn}\,a\,\text{snc}\,a}\cdot\frac{\text{tn}\,u\,.\,du}{\text{tn}^2 a-\text{tn}^2 u}=\int_0 \text{dn}\,a.\frac{\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,.\,du}{\text{sn}^2 a-\text{sn}^2 u},$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N)=\int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}\cdot\frac{\text{tn}^2 u\,.\,du}{\text{tn}^2 a-\text{tn}^2 u}=\int_0 \frac{\text{dn}\,a}{\text{tn}\,a}\cdot\frac{\text{sn}^2 u\,.\,du}{\text{sn}^2 a-\text{sn}^2 u}.$$

Die wirkliche Integration giebt

$$\tfrac{1}{2}(M+N)=\text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right)-\text{ArcTang}(\text{dn}\,a),$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N)={}'\mathfrak{S}(u,K-a);$$

daher haben wir die beiden Formeln

$$1.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}\cdot\frac{\text{tn}\,u\,.\,du}{\text{tn}\,a-\text{tn}\,u} = \text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right)-\text{ArcTang}\,(\text{dn}\,u)+{}'\mathfrak{S}(u,K-a), \\ \int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}\cdot\frac{\text{tn}\,u\,.\,du}{\text{tn}\,a+\text{tn}\,u} = \text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right)-\text{ArcTang}\,(\text{dn}\,a)-{}'\mathfrak{S}(u,K-a). \end{cases}$$

Da $\frac{\text{tn}\,u}{\text{tn}\,a-\text{tn}\,u}=-1+\frac{\text{tn}\,a}{\text{tn}\,a-\text{tn}\,u}$ und $\frac{\text{tn}\,u}{\text{tn}\,a+\text{tn}\,u}=1-\frac{\text{tn}\,a}{\text{tn}\,a+\text{tn}\,u}$ ist, so erhält man, wenn man diese Gleichungen mit $\frac{du}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}$ multiplicirt und integrirt,

$$2.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\text{dn}\,a}{\text{cn}^2 a}\cdot\frac{du}{\text{tn}\,a-\text{tn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}+\text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right)-\text{ArcTang}(\text{dn}\,a)+{}'\mathfrak{S}(u,K-a), \\ \int_0 \frac{\text{dn}\,a}{\text{cn}^2 a}\cdot\frac{du}{\text{tn}\,a+\text{tn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}-\text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right)+\text{ArcTang}(\text{dn}\,a)+{}'\mathfrak{S}(u,K-a). \end{cases}$$

Da $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.u + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}.u = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.u + \frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a}.u$ ist, so ist $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + {}'\mathfrak{S}(u, K-a) = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}.u$, und es darf daher in den vorigen Formeln $\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} u + {}'\mathfrak{E}(u, K-a)$ für $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + {}'\mathfrak{S}(u, K-a)$ gesetzt werden, oder auch $\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.u + {}'\mathfrak{D}(u, a)$, den Formeln (6. §. 121.) gemäfs.

Untersuchen wir nun die Integrale

$$M = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a\, du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} \quad \text{und} \quad N = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \,.\, du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u},$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u \,.\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}.$$

Die Integration selbst giebt

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.\frac{du}{1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a);$$

daher die Formeln

$$3.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \,.\, du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a), \\ \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \,.\, du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) + \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a), \end{cases}$$

in welchen auch $\mathfrak{L}\operatorname{amc} a$ für $\mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a)$ gesetzt werden kann.

Es ist $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = 1 - \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u}$ und $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = -1 + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u}$. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.du = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}.du$ und integrirt, so erhält man, mit Benutzung der vorigen Formeln,

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.\frac{\operatorname{sn} u\, du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = -\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} u + {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a),$$

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.\frac{\operatorname{sn} u\, du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} u - {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a),$$

und da nach §. 121.

$${}'\mathfrak{E}(u, K-a) - \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.u = {}'\mathfrak{S}(u, K-a)$$

ist, so reduciren sich die Formeln auf

$$4.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\cdot\frac{\operatorname{sn}u\,.\,du}{\operatorname{sn}a-\operatorname{sn}u}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc}a}{\operatorname{snc}u}\right)-\mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc}a)+{}'\mathfrak{S}(u,K-a),\\ \displaystyle\int_0\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\cdot\frac{\operatorname{sn}u\,.\,du}{\operatorname{sn}a+\operatorname{sn}u}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc}a}{\operatorname{snc}u}\right)-\mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc}a)-{}'\mathfrak{S}(u,K-a).\end{cases}$$

Die Integrale $M=\int_0\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{cn}u-\operatorname{cn}a}$ und $N=\int_0\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{cn}u+\operatorname{cn}a}$ geben

$$\tfrac{1}{2}(M+N)=\int_0\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}u\,.\,du}{\operatorname{cn}^2u-\operatorname{cn}^2a}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right)\text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N)=\int_0\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2u}={}'\mathfrak{E}(u,K-a);$$

daher haben wir die Formeln

$$5.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{cn}u-\operatorname{cn}a}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right)+{}'\mathfrak{E}(u,K-a),\\ \displaystyle\int_0\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{cn}u+\operatorname{cn}a}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right)-{}'\mathfrak{E}(u,K-a);\end{cases}$$

woraus wir noch sogleich die beiden folgenden herleiten:

$$6.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0\frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}u\,.\,du}{\operatorname{cn}u-\operatorname{cn}a}=\frac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{snc}a}.u+\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right)+{}'\mathfrak{E}(u,K-a),\\ \displaystyle\int_0\frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}u\,.\,du}{\operatorname{cn}u+\operatorname{cn}a}=\frac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{snc}a}.u-\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right)+{}'\mathfrak{E}(u,K-a).\end{cases}$$

Aus den Integralen $M=\int_0\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,.\,du}{\operatorname{dn}u-\operatorname{dn}a}$ und $N=\int_0\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,.\,du}{\operatorname{dn}u+\operatorname{dn}a}$ folgt

$$\tfrac{1}{2}(M+N)=\int_0\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}u\,.\,du}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2u}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right)\text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N)=\int\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2u}={}'\mathfrak{E}(u,K-a):$$

also haben wir

$$7.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,.\,du}{\operatorname{dn}u-\operatorname{dn}a}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right)+{}'\mathfrak{E}(u,K-a),\\ \displaystyle\int_0\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,.\,du}{\operatorname{dn}u+\operatorname{dn}a}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right)-{}'\mathfrak{E}(u,K-a).\end{cases}$$

Hieraus folgt sogleich

$$\int_0\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\operatorname{dn}u\,.\,du}{\operatorname{dn}u-\operatorname{dn}a}=k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a.u+\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right)+{}'\mathfrak{E}(u,K-a)\text{ und}$$

$$\int_0\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\operatorname{dn}u\,.\,du}{\operatorname{dn}u+\operatorname{dn}a}=k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a.u-\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right)+{}'\mathfrak{E}(u,K-a).$$

Da aber $k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a.u+{}'\mathfrak{E}(u,K-a)={}'\mathfrak{D}(u,K-a)$ ist, so reduciren sich die beiden Formeln auf

Da $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.u + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}.u = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.u + \frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a}.u$ ist, so ist $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + {}'\mathfrak{S}(u, K-a) = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}.u$, und es darf daher in den vorigen Formeln $\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} u + {}'\mathfrak{E}(u, K-a)$ für $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + {}'\mathfrak{S}(u, K-a)$ gesetzt werden, oder auch $\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.u + {}'\mathfrak{D}(u, a)$, den Formeln (6. §. 121.) gemäfs.

Untersuchen wir nun die Integrale

$$M = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a\, du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} \quad \text{und} \quad N = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a.du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u},$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u.du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}.$$

Die Integration selbst giebt

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.\frac{du}{1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a);$$

daher die Formeln

$$8. \begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a.du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a), \\ \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a.du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) + \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a), \end{cases}$$

in welchen auch $\mathfrak{L}\operatorname{amc} a$ für $\mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a)$ gesetzt werden kann.

Es ist $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = 1 - \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u}$ und $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = -1 + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u}$. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.du = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}.du$ und integrirt, so erhält man, mit Benutzung der vorigen Formeln,

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.\frac{\operatorname{sn} u\, du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = -\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} u + {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a),$$

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.\frac{\operatorname{sn} u\, du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} u - {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a),$$

und da nach §. 121.

$${}'\mathfrak{E}(u, K-a) - \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.u = {}'\mathfrak{S}(u, K-a)$$

ist, so reduciren sich die Formeln auf

$$4.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u\,.\,du}{\mathrm{sn}\,a-\mathrm{sn}\,u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{snc}\,a) + {'\mathfrak{S}}(u, K-a), \\ \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u\,.\,du}{\mathrm{sn}\,a+\mathrm{sn}\,u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{snc}\,a) - {'\mathfrak{S}}(u, K-a). \end{cases}$$

Die Integrale $M = \int_0 \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,du}{\mathrm{cn}\,u-\mathrm{cn}\,a}$ und $N = \int_0 \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,du}{\mathrm{cn}\,u+\mathrm{cn}\,a}$ geben

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,.\,du}{\mathrm{cn}^2 u-\mathrm{cn}^2 a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,a}\right) \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,du}{\mathrm{sn}^2 a-\mathrm{sn}^2 u} = {'\mathfrak{E}}(u, K-a);$$

daher haben wir die Formeln

$$5.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,du}{\mathrm{cn}\,u-\mathrm{cn}\,a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,a}\right) + {'\mathfrak{E}}(u, K-a), \\ \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,du}{\mathrm{cn}\,u+\mathrm{cn}\,a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,a}\right) - {'\mathfrak{E}}(u, K-a); \end{cases}$$

woraus wir noch sogleich die beiden folgenden herleiten:

$$6.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,.\,du}{\mathrm{cn}\,u-\mathrm{cn}\,a} = \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,a}.u + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,a}\right) + {'\mathfrak{E}}(u, K-a), \\ \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,.\,du}{\mathrm{cn}\,u+\mathrm{cn}\,a} = \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,a}.u - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,a}\right) + {'\mathfrak{E}}(u, K-a). \end{cases}$$

Aus den Integralen $M = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,.\,du}{\mathrm{dn}\,u-\mathrm{dn}\,a}$ und $N = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,.\,du}{\mathrm{dn}\,u+\mathrm{dn}\,a}$ folgt

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,.\,du}{\mathrm{sn}^2 a-\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,du}{\mathrm{sn}^2 a-\mathrm{sn}^2 u} = {'\mathfrak{E}}(u, K-a):$$

also haben wir

$$7.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,.\,du}{\mathrm{dn}\,u-\mathrm{dn}\,a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) + {'\mathfrak{E}}(u, K-a), \\ \displaystyle\int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,.\,du}{\mathrm{dn}\,u+\mathrm{dn}\,a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - {'\mathfrak{E}}(u, K-a). \end{cases}$$

Hieraus folgt sogleich

$$\int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,.\,du}{\mathrm{dn}\,u-\mathrm{dn}\,a} = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,.\,u + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) + {'\mathfrak{E}}(u, K-a) \text{ und}$$

$$\int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,.\,du}{\mathrm{dn}\,u+\mathrm{dn}\,a} = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,.\,u - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) + {'\mathfrak{E}}(u, K-a).$$

Da aber $k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,.\,u + {'\mathfrak{E}}(u, K-a) = {'\mathfrak{D}}(u, K-a)$ ist, so reduciren sich die beiden Formeln auf

$$8.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \,.\, \operatorname{dn} u \,.\, du}{\operatorname{dn} u - \operatorname{dn} a} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tn} a}\right),\\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \,.\, \operatorname{dn} u \,.\, du}{\operatorname{dn} u + \operatorname{dn} a} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tn} a}\right)\end{cases}$$

Verbinden wir die beiden Integrale

$$M = \int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{snc} u - \operatorname{snc} a} \quad \text{und} \quad N = \int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{snc} u + \operatorname{snc} a},$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{snc} u \,.\, du}{\operatorname{snc}^2 u - \operatorname{snc}^2 a} = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \,.\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right).$$

und

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{snc} a \,.\, du}{\operatorname{snc}^2 u - \operatorname{snc}^2 a} = \int_0 \frac{\operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{dn}^2 u \,.\, du}{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a);$$

daher erhalten wir

$$9.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{snc} u - \operatorname{snc} a} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) + {}'\mathfrak{D}(u, K-a),\\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{snc} u - \operatorname{snc} a} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) - {}'\mathfrak{D}(u, K-a).\end{cases}$$

Es können diese Formeln auch also dargestellt werden:

$$10.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \frac{\operatorname{snc} u \,.\, du}{\operatorname{snc} u - \operatorname{snc} a} = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \,.\, u + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) + {}'\mathfrak{D}(u, K-a),\\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \frac{\operatorname{snc} u \,.\, du}{\operatorname{snc} u + \operatorname{snc} a} = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \,.\, u - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) + {}'\mathfrak{D}(u, K-a).\end{cases}$$

Verbinden wir die Integrale

$$M = \int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc} a - \operatorname{cnc} u} \quad \text{und} \quad N = \int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc} a + \operatorname{cnc} u},$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc}^2 a - \operatorname{cnc}^2 u} = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{dn}^2 u \,.\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a),$$

und

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{cnc} u \,.\, du}{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{cn}^2 u} = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \,.\, du}{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 a} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{cn} a):$$

daher die Formeln

$$11.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc} a - \operatorname{cnc} u} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{cn} a),\\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc} a + \operatorname{cnc} u} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} u}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{cn} a).\end{cases}$$

Man leitet hieraus noch die beiden folgenden her:

$$12.\quad \begin{cases} \int\limits_0 \frac{\text{tnc}\,a\,\text{dnc}\,a\,\text{cnc}\,u\,.\,du}{\text{cnc}\,a-\text{cnc}\,u} \\ = -\frac{\text{snc}\,a}{\text{sn}\,a}u + {}'\mathfrak{D}(u, K-a) + \text{ArcTang}\left(\frac{\text{cn}\,a}{\text{cn}\,u}\right) - \text{ArcTang}(\text{cn}\,a), \\ \int\limits_0 \frac{\text{tnc}\,a\,\text{dnc}\,a\,\text{cnc}\,u\,.\,du}{\text{cnc}\,a+\text{cnc}\,u} \\ = \frac{\text{snc}\,a}{\text{sn}\,a} - {}'\mathfrak{D}(u, K-a) + \text{ArcTang}\left(\frac{\text{cn}\,a}{\text{cn}\,u}\right) - \text{ArcTang}(\text{cn}\,a). \end{cases}$$

## §. 212.

**Integrale, welche von Modular-Integralen der zweiten Art und ersten Classe abhängen.**

Verbinden wir die beiden Integrale $N = \int\limits_0 \frac{\text{dn}'a}{\text{sn}'a}\cdot\frac{\text{cn}\,u-\text{cn}'a}{1-\text{cn}'a\,\text{cn}\,u}.du$ und $M = \int \frac{\text{dn}'a}{\text{sn}'a}\cdot\frac{\text{cn}\,u+\text{cn}'a}{1+\text{cn}'a\,\text{cn}\,u}.du$, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int\limits_0 \frac{\text{sn}'a\,\text{dn}'a\,\text{cn}\,u\,.\,du}{1-\text{cn}'^2a\,\text{cn}^2u} = \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int\limits_0 \frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}\cdot\frac{\text{sn}^2u\,.\,du}{1-\text{cn}'^2a\,\text{cn}^2u} = \int\limits_0 \frac{k^2.\,\text{dnc}'a\,\text{tnc}'a\,.\,\text{sn}^2u}{\text{cnc}'^2a\,(1+k^2\,\text{tnc}'^2a\,.\,\text{sn}^2u)} = S(u, K'-a),$$

und wir haben also die Formeln

$$1.\quad \begin{cases} \int\limits_0 \frac{\text{dn}'a}{\text{sn}'a}\cdot\frac{\text{cn}\,u+\text{cn}'a}{1+\text{cn}'a\,\text{cn}\,u}.du = \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right) + S(u, K'-a), \\ \int\limits_0 \frac{\text{dn}'a}{\text{sn}'a}\cdot\frac{\text{cn}\,u-\text{cn}'a}{1-\text{cn}'a\,\text{cn}\,u}.du = \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right) - S(u, K'-a); \end{cases}$$

welche sich auch also darstellen lassen:

$$2.\quad \begin{cases} \int\limits_0 \frac{\text{tn}'a\,\text{dn}'a.du}{1-\text{cn}'a\,\text{cn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} + \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right) - S(u, K'-a), \\ \int\limits_0 \frac{\text{tn}'a\,\text{dn}'a.du}{1+\text{cn}'a\,\text{cn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right) - S(u, K'-a). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise findet man die Formeln

$$3.\quad \begin{cases} \int\limits_0 \frac{\text{dnc}'a}{\text{cnc}'a}\cdot\frac{\text{dn}\,u-\text{snc}'a}{1-\text{snc}'a\,\text{dn}\,u}.du = \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{sn}'a}\right) - S(u, K'-a), \\ \int\limits_0 \frac{\text{dnc}'a}{\text{cnc}'a}\cdot\frac{\text{dn}\,u+\text{snc}'a}{1+\text{snc}'a\,\text{dn}\,u}.du = \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{sn}'a}\right) + S(u, K'-a), \end{cases}$$

welche sich auch also darstellen lassen:

$$4.\quad \begin{cases} \int\limits_0 \frac{\text{dnc}'a}{\text{tnc}'a}\cdot\frac{du}{1-\text{snc}'a\,\text{dn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{sn}'a}\right) - S(u, K'-a), \\ \int\limits_0 \frac{\text{dnc}'a}{\text{tnc}'u}\cdot\frac{du}{1+\text{snc}'a\,\text{dn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} - \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{sn}'a}\right) - S(u, K'-a). \end{cases}$$

Da $\frac{\operatorname{cn} u}{1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cn} u} = -\frac{1}{\operatorname{cn}'a} + \frac{1}{\operatorname{cn}'a(1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cn} u)}$ und $\frac{\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn}'a \operatorname{cn} u} = \frac{1}{\operatorname{cn}'a} - \frac{1}{\operatorname{cn}'a(1+\operatorname{cn}'a \operatorname{cn} u)}$ ist, so erhält man, wenn man mit $\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a.du$ diese Gleichungen multiplicirt und integrirt,

$$\int_0 \frac{\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{cn} u.du}{1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cn} u}$$
$$= \left(\frac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a} - \operatorname{tn}'a \operatorname{dn}'a\right)u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{cnc} u}{k' \operatorname{cnc}'a}\right) - \mathrm{S}(u, K'-a),$$
$$\int_0 \frac{\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{cn} u.du}{1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cn} u}$$
$$= -\left(\frac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a} - \operatorname{tn}'a \operatorname{dn}'a\right)u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{cnc} u}{k' \operatorname{cnc}'a}\right) + \mathrm{S}(u, K'-a).$$

Da aber $\frac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a} - \operatorname{tn}'a \operatorname{dn}'a = \frac{\operatorname{dn}'a}{\operatorname{tn}'a}$ und $\frac{\operatorname{dn}'a}{\operatorname{tn}'a}u - \mathrm{S}(u,K'-a) = \mathrm{C}(u,K'-a)$ ist, so reduciren sich die beiden Formeln auf

5. $$\begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{cn} u.du}{1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cn} u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{cnc} u}{k' \operatorname{cnc}'a}\right) + \mathrm{C}(u,K'-a), \\ \int_0 \frac{\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{cn} u.du}{1+\operatorname{cn}'a \operatorname{cn} u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{cnc} u}{k' \operatorname{cnc}'a}\right) - \mathrm{C}(u,K'-a). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise lassen sich die Formeln (4.) umformen in

6. $$\begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{cnc}'a \operatorname{dnc}'a \operatorname{dn} u.du}{1-\operatorname{snc}'a \operatorname{dn} u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}'a}\right) + \mathrm{D}(u,K'-a), \\ \int_0 \frac{\operatorname{cnc}'a \operatorname{dnc}'a \operatorname{dn} u.du}{1+\operatorname{snc}'a \operatorname{dn} u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}'a}\right) - \mathrm{D}(u,K'-a). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (7. §. 211.) $ui$ statt $u$, indem man zugleich $k$ mit $k'$ vertauscht, so erhält man

7. $$\begin{cases} \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'a \operatorname{snc} u.du}{1-\operatorname{dn}'a \operatorname{snc} u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{tn}'a}\right) + \mathrm{C}(u,K'-a), \\ \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'a \operatorname{snc} u.du}{1+\operatorname{dn}'a \operatorname{snc} u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{tn}'a}\right) - \mathrm{C}(u,K'-a), \end{cases}$$

und auf gleiche Weise verwandeln sich die Formeln (8. §. 211.) in

8. $$\begin{cases} \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a.du}{1-\operatorname{dn}'a \operatorname{snc} u} = \mathrm{D}(u,K'-a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{tn}'a}\right), \\ \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a.du}{1+\operatorname{dn}'a \operatorname{snc} u} = \mathrm{D}(u,K'-a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{tn}'a}\right). \end{cases}$$

## §. 213.

**Integrale, welche von den Modular-Integralen der zweiten Art und dritten Classe abhängen.**

Setzt man in den Formeln (4. §. 211.) $K-a$ statt $a$ und $ai$ statt $a$, so erhält man

$$1.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'a \operatorname{sn}u.du}{1-\operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}'a}{\operatorname{snc}u}\right) - \operatorname{am}'a + {}'\mathrm{S}(u,a), \\ \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'u \operatorname{sn}u.du}{1+\operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}'a}{\operatorname{snc}u}\right) - \operatorname{am}'a - {}'\mathrm{S}(u,a). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise verwandeln sich die Formeln (3. §. 211.) in

$$2.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k' \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a.du}{1-\operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u} = {}'\mathrm{C}(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}'a}{\operatorname{snc}u}\right) - \operatorname{am}'a, \\ \int_0 \frac{k' \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a.du}{1+\operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u} = {}'\mathrm{C}(u,a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}'a}{\operatorname{snc}u}\right) + \operatorname{am}'a, \end{cases}$$

und die Formeln (11. §. 211.) gehen über in

$$3.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{tn}'a \operatorname{dn}'a.du}{1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cnc}u} = {}'\mathrm{D}(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{cnc}'a}{k \operatorname{cn}u}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{cnc}'a\right), \\ \int_0 \frac{\operatorname{tn}'a \operatorname{dn}'a.du}{1+\operatorname{cn}'a \operatorname{cnc}u} = {}'\mathrm{D}(u,a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{cnc}'a}{k \operatorname{cn}u}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{cnc}'a\right). \end{cases}$$

Sie können auch also dargestellt werden:

$$4.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{cnc}u.du}{1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cnc}u} \\ = {}'\mathrm{S}(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{cnc}'a}{k \operatorname{cn}u}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{cnc}'a\right), \\ \int_0 \frac{\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{cnc}u.du}{1+\operatorname{cn}'a \operatorname{cnc}u} \\ = -{}'\mathrm{S}(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{cnc}'a}{k \operatorname{cn}u}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{cnc}'a\right). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (7. §. 211.) $K-a$ statt $a$ und $ai$ statt $a$, so erhält man

$$5.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k^2 \operatorname{snc}'a \operatorname{cnc}'a.du}{\operatorname{dn}u - k' \operatorname{snc}'a} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{tnc}u}\right) + {}'\mathrm{C}(u,a), \\ \int_0 \frac{k^2 \operatorname{snc}'a \operatorname{cnc}'a.du}{\operatorname{dn}u + k' \operatorname{snc}'a} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{tnc}u}\right) - {}'\mathrm{C}(u,a), \end{cases}$$

und auf gleiche Weise verwandeln sich die Formeln (8. §. 211.) in

$$6.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a \operatorname{dn}u.du}{\operatorname{dn}u - k' \operatorname{snc}'a} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{tnc}u}\right) + {}'\mathrm{D}(u,a), \\ \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a \operatorname{dn}u\,du}{\operatorname{dn}u + k' \operatorname{snc}'a} = {}'\mathrm{D}(u,a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{tnc}u}\right). \end{cases}$$

## §. 214.

**Relationen unter den Modular-Functionen und Amplituden zweier Argumente $u$ und $v$, wenn die Moduln jener Functionen ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben.**

Im Nachfolgenden beziehen wir die Modular-Functionen der Argumente $u$ und $a$ sammt ihren Amplituden auf den Modul $k$, also beim Uebergange zum conjugirten Modul auf $k' = \sqrt{(1-k^2)}$, hingegen die Modular-Functionen und Amplituden der Argumente $v$ und $b$ auf den Modul $\lambda < k$, und also auf den Modul $\lambda' > k'$, wenn der Modul $\lambda$ mit dem conjugirten vertauscht wird. Das Verhältnifs der Modul $k$ und $\lambda$ zu einander betrachten wir als gegeben. Es sei

$$1. \quad \lambda = k \operatorname{snc} a;$$

dann ist $\lambda' = \operatorname{duc} a$, und es drückt diese Gleichung, wenn sie durch

$$2. \quad \lambda' = \frac{k}{\operatorname{dn} a}$$

vorgestellt wird, schon das Verhältnifs der conjugirten Modul zu einander aus. Die den Moduln $k$ und $k'$ zugehörigen Modular-Quadranten seien, wie bisher, $K$ und $K'$, und die den Moduln $\lambda$ und $\lambda'$ zugehörigen Modular-Quadranten $L$ und $L'$. Für $a = 0$ ist $\lambda = k$, also $L = K$ und $L' = K'$; für $a = K$ ist $\lambda = 0$, also $L = \frac{1}{2}\pi$ und $L' = \frac{1}{0}$; daher ist im Allgemeinen

$$3. \quad \begin{cases} L \text{ zwischen den Grenzen } K \text{ und } \tfrac{1}{2}\pi \text{ und} \\ L' \text{ zwischen den Grenzen } K' \text{ und } \tfrac{1}{0} \text{ enthalten,} \end{cases}$$

wenn die Gröfse $a$ reell ist, wie wir hier zunächst voraussetzen. Mit Beziehung auf die vorigen Modul $\lambda$ und $k$ sei nun

$$4. \quad \operatorname{amc} v = \operatorname{amc} u, \text{ also } \operatorname{snc} v = \operatorname{snc} u, \ \operatorname{cnc} v = \operatorname{cnc} u \text{ und } \operatorname{tnc} v = \operatorname{tnc} u.$$

Die letzte Gleichung ist einerlei mit $\lambda' \operatorname{tn} v = k' \operatorname{tn} u$, und reducirt sich in Anwendung der Gleichung (2.) auf

$$5. \quad \begin{cases} \operatorname{tn} v = \operatorname{dn} a \operatorname{tn} u, \text{ also } \operatorname{sn} v = \dfrac{\operatorname{dn} a \operatorname{sn} u}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}} \text{ und} \\ \operatorname{cn} v = \dfrac{\operatorname{cn} u}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}. \end{cases}$$

Die Gleichung $\operatorname{snc} v = \operatorname{snc} u$ ist einerlei mit $\frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$, und wird die vorige Gleichung benutzt, so hat man

$$6. \quad \operatorname{dn} v = \frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}.$$

Es ist übrigens auch $\lambda$ snc $a$ snc $u$ und also

$$7.\quad \text{dnc}\, v = \sqrt{(1-k^2 \text{snc}^2 a \,\text{snc}^2 u)} = \frac{k'.\sqrt{(1-k^2 \text{sn}^2 a \,\text{sn}^2 u)}}{\text{dn}\, a\, \text{dn}\, u}$$

Da nach §. 12. $\text{dn}\, a\, \text{tn} u = \text{tang}\left(\frac{\text{am}(u+a)+\text{am}(u-a)}{2}\right)$ ist und auch $\text{dn}\, a\, \text{tn}\, u = \text{tn}\, v = \text{tang am}\, v$, so haben wir die merkwürdige Relation unter den Amplituden:

$$8.\quad \text{am}\, v = \frac{\text{am}(u+a)+\text{am}(u-a)}{2} = \frac{\text{am}(u+a)-\text{am}(a-u)}{2}.$$

welche übrigens durch die noch einfachere anfängliche Relation $\text{amc}\, v = \text{amc}\, u$ ersetzt wird. Aus den Gleichungen $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{k}{k'}\, \text{cn}\, a$ und $\text{cnc}\, v = \text{cnc}\, u$ folgt $\frac{\lambda}{\lambda'}\, \text{cnc}\, v = \text{cn}\, a \frac{k}{k'} \text{cnc}\, u$, oder, dem §. 29. gemäfs,

$$\text{tn}\left(\lambda v, \frac{1}{\lambda}\right) = \text{dn}\left(ka, \frac{1}{k}\right).\text{tn}\left(ku, \frac{1}{k}\right),$$ ähnlich der Gleichung

$$\text{tn}\, v = \text{dn}\, a.\text{tn}\, u;$$

woraus man sieht, dafs man gleichzeitig $ka$ statt $a$, $ku$ statt $u$, $\frac{1}{k}$, statt des Moduls $k$, also $k(K-iK')$ statt des Quadranten $K$ setzen darf, wenn man $\lambda v$ statt $v$, $\frac{1}{\lambda}$ statt des Moduls $\lambda$, also $\lambda(L-iL')$ statt des Quadranten $L$ setzt. Hiernach verwandelt sich aber die Gleichung (8.) in

$$9.\quad \text{am}\left(\lambda v, \frac{1}{\lambda}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\text{am}\left(ku+ka, \frac{1}{k}\right) + \text{am}\left(ku-ka, \frac{1}{k}\right)\right].$$

Den Gleichungen (4. und 5.) gemäfs ist

$$10.\quad \begin{cases} \text{für } u = K & \text{auch } v = L, \\ \text{-- } u = 2K & \text{-- } v = 2L, \\ \text{-- } u = 3K & \text{-- } v = 3L, \\ \text{-- } u = 4K & \text{-- } v = 4L \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ueberhaupt ist $v = mL$ für $u = mK$, wenn $m$ eine ganze Zahl bezeichnet; daher ist auch für $ku = k(K-iK')$, $\lambda v = \lambda(L-iL')$, oder

$$11.\quad \begin{cases} v = L-iL' & \text{für } u = K-iK', \\ v = 2(L-iL') & \text{für } u = 2(K-iK'), \\ v = 3(L-iL') & \text{für } u = 3(K-iK'), \\ v = 4(L-iL') & \text{für } u = 4(K-iK') \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ueberhaupt wächst $v$ um $2mL+2niL'$, wenn $u$ um $2mK+2niK'$ zunimmt, vorausgesetzt, dafs $m$ und $n$ ganze Zahlen sind. Setzt man in der

Gleichung $\operatorname{tn} v = \operatorname{dn} a . \operatorname{tn} u$ das Argument $u = a + iK$, so wird $\operatorname{tn} u = \frac{i}{\operatorname{dn} a}$, also $\operatorname{tn} v = i$, oder $v = iL'$: daher ist

$$12. \begin{cases} v = iL' \text{ für } u = a + iK', \\ v = 3iL' \text{ für } u = a + 3iK', \\ v = 5iL' \text{ für } u = a + 5iK' \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

## §. 215.

Vom Integrale $v = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}$.

Zur Beurtheilung des Zusammenhanges unter den beiden Argumenten $u$ und $v$ in §. 214. selbst ist es nöthig, die ihn ausdrückende Differenzial-Gleichung zu entwickeln. Differenziiren wir zu dem Ende die Gleichung $\operatorname{amc} v = \operatorname{amc} u$, so erhalten wir zunächst $-\operatorname{dnc} v . dv = -\operatorname{dnc} u . du$, und da $\operatorname{dnc} v = \frac{\operatorname{dnc} u . \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}{\operatorname{dn} a}$ ist, so erhalten wir

$$dv = \frac{\operatorname{dn} a . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2)}}.$$

Da $\frac{\operatorname{dn} a}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}} = \frac{1}{\operatorname{snc} a} . \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tn}^2 a \operatorname{dn}^2 u)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{k'}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 a \operatorname{cn}^2 u\right)}} =$
$\frac{k'}{\sqrt{(\lambda'^2 \operatorname{cn}^2 u + k'^2 \operatorname{sn}^2 u)}}$ ist, so kann das Differenzial-Verhältnifs in verschiedenen Formen dargestellt werden. Da $\frac{dv}{du}$ positiv und $< 1$ ist, aber allmälig $= 1$ wird, wenn sich $u$ der Grenze $K$ nähert, so wächst $v$ beim Wachsen von $u$, aber so, dafs die Zunahmen von $v$ kleiner als die von $u$ sind; aber diese Verschiedenheit sich immer mehr der Gleichheit nähert, je näher $u$ der Grenze $K$ kommt.

Die Reihe für $v$ hat, wie man bald übersieht, die Form

$$v = A . u + A_1 . \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin} 2\eta K'} + A_2 . \frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin} 4\eta K'} + A_3 . \frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin} 6\eta K'} + A_4 . \frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin} 8\eta K'} + \dots$$

Setzt man hierin $u = mK$, also $v = mL$, so fällt der periodische Theil weg und man erhält $mL = A . mK$, also $A = \frac{L}{K}$; daher ist

$$v = \frac{L}{K} . u + A_1 . \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin} 2\eta K'} + A_2 . \frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin} 4\eta K'} + A_2 . \frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin} 6\eta K'} + A_3 . \frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin} 8\eta K'} + \dots$$

Wächst $u$ um $2iK'$ so mufs $v$ um $2iL'$ zunehmen; oder, setzen wir zuerst $ui$ statt $u$ und $vi$ statt $v$, so mufs in der Reihe

$$v = \frac{L}{K}.u + A_1.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + A_2.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + A_3.\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + A_4.\frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + \ldots.$$

$v$ in $v+2L'$ übergehen, wenn $u$ in $u+2K'$ verwandelt wird. Hiernach ist

$$v+2L' = \frac{L}{K}(u+2K') + A_1.\frac{\mathfrak{Sin}(2\eta u+4\eta K')}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + A_2.\frac{\mathfrak{Sin}(4\eta u+8\eta K')}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}$$
$$+ A_3.\frac{\mathfrak{Sin}(6\eta u+12\eta K')}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \ldots.$$

Wird hiervon die anfängliche Reihe subtrahirt, und beachtet man, dafs $\mathfrak{Sin}A - \mathfrak{Sin}B = 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(A-B)\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B)$ ist, so erhält man nach der Division durch 2 die Reihe

$$L' = \frac{L}{K}.K' + A_1.\mathfrak{Cos}(2\eta u+2\eta K') + A_2.\mathfrak{Cos}(4\eta u+4\eta K')$$
$$+ A_3.\mathfrak{Cos}(6\eta u+6\eta K') + \ldots.$$

welche zur näheren Bestimmung der Coefficienten $A_1$, $A_2$, $A_3$ etc. dient. Da der Werth der Reihe von der Gröfse des Argumentes $u$ unabhängig ist, so kann man auch $u$ um $K'$ vermindern und $\frac{u}{2\eta}$ statt $u$ setzen, wodurch man erhält:

$$\frac{K.L'-L.K'}{K} = A_1.\mathfrak{Cos}\,u + A_2.\mathfrak{Cos}\,2u + A_3.\mathfrak{Cos}\,3u + A_4.\mathfrak{Cos}\,4u + \ldots.$$

Nach §. 52. der Theorie der Potenzial-Functionen ist aber

$$\tfrac{1}{2} = \mathfrak{Cos}\,u - \mathfrak{Cos}\,2u + \mathfrak{Cos}\,3u - \mathfrak{Cos}\,4u + - \ldots.$$
$$0 = 1^2\mathfrak{Cos}\,u - 2^2\mathfrak{Cos}\,2u + 3^2\mathfrak{Cos}\,3u - 4^2\mathfrak{Cos}\,4u + - \ldots.$$
$$0 = 1^4\mathfrak{Cos}\,u - 2^4\mathfrak{Cos}\,2u + 3^4\mathfrak{Cos}\,3u - 4^4\mathfrak{Cos}\,4u + - \ldots.$$
$$0 = 1^6\mathfrak{Cos}\,u - 2^6\mathfrak{Cos}\,2u + 3^6\mathfrak{Cos}\,3u - 4^6\mathfrak{Cos}\,4u + - \ldots.$$

u. s. w.

und multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $2Q$, die zweite mit $2Q_1$, die folgende mit $2Q_2$, und so fort mit $2Q_3$, $2Q_4$ etc., so erhält man durch die Addition der also gebildeten Gleichungen:

$$Q = 2(Q+1^2Q_1+1^4Q_2+1^6Q_3\ldots.)\mathfrak{Cos}\,u - 2(Q+2^2Q_1+2^4Q_2+2^6Q_3\ldots.)\mathfrak{Cos}\,2u$$
$$+2(Q+3^2Q_1+3^4Q_2+3^6Q_3\ldots)\mathfrak{Cos}\,3u - 2(Q+4^2Q_1+4^4Q_2+4^6Q_3\ldots.)\mathfrak{Cos}\,4u$$
$$+ - \ldots.$$

Man leistet also der vorigen Bedingungs-Gleichung Genüge, wenn man setzt:

$$Q = \frac{K.L'-L.K'}{K},$$
$$A_1 = +2(Q+Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+\ldots.),$$
$$A_2 = -2(Q+2^2Q_1+2^4Q_2+2^6Q_3+2^8Q_4+\ldots.),$$
$$A_3 = +2(Q+3^2Q_1+3^4Q_2+3^6Q_3+3^8Q_4+\ldots.),$$

$$A_4 = -2(Q + 4^2 Q_1 + 4^4 Q_2 + 4^6 Q_3 + 4^8 Q_4 + \dots),$$
$$A_5 = +2(Q + 5^2 Q_1 + 5^4 Q_2 + 5^6 Q_3 + 5^8 Q_4 + \dots)$$
u. s. w.

Die Gröfsen $Q$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ etc., welche in den Ausdrücken $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ etc. vorkommen, hängen von den Moduln $k$ und $\lambda$, oder auch von $k$ und $a$ ab. Will man jene Gröfsen bestimmen, so geht man namhaften Weitläufigkeiten entgegen; woraus soviel hervorgeht, dafs man lieber umgekehrt das Integral

$$v = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a \,.\, du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}$$

dadurch berechnet, dafs man aus $k$, $a$ und $u$ nach den Formeln des §. 214. $\operatorname{am} v$ oder $\operatorname{amc} v$, oder auch die Modular-Functionen von $v$, und hieraus das Argument $v$ selbst nach den Formeln §. 55., §. 57. und §. 58. herleitet.

## §. 216.

**Die conjugirten Relationen unter den Amplituden und Modular-Functionen der Argumente $u$ und $v$, wenn die Moduln jener Functionen das vorhin gegebene Verhältnifs haben.**

Von dem Integrale $v = \int_0 \frac{\operatorname{cn} u \,.\, du}{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}} = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{snc} u \,.\, du}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{cnc}^2 u)}}$.

Wir erhalten die conjugirten Relationen dadurch, dafs wir durchgängig $ui$ statt $u$, $ai$ statt $a$ und $vi$ statt $v$ setzen, indem wir zugleich jeden Modul mit dem conjugirten vertauschen. Die früheren Modular-Gleichungen $\lambda = k \operatorname{snc} a$ und $\lambda' = \frac{k'}{\operatorname{dn} a}$ verwandeln sich dadurch in $\lambda' = k' \operatorname{snc}' ai$ und $\lambda = \frac{k}{\operatorname{dn}' ai}$, oder $\lambda = k \operatorname{snc} a$ und $\lambda' = \frac{k'}{\operatorname{dn} a}$, d. h. die Modular-Gleichungen des §. 214. bleiben ungeändert. Die Gleichung $\operatorname{snc} v = \operatorname{snc} u$ verwandelt sich nun in

$$1. \quad \operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u,$$

also ist $\lambda \operatorname{sn} v = k \operatorname{sn} u$, und hieraus folgt

$$2. \quad \operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a}.$$

Hierin verwandelt sich auch die Formel (5. §. 214.) unmittelbar. In gleicher Weise erhält man

3. $$\operatorname{tn} v = \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{snc} a \sqrt{(1-k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)}} = \frac{\operatorname{sn} u}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 u \operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cnc}^2 a)}}$$
$$= \frac{\operatorname{sn} u}{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}},$$

4. $$\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}.$$

Ferner ist $\frac{\lambda}{\lambda'} \operatorname{cnc} v = \frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u$, und da $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{k}{k'} \operatorname{cn} a$ ist, so findet sich

5. $$\operatorname{cnc} v = \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} a}, \quad \text{also} \quad \operatorname{snc} v = \sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{cnc}^2 u}{\operatorname{cn}^2 a}\right)}.$$

Die Formel (8. §. 214.) verwandelt sich nun in

6. $$\mathfrak{L} \operatorname{am} v = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{L} \operatorname{am}(u+a) + \mathfrak{L} \operatorname{am}(u-a)).$$

Differenziirt man die Formel $\operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a}$, so erhält man $\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v . dv = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u\, d.u}{\operatorname{snc} a}$, und da $\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u$ und $\operatorname{cn} v = \frac{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}}{\operatorname{snc} a}$ ist, so ergiebt sich

7. $$v = \int_0 \frac{\operatorname{cn} u . du}{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}}.$$

Da sich die Formel $\operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a}$ in $\operatorname{cnc} v = \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} a}$ verwandelt, wenn $k'u$ statt $u$, $k'a$ statt $a$, $\lambda' v$ statt $v$, $\frac{ik}{k'}$ statt $k$ und $\frac{i\lambda}{\lambda'}$ statt $\lambda$ gesetzt wird, und die neue Formel mit (5.) übereinstimmt, so ist die Zulässigkeit dieser Abänderung dadurch bewiesen. Hiernach verwandelt sich die Formel (6.) in

8. $$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc}(u+a)) + \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc}(u-a))].$$

Die Formel (7.) verwandelt sich zunächst in $\lambda' v = \int_0 \frac{\operatorname{snc} u . k' du}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{cnc}^2 u)}}$, und da $\lambda' = \frac{k'}{\operatorname{dn} a}$ ist, so ist

9. $$v = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{snc} u . du}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{cnc}^2 u)}}.$$

Es kann die Integral-Formel §. 215. auch sogleich abgeändert werden in

10. $$v = \int_0 \frac{du}{\operatorname{snc} a \sqrt{(1 - k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)}}$$

Der Gleichung $\operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a}$ gemäfs ist

11. $$\begin{cases} v = L & \text{für} \quad u = K, \\ v = 2L & \text{für} \quad u = 2K, \\ v = 3L & \text{für} \quad u = 3K, \\ v = 4L & \text{für} \quad u = 4K \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Der Gleichung $\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u$ gemäfs ist

$$12. \begin{cases} v = L + iL' & \text{für} \quad u = K + iK' \text{ und} \\ v = mL + niL' & \text{für} \quad u = mK + niK', \end{cases}$$

wenn unter $m$ und $n$ ungerade Zahlen verstanden werden. Auch folgt noch aus der Gleichung $\operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} n}{\operatorname{snc} a}$, dafs

$$13. \begin{cases} v = iL' & \text{für} \quad u = iK', \\ v = 2iL' & \text{für} \quad u = 2iK', \\ v = 3iL' & \text{für} \quad u = 3iK' \\ & \text{u. s. w. ist.} \end{cases}$$

Die Gleichung $\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u$ ist einerlei mit $\cos \operatorname{am}\left(\lambda v, \frac{1}{\lambda}\right) = \cos \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$: daher ist

$$14. \quad \operatorname{am}\left(\lambda v, \frac{1}{\lambda}\right) = \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$$

der einfachste Ausdruck des Zusammenhangs zwischen $u$ und $v$ mittelst der Amplituden.

## §. 217.

**Die Umkehrung der ursprünglichen Relationen unter den Argumenten $v$ und $u$ mit Moduln, welche das frühere Verhältnifs zu einander haben.**

Von dem umgekehrten Integrale $u = \int_0 \frac{dv}{\operatorname{snc}' b \cdot \sqrt{(1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v)}}$.

Zur Umkehrung der in §. 214. entwickelten Relationen unter den Functionen der Argumente $u$ und $v$ ist es zweckmäfsig, noch ein Argument $b$ dem Argumente $a$ gegenüber zu stellen und die Functionen desselben auf den Modul $\lambda$ und also auf $\lambda'$ zu beziehen, wenn, wie zunächst, der conjugirte Modul zu nehmen ist. Wählen wir das Argument $b$ so, dafs

$$1. \quad \operatorname{am}' b = \operatorname{am} a,$$

so ist auch

$$2. \quad \operatorname{sn}' b = \operatorname{sn} a, \quad \operatorname{cn}' b = \operatorname{cn} a, \quad \operatorname{tn}' b = \operatorname{tn} a.$$

Ferner ist $\lambda' \operatorname{sn}' b = \frac{k' \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}$, oder auch

$$3. \begin{cases} \lambda' \operatorname{sn}' b = \operatorname{cnc} a, \quad \operatorname{dn}' b = \operatorname{snc} a, \quad \operatorname{snc}' b = \operatorname{dn} a, \quad \operatorname{cnc}' b = k \operatorname{sn} a, \\ \lambda' \operatorname{snc}' b = k', \quad \operatorname{dnc}' b = k, \quad \text{oder} \quad k = \frac{\lambda}{\operatorname{dn}' b}. \end{cases}$$

Vergleichen wir nun die Formeln des §. 214.

$$\lambda = k \operatorname{snc} a \quad \text{und} \quad \lambda' = \frac{k'}{\operatorname{dn} a} \quad \text{mit} \quad k' = \lambda' \operatorname{snc}' b \quad \text{und} \quad k = \frac{\lambda}{\operatorname{dn}' b},$$

so haben wir den Lehrsatz: *Vertauscht man a mit b, so mufs man gleichzeitig k mit λ′ und k′ mit λ vertauschen.*

Es ist $\lambda\,\mathrm{tn}'b = k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{tn}\,a = \frac{k\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}$ und da nach §. 214. $\mathrm{sn}\,v = \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}$ ist, so ist $\lambda\,\mathrm{tn}'b\,\mathrm{sn}\,v = \frac{k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}$, folglich

$$4.\quad \begin{cases} (1+\lambda^2\,\mathrm{tn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u) = 1, \text{ oder auch} \\ (1-\lambda^2\,\mathrm{sn}^2(bi)\,\mathrm{sn}^2 v)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u) = 1. \end{cases}$$

Diese Formel drückt den Lehrsatz aus: *Man darf v mit u und λ mit k, also λ′ mit k′ vertauschen, wenn man a mit bi vertauscht.*

In Anwendung dieses Lehrsatzes, wodurch eine Reciprocität ausgedrückt wird, lassen sich alle Formeln und Bestimmungen des §. 214. sofort umkehren, wenn man nur beachtet, dafs wegen der Vertauschung der Moduln λ und *k* auch die Quadranten *L* und *K* und *L′* und *K′* mit einander vertauscht werden müssen.

Bei der angezeigten Veränderung bleiben die Formeln (4. §. 214.) ungeändert. Die Formel $\mathrm{tn}\,v = \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u$ verwandelt sich in

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{tn}\,u = \frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{snc}'b}; \text{ ferner ist } \mathrm{sn}\,u = \frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{snc}'b\sqrt{(1+\lambda^2\,\mathrm{tn}'^2\,\mathrm{sn}^2 v)}}, \\ \mathrm{cn}\,u = \frac{\mathrm{cn}\,v}{\sqrt{(1+\lambda^2\,\mathrm{tn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}} \text{ und } \mathrm{dn}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,v}{\sqrt{(1+\lambda^2\,\mathrm{tn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}} \text{ oder} \\ \mathrm{dnc}\,u = \frac{\mathrm{dnc}\,v\sqrt{(1+\lambda^2\,\mathrm{tn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}}{\mathrm{dn}\,bi} = \mathrm{snc}'b\,\mathrm{dnc}\,v\sqrt{(1+\lambda^2\,\mathrm{tn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}. \end{cases}$$

Die Formel (8.) verwandelt sich in

$$6.\quad \mathrm{am}\,u = \tfrac{1}{2}(\mathrm{am}(v+bi)+\mathrm{am}(v-bi))$$

und hat nun also eine imaginäre Form. Für $v=L$ ist $u=K$, für $v=2L$ ist $u=2K$ u. s. w. Ferner ist für

$$7.\quad \begin{cases} v = i(L'-b), & u = iK', \\ v = 2iL', & u = 2iK', \\ v = i(3L'-b), & u = 3iK', \\ v = 4iL', & u = 4iK', \\ u = i(5L'-b), & u = 5iK' \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Das im §. 215. entwickelte Integral verwandelt sich aber in

$$8.\quad u = \int_0 \frac{dv}{\mathrm{snc}'b\sqrt{(1+\lambda^2\,\mathrm{tn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}}.$$

Obgleich also der Zusammenhang zwischen *u* und *v* so verwickelt ist, dafs weder *v* durch *u*, noch umgekehrt *u* durch *v* sich bequem ausdrücken läfst, so ist dennoch die Differenzial-Gleichung umgekehrt werden.

## §. 218.

**Die Umkehrung der conjugirten Relationen unter den Functionen der Argumente $v$ und $u$, deren Moduln das frühere Verhältnifs zu einander haben.**

Vom Integrale $u = \int_0 \frac{\mathrm{dn}'b.\mathrm{cn}v.dv}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}} = \int_0 \frac{\mathrm{dn}'b.\mathrm{snc}v.dv}{\sqrt{(1-\mathrm{cn}'^2 b\,\mathrm{cnc}^2 v)}}$.

Auch die Formeln des §. 216. können in Anwendung des in §. 217. bewiesenen allgemeinen Theorems sofort umgekehrt werden, ohne dafs der durch die Formeln §. 217. ausgedrückte Zusammenhang zwischen den beiden Constanten $a$ und $b$ dadurch verändert wird.

Da nämlich $\lambda' \mathrm{sn}' b = \frac{k' \mathrm{sn}\, a}{\mathrm{dn}\, a} = \mathrm{cnc}\, a$ ist, so ist $\lambda' \mathrm{sn}' b.\mathrm{tn} v = \frac{\mathrm{tn}\, u}{\mathrm{tnc}\, a \sqrt{(1-k'^2 \mathrm{tn}^2 a\, \mathrm{tn}^2 u)}}$, oder $\lambda' \mathrm{sn}' b\, \mathrm{tn}\, v = \frac{k' \mathrm{tn}\, a\, \mathrm{tn}\, u}{\sqrt{(1-k'^2 \mathrm{tn}^2 a\, \mathrm{tn}^2 u)}}$, und also

$$1.\quad (1+\lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 b\, \mathrm{tn}^2 v)(1-k'^2 \mathrm{tn}^2 a.\mathrm{tn}^2 u) = 1.$$

Diese Gleichung drückt aber aus, dafs $u$ mit $v$ vertauscht wird, wenn man $k$ mit $\lambda$, $k'$ mit $\lambda'$ und $a$ mit $bi$ vertauscht. Hiernach bleibt die Gleichung

$$2.\quad \mathrm{dn}\, u = \mathrm{dn}\, v$$

ungeändert. Ferner ist

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\, u = \mathrm{dn}' b.\mathrm{sn}\, v, \quad \mathrm{cn}\, u = \sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}, \quad \mathrm{tn}\, u = \frac{\mathrm{dn}' b\, \mathrm{sn}\, v}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}} \\ \text{oder} \quad \mathrm{tn}\, u = \frac{\mathrm{dn}' b.\mathrm{tn}\, v}{\sqrt{(1+\lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 b\, \mathrm{tn}'^2 v)}}, \end{cases}$$

$$4.\quad \mathrm{cnc}\, u = \mathrm{cn}' b\, \mathrm{cnc}\, v, \quad \mathrm{snc}\, u = \sqrt{(1-\mathrm{cn}'^2 b\, \mathrm{cnc}^2 v)}.$$

$$5.\quad \mathfrak{L}\, \mathrm{am}\, u = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{L}\, \mathrm{am}(v+bi) + \mathfrak{L}\, \mathrm{am}(v-bi)],$$

$$6.\quad \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{am}\left(\lambda u, \frac{1}{\lambda}\right).$$

Die Formeln (7. und 10. §. 216.) aber verwandeln sich in

$$7.\quad u = \int \frac{\mathrm{dn}' b\, \mathrm{cn}\, v.dv}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}} = \int \frac{\mathrm{dn}' b\, \mathrm{snc}\, v.dv}{\sqrt{(1-\mathrm{cn}'^2 b\, \mathrm{cnc}^2 v)}} = \int \frac{\mathrm{dn}' b.dv}{\sqrt{(1+\lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 b\, \mathrm{tn}^2 v)}}.$$

Ferner ist

$$8.\quad \begin{cases} u = K & \text{für} \quad v = L-bi, \\ u = 2K & \text{für} \quad v = 2L, \\ u = 3K & \text{für} \quad v = 3L-bi, \\ u = 4K & \text{für} \quad v = 4L, \\ u = 5K & \text{für} \quad v = 5L-bi \\ & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Auch ist $u = iK'$ für $v = iL'$ und $u = K+iK'$ für $v = L+iL'$. Die Formeln (8.) gelten vereint mit den Formeln (10. §. 237.), daher gehören

folgende Werthe zusammen:

$$9.\quad \begin{cases} u = K \pm a, & v = L, \\ u = K, & v = L \pm bi, \\ u = 2K, & v = 2L, \\ u = 3K \pm a, & v = 3L, \\ u = 3K, & v = 3L \pm bi, \\ u = 4K, & v = 4L, \\ u = 5K \pm a, & v = 5L, \\ u = 5K, & v = 5L \pm bi \end{cases}$$

u. s. w.

## §. 219.

Ein neues Geschlecht von Integralen, welche sich als Modular-Integrale der zweiten Art darstellen lassen.

Wir befassen uns zunächst mit denjenigen Integralen, welche sich als Modular-Integrale der ersten Classe darstellen lassen. Nach §. 118. ist mit Beziehung auf den Modul $\lambda$, woran schon die Gröfsen $v$ und $b$ erinnern,

$$S(v, b) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b \operatorname{dn}' b . \operatorname{sn}^2 v . dv}{\operatorname{sn}'^2 b (1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)},$$

$$C(v, b) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b . \operatorname{cn}^2 v . dv}{\operatorname{dn}' b (1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)},$$

$$D(v, b) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}' b \operatorname{dn}' b . \operatorname{dn}^2 v . dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v}.$$

Da nun nach §. 217. $\dfrac{1}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u$ und $dv = \dfrac{\operatorname{dn} a . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}$, also

$$\frac{dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = \operatorname{dn} a . du \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}$$

ist, so erhält man

$$\frac{\operatorname{sn}^2 v . dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = \frac{\operatorname{dn}^3 a . \operatorname{sn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}},$$

$$\frac{\operatorname{cn}^2 v . dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = \frac{\operatorname{dn} a . \operatorname{cn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}},$$

$$\frac{\operatorname{dn}^2 v . dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = \frac{\operatorname{dn} a . \operatorname{dn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\dfrac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b \operatorname{dn}' b}{\operatorname{cn}'^2 b}$, welches nach

§. 217. gleich $\frac{k^2 \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn}^2 a}$ ist, die zweite Gleichung aber mit $\frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b}{\operatorname{dn}' b} = \frac{k^2 \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}$ und die dritte mit $\operatorname{tn}' b \operatorname{dn}' b = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}$, so erhält man durch die Integration die drei Formeln

$$1. \quad \begin{cases} \mathrm{S}(v,b) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a . \operatorname{sn}^2 u . du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}, \\ \mathrm{C}(v,b) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a . \operatorname{cn}^2 u . du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}, \\ \mathrm{D}(v,b) = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a . \operatorname{dn}^2 u . du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}, \end{cases}$$

in welchen die Gröfsen $u$ und $v$, so wie $a$ und $b$ nach den in §. 214. und §. 217. entwickelten Formeln von einander abhängen.

Vertauschen wir in diesen Formeln $\lambda$ und $k$, $u$ und $v$, $a$ und $bi$, so erhalten wir die reciproken Formeln

$$2. \quad \begin{cases} \mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b . \operatorname{sn}^2 v . dv}{\sqrt{(1+\lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)}}, \\ \mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b . \operatorname{cn}^2 v dv}{\sqrt{(1+\lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)}}, \\ \mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}' b . \operatorname{dn}^2 v \, dv}{\sqrt{(1+\lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)}}, \end{cases}$$

in welchen der Zusammenhang zwischen $u$ und $v$, zwischen $a$ und $b$ und den Moduln $\lambda$ und $k$ derselbe ist, wie in §. 214. und §. 217. Die drei Modular-Integrale haben den Modul $k$.

Vertauschen wir in den Formeln (1.) die conjugirten Modul, also $k$ mit $k'$ und $\lambda$ mit $\lambda'$, indem wir $ai$ statt $a$, $bi$ statt $b$, $ui$ statt $u$ und $vi$ statt $v$ setzen, so erhalten wir

$$3. \quad \begin{cases} {}'\mathrm{S}(v,b) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn}^2 u . du}{(1-k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)} = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a . \operatorname{sn}^2 u . du}{\operatorname{cn} u \sqrt{\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}}, \\ {}'\mathrm{C}(v,b) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a . du}{\operatorname{cn}^2 u \sqrt{(1-k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)}} = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a . du}{\operatorname{cn} u \sqrt{\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}}, \\ {}'\mathrm{D}(v,b) = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a . \operatorname{dn}^2 u . du}{\operatorname{cn}^2 u \sqrt{(1-k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)}} = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a . \operatorname{dn}^2 u . du}{\operatorname{cn} u \sqrt{\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}}. \end{cases}$$

In diesen Formeln beziehen sich die Integrale $'\mathrm{S}(v,b)$, $'\mathrm{C}(v,b)$ und $'\mathrm{D}(v,b)$ wieder auf den Modul $\lambda$. Den Zusammenhang zwischen $u$ und $v$ drücken die Formeln §. 216. und die §. 218. aus. Der Zusammenhang zwischen $a$ und $b$, $\lambda$ und $k$, $\lambda'$ und $k'$ aber ist der frühere.

Durch dasselbe Verfahren verwandeln sich die Formeln (2.) in

$$4. \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{\lambda'^2 \,\mathrm{sn}' b\, \mathrm{tn}^2 v . dv}{\sqrt{(1+\lambda'^2 \,\mathrm{sn}'^2 b\, \mathrm{tn}^2 v)}} = \int_0 \frac{\lambda'^2 \,\mathrm{sn}' b\, \mathrm{sn}^2 v . dv}{\mathrm{cn}\, v \sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}}, \\ '\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{\lambda'^2 \,\mathrm{sn}' b . dv}{\mathrm{cn}^2 v \sqrt{(1+\lambda'^2 \,\mathrm{sn}'^2 b\, \mathrm{tn}^2 v)}} = \int_0 \frac{\lambda'^2 \,\mathrm{sn}' b . dv}{\mathrm{cn}\, v \sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}}, \\ '\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{\mathrm{sn}' b\, \mathrm{dn}^2 v . dv}{\mathrm{cn}^2 v \sqrt{(1+\lambda'^2 \,\mathrm{sn}'^2 b\, \mathrm{tn}^2 v)}} = \int_0 \frac{\mathrm{sn}' b\, \mathrm{dn}^2 v . dv}{\mathrm{cn}\, v \sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}}. \end{cases}$$

In diesen Formeln ist der Zusammenhang zwischen $u$ und $v$ wieder derselbe, wie in §. 216. und §. 218.

Zusatz. Aus den Formeln $dv = \frac{\mathrm{dn}\, a . du}{\sqrt{(1-k^2 \,\mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{sn}^2 u)}}$ und $\mathrm{dn}^2 v = \frac{\mathrm{dn}^2 u}{1-k^2 \,\mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{sn}^2 u}$ folgt durch Multiplication und Integration:

$$5. \quad \mathrm{el}\, v = \int_0 \frac{\mathrm{dn}\, a\, \mathrm{dn}^2 u . du}{\sqrt{(1-k^2 \,\mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{sn}^2 u)^3}}.$$

Aus den Formeln $du = \frac{dv}{\mathrm{snc}' b \sqrt{(1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}}$ und $\mathrm{dn}^2 u = \frac{\mathrm{dn}^2 v}{1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v}$ folgt auf gleiche Weise die reciproke Formel

$$6. \quad \mathrm{el}\, u = \int_0 \frac{\mathrm{dn}^2 v . dv}{\mathrm{snc}' b \sqrt{(1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)^3}}.$$

Der Zusammenhang zwischen $u$ und $v$ in diesen Formeln ist derselbe wie in §. 214. und §. 217. Aus den Formeln $dv = \frac{\mathrm{cn}\, u . du}{\sqrt{(\mathrm{snc}^2 a - \mathrm{sn}^2 u)}}$ und $\mathrm{dn}\, v = \mathrm{dn}\, u$ §. 116. folgt

$$7. \quad \mathrm{el}\, v = \int_0 \frac{\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}^2 u . du}{\sqrt{(\mathrm{snc}^2 a - \mathrm{sn}^2 u)}}.$$

Die reciproke Formel ist also

$$8. \quad \mathrm{el}\, u = \int_0 \frac{\mathrm{dn}' b\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}^2 v . dv}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}}.$$

Der Zusammenhang zwischen $u$ und $v$ in diesen Formeln (7. und 8.) ist derselbe wie in §. 216. und §. 218. Die Function $\mathrm{el}\, v$ bezieht sich auf den Modul $\lambda = k \,\mathrm{snc}\, a$ und die Function $\mathrm{el}\, u$ auf den Modul $k = \frac{\lambda}{\mathrm{dn}' b}$.

## §. 220.

Reihen für die Integrale $\int_0^u -u . d\,\mathrm{amc}\, u$ und $\int_0^u u . d\,\mathrm{am}\, u$.

Differenziirt man das Product $u . \mathrm{amc}\, u$, so erhält man $d(u . \mathrm{amc}\, u) = u . d\,\mathrm{amc}\, u + \mathrm{amc}\, u . du$; daher ist rückwärts:

$$\int_0 u.d\,\mathrm{amc}\,u = u.\mathrm{amc}\,u - \int_0 \mathrm{amc}\,u.du \text{ und eben so}$$
$$\int_0 u.\,d\,\mathrm{am}\,u = u.\ \mathrm{am}\,u - \int_0 \mathrm{am}\,u.du.$$

Diesen Formeln gemäfs hat man nur die Integrale $\int_0 \mathrm{am}\,u.du$ und $\int_0 \mathrm{amc}\,u.du$ in Reihen zu entwickeln, und zwar in solche, welche rasch convergiren, wenn der Modul $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist, und auch in solche, deren Convergenz grofs ist, wenn $k > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist.

Es ist $\mathrm{am}\,u = \eta u + \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \frac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \ldots$ Multiplicirt man diese Reihe mit $\eta\,du$, so erhält man durch Integration:

$$\int_0 \mathrm{am}\,u.d(\eta u) = \text{const.} + \frac{\eta^2 u^2}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{1}{8}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{1}{18}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} - \ldots$$

Setzt man, um die Constante zu finden, $u = 0$, so hat man

$$0 = \text{const.} - \frac{1}{2}.\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{1}{8}.\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{1}{18}.\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} - \ldots;$$

daher erhält man durch Subtraction:

$$1.\ \int_0 \mathrm{am}\,u.d(\eta u) = \frac{\eta^2 u^2}{2} + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{1}{4}.\frac{\sin^2 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \frac{1}{9}.\frac{\sin^2 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \frac{1}{16}.\frac{\sin^2 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} + \ldots$$

Da $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u = \eta u - \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + - \ldots$, so findet man auf gleiche Weise

$$2.\ \int_0 (\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u)\,d(\eta u) = \frac{\eta^2 u^2}{2} - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{1}{4}.\frac{\sin^2 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{1}{9}.\frac{\sin^2 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \frac{1}{16}.\frac{\sin^2 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} - + \ldots$$

Die Reihe

$$\mathrm{am}\,u = l(\eta' u) + 2p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2p^5}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \frac{2p^7}{7}.\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} + - \ldots$$

giebt, mit $d(\eta' u)$ multiplicirt, wenn man der Kürze wegen

$$\int_0 l(\eta' u).d(\eta' u) = \Phi(\eta' u) \text{ setzt,}$$

$$\int_0 \mathrm{am}\,u.d(\eta' u) = \Phi(\eta' u) + 2p.\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{9}.\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2p^5}{25}.\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - + \ldots + \text{const.},$$

und wird $u = 0$ gesetzt, so hat man

$$0 = \frac{2p}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{3^2}.\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2p^5}{5^2}.\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \ldots + \text{const.},$$

also ist

$$3.\ \int_0 \mathrm{am}\,u.d(\eta' u) = \Phi(\eta' a) + \frac{4p}{1^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{1}{2}(\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{4p^3}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{1}{2}(3\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{4p^5}{5^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{1}{2}(5\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \frac{4p^7}{7^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{1}{2}(7\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} + - \ldots$$

Diese Reihe convergirt desto rascher, je gröfser der Modul $k$ ist. Es bleibt noch das Integral $\Phi(\eta' u)$ nachträglich zu entwickeln übrig. Es ist bekanntlich $l(\eta' u) = \frac{1}{2}\pi - 2 \operatorname{arc tang}(e^{-\eta' u}) = \frac{1}{2}\pi - 2e^{-\eta' u} + \frac{2}{3}e^{-3\eta' u} - \frac{2}{5}e^{-5\eta' u} + \ldots$; daher ist

$$\Phi(\eta' u) = -\text{const.} + \tfrac{1}{2}\pi.\eta' u + 2e^{-\eta' u} - \frac{2}{3^2}.e^{-3\eta' u} + \frac{2}{5^2}.e^{-5\eta' u} - \frac{2}{7^2}.e^{-7\eta' u} + - \ldots.$$

Setzt man, um die Constante zu finden, $u = 0$, so hat man

$$\text{const.} = \mu = 2 - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} - \frac{2}{7^2} + \frac{2}{9^2} - \ldots, \text{ also}$$

$$\Phi(\eta' u) = \tfrac{1}{2}\pi.\eta' u - \mu + 2.e^{-\eta' u} - \frac{2}{3^2}.e^{-3\eta' u} + \frac{2}{5^2}.e^{-5\eta' u} - \frac{2}{7^2}.e^{-7\eta' u} + \frac{2}{9^2}.e^{-9\eta' u} - + \ldots.$$

Im achten Bande des gegenwärtigen Journals befindet sich eine von *Clausen* berechnete Tabelle der Werthe der Reihe $\sin\varphi + \frac{1}{2^2}\sin 2\varphi + \frac{1}{4^2}\sin 4\varphi \ldots.$ Setzt man in dieser Reihe $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so wird sie die Reihe für $\frac{1}{2}\mu$, also $\frac{1}{2}\mu = 0{,}91596\ 55941\ 772190$, und folglich

$$\mu = 1{,}83193\ 11883\ 544380.$$

Andere Reihen für das Integral $\Phi(\eta' u)$ findet man an einer späteren Stelle.

Gehen wir nun von der Reihe

$$\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u = 2.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \tfrac{2}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \tfrac{2}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - + \ldots.$$

aus, so finden wir sofort

$$4.\quad \int_0 (\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u)\, d(\eta' u) =$$

$$4.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{4}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(3\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{4}{5^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(5\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \frac{4}{7^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(7\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} + - \ldots.$$

Aus den vorstehenden Reihen folgt

5.
$$\int_0^u \eta u.\, d \operatorname{am} u = \eta u.\operatorname{am} u - \frac{\eta^2 u^2}{2} - \frac{\sin^2 \eta u}{1.\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{\sin^2 2\eta u}{4.\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{\sin^2 3\eta u}{9.\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} - \frac{\sin^2 4\eta u}{16.\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} - \ldots,$$

$$\int_0^u - \eta u.d \operatorname{amc} u = \eta u(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) - \frac{\eta^2 u^2}{2} + \frac{\sin^2 \eta u}{1.\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{\sin^2 2\eta u}{4.\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \frac{\sin^2 3\eta u}{9.\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} - \frac{\sin^2 4\eta u}{16.\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} + - \ldots,$$

$$\int_0^u \eta' u.\, d \operatorname{am} u = \eta' u.\operatorname{am} u - \Phi(\eta' u) - \frac{4p}{1^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \frac{4p^3}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(3\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} - \frac{4p^5}{5^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(5\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} + - \ldots,$$

$$\int_0^u - \eta' u.d \operatorname{amc} u = \eta' u(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) - 4.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \frac{4}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(3\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} - \frac{4}{5^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}(5\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} + - \ldots,$$

Die beiden ersten von diesen Reihen convergiren rasch, wenn $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ oder nicht viel $> \sin\frac{1}{4}\pi$ ist; die beiden letzten convergiren rasch, wenn $k > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist.

## §. 221.

### Merkwürdige Ausdrücke für $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{elc}\,u$.

Setzt man in §. 96. die willkürlichen Gröfsen $b' = 1$, $a' = 0$, $b = 0$ und $a' = 1$, so erhält man, der dortigen Formel $a\,da' - a'da = \frac{1}{2}(ba' - ab').\frac{dk}{kk'^2}$ gemäfs, $K\,dK' - K'dK = -\frac{1}{2}\pi.\frac{dk}{kk'^2}$, und wird, wie früher in §. 175. und §. 179.,

$$v = \eta K' = \frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K} \quad \text{und} \quad v' = \eta' K = \frac{1}{2}\pi.\frac{K}{K'}$$

gesetzt, so ist $dv = \frac{1}{2}\pi.\frac{K\,dK' - K'dK}{K^2}$, also $dv = -\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{dk}{kk'^2}$, oder

$$dv = -\eta^2.\frac{dk}{kk'^2},$$

und also rückwärts $dk = -\frac{1}{\eta^2}.kk'^2.dv$. Wird dieser Werth in den Formeln §. 93. substituirt, so erhält man

$$1. \quad \begin{cases} \dfrac{dK}{dv} = -\dfrac{E - k'^2K}{\eta^2}, & \dfrac{dE}{dv} = \dfrac{k'^2(K-E)}{\eta^2}, \\ \dfrac{dK'}{dv} = \dfrac{E' - k^2K}{\eta^2}, & \dfrac{dE'}{dv} = -\dfrac{k^2(K'-E')}{\eta^2}. \\ \dfrac{d(K-E)}{dv} = -\dfrac{k^2.E}{\eta^2}, & \dfrac{d(K'-E')}{dv} = \dfrac{k'^2.E'}{\eta^2}. \end{cases}$$

Ferner ist $\eta = \frac{\pi}{2K}$, also $d\eta = -\frac{1}{2}\pi.\frac{dK}{K^2}$; also ist

$$2. \quad \frac{d\eta}{dv} = \frac{E - k'^2K}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2E}{\pi} - \frac{k'^2}{\eta}.$$

Nach §. 90. ist $k.\frac{du}{dk} = \frac{du - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u}{k'^2} - u = \frac{E - \mathrm{elc}\,u}{k'^2} - u$, wenn $\mathrm{am}\,u$ als constant angesehen wird; daher ist unter derselben Voraussetzung

$$3. \quad \frac{du}{dv} = \frac{k'^2.u - (E - \mathrm{elc}\,u)}{\eta^2}.$$

Addirt man die Gleichungen $\frac{u\,d\eta}{dv} = \frac{2E.u}{\pi} - \frac{k'^2u}{\eta}$ und $\frac{\eta\,du}{dv} = \frac{k'^2u}{\eta} - \frac{E - \mathrm{elc}\,u}{\eta}$, so erhält man

$$\frac{d(\eta u)}{dv} = \frac{\mathrm{elc}\,u}{\eta} - \frac{E(K-u)}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Da $\eta u = \frac{1}{2}\pi - \eta(K-u)$, also $d(\eta u) = -d(\eta(K-u))$ ist, so findet sich

$$\frac{-d(\eta(K-u))}{dv} = \frac{\mathrm{elc}\,u}{\eta} - \frac{E(K-u)}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $K-u$ statt $u$, so erhält man $\frac{-d(\eta u)}{dv} = \frac{\operatorname{el} u}{\eta} - \frac{Eu}{\frac{1}{2}\pi}$ unter der Voraussetzung, daſs $\operatorname{amc} u$ constant ist, und also rückwärts

$$4. \quad \begin{cases} \operatorname{el} u = \frac{E}{K} u - \eta . \frac{d(\eta u)}{dv} \text{ für } \operatorname{amc} u = \text{const. und} \\ \operatorname{elc} u = E - \frac{E}{K} u + \eta . \frac{d(\eta u)}{dv} \text{ für } \operatorname{am} u = \text{const.} \end{cases}$$

Es ist nicht gleichgültig, welche von den beiden Gröſsen $\operatorname{am} u$ und $\operatorname{amc} u$ als constant angesehen wird, da das Product $\operatorname{tang} \operatorname{amc} u = \frac{1}{k'}$ ist und also von $v = \eta K'$ abhängt.

Da $v.v' = (\frac{1}{2}\pi)^2$, so ist $dv = (\frac{1}{2}\pi)^2 . \frac{-dv'}{v'^2} = -\left(\frac{K}{K'}\right)^2 . dv'$ oder $dv = -\frac{\eta^2}{\eta'^2} . dv'$; daher ist

$$5. \quad \frac{du}{dv'} = \frac{E - \operatorname{elc} u - k'^2 u}{\eta'^2} \text{ für } \operatorname{am} u = \text{const.},$$

$$\frac{dK}{dv'} = \frac{E - k'^2 K}{\eta'^2}, \text{ also}$$

$$\frac{d(K-u)}{dv'} = \frac{\operatorname{elc} u - k'^2 (K-u)}{\eta'^2} \text{ für } \operatorname{am} u = \text{const., oder}$$

$$6. \quad \frac{du}{dv'} = \frac{\operatorname{el} u - k'^2 . u}{\eta'^2} \text{ für } \operatorname{amc} u = \text{const.}$$

Vertauscht man in der Gleichung (2.) die conjugirten Modul, so erhält man $\frac{d\eta'}{dv'} = \frac{2E'}{\pi} - \frac{k^2}{\eta'}$, oder

$$\frac{u . d\eta'}{dv'} = \frac{\left(\frac{E'}{K'} - k^2\right) u}{\eta'},$$

und da der Formel (6.) gemäſs $\frac{\eta' du}{dv'} = \frac{\operatorname{el} u - k'^2 u}{\eta'}$ ist, so erhält man durch Addition

$$\frac{d(\eta' u)}{dv'} = \frac{\operatorname{el} u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u}{\eta'},$$

oder rückwärts

$$7. \quad \operatorname{el} u = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) . u + \eta' . \frac{d(\eta' u)}{dv'} \text{ für } \operatorname{amc} u = \text{const.}$$

Setzt man in dieser Gleichung $K-u$ statt $u$, so erhält man $\operatorname{elc} u = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)(K-u) + \eta' . \frac{d(v' - \eta' u)}{dv'} = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) K + \eta' - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u - \eta' . \frac{d(\eta' u)}{dv'}$, und da $1 - \frac{E}{K} - \frac{E'}{K'} = -\frac{\pi}{2KK'}$, also $\left(1 - \frac{E'}{K'}\right) K = E - \eta'$ ist, so erhält man

$$8. \quad \operatorname{elc} u = E - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u - \eta' . \frac{d(\eta' u)}{dv'} \text{ für } \operatorname{am} u = \text{const.}$$

## §. 222.

**Reihen für die Integrale $\int_0 - \mathrm{el}\,u . d\,\mathrm{amc}\,u$ und $\int_0 \mathrm{elc}\,u . d\,\mathrm{am}\,u$.**

Da nach §. 221. $\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K} . u - \eta . \frac{d(\eta u)}{dv}$, wenn $v = \eta K$ ist und $\mathrm{amc}\,u$ als constant angesehen wird, so ist auch

$$-\mathrm{el}\,u . d\,\mathrm{amc}\,u = -\frac{E}{K}\,u . d\,\mathrm{amc}\,u + \eta . \frac{d(\eta u) . d\,\mathrm{amc}\,u}{dv} \text{ und also}$$

$$\int_0^u - \mathrm{el}\,u . d\,\mathrm{amc}\,u = \frac{E}{\pi} . \int_0^u - u . d\,\mathrm{amc}\,u + \eta . \int_0^u d(\eta u) . \frac{d\,\mathrm{amc}\,u}{dv}, \text{ oder auch}$$

$$\int_0^u - \mathrm{el}\,u . d\,\mathrm{amc}\,u = \frac{2E}{\pi} . \int_0^u - \eta u . d\,\mathrm{amc}\,u + \eta . \int_0^u \frac{d(\eta u) . d\,\mathrm{amc}\,u}{dv}.$$

Das Integral $\int_0^u - \eta u . d\,\mathrm{amc}\,u$ wurde schon im §. 220. entwickelt; das Integral $\int_0^u \frac{d(\eta u) . d\,\mathrm{amc}\,u}{dv}$ aber kann auf zwei verschiedene Arten gefunden werden: man kann entweder $d(\eta u) . \mathrm{amc}\,u$ nach $u$ integriren und das Integral wieder in Beziehung auf $v$ so differenziiren, dafs $u$ und $\eta u$ als constant betrachtet werden, worauf man durch $dv$ dividirt, oder man kann auch zuerst das Differenzial-Verhältnifs $\frac{d\,\mathrm{amc}\,u}{dv}$ in der angegebenen Weise entwickeln, dieses dann mit $d(\eta u)$ multipliciren und integriren; beide Verfahrungs-Arten führen zu demselben Resultate.

Da $\mathrm{amc}\,u = \frac{1}{2}\pi - \eta u + \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2v} - \frac{1}{2} . \frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4u} + \frac{1}{3} . \frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6v} - \frac{1}{4} . \frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8v} + - \ldots$ ist, so ist

$$\frac{d\,\mathrm{amc}\,u}{dv} = -2 . \frac{\mathfrak{Tang}\,2v . \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2v} + 2 . \frac{\mathfrak{Tang}\,4v . \sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4v} - 2 . \frac{\mathfrak{Tang}\,6v . \sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6v} + - \ldots,$$

und also

$$\int_0^u \frac{d(\eta u) . d\,\mathrm{amc}\,u}{dv}$$

$$= -2 . \frac{\mathfrak{Tang}\,2v . \sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2v} + \frac{2}{2} . \frac{\mathfrak{Tang}\,4v . \sin^2 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4v} - \frac{2}{3} . \frac{\mathfrak{Tang}\,6v . \sin^2 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6v} + \ldots$$

Substituiren wir auch die zweite von den Reihen (5. §. 220.), so erhalten wir

$$1. \quad \int_0^u - \mathrm{el} . d\,\mathrm{amc}\,u =$$

$$\frac{2E}{\pi}\left\{(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u)\eta u - \frac{\eta^2 u^2}{2} + \frac{\sin^2 \eta u}{1 . \mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{\sin^2 2\eta u}{4 . \mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \frac{\sin^2 3\eta u}{9 . \mathfrak{Cos}\,6\eta K'} - \frac{\sin^2 4\eta u}{16 . \mathfrak{Cos}\,8\eta u} + - \ldots\right\}$$

$$- \frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}\,2\eta K' . \sin^2 \eta u}{1 . \mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}\,4\eta K' . \sin^2 2\eta u}{2 . \mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}\,6\eta K' . \sin^2 3\eta u}{3 . \mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}\,8\eta K' . \sin^2 4\eta u}{4 . \mathfrak{Cos}\,8\eta K'} - + \ldots$$

Diese Reihe hat einen hohen Grad der Convergenz, wenn der Modul $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist. Wir erhalten noch sogleich eine ähnliche Reihe, wenn wir $k'u$ statt $u$ und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls $k$ setzen; dadurch verwandelt sich el$u$ in $\frac{E-\operatorname{elc}u}{k'}$, also $E$ in $\frac{E}{k'}$ und $\eta$ in $\frac{\eta}{k'}$; daher erhalten wir

$$2.\quad \int_0^u (E-\operatorname{elc}u)\,d\operatorname{am}u$$

$$=\frac{2E}{\pi}\left(\eta u.\operatorname{am}u-\frac{\eta^2u^2}{2}-\frac{\sin^2\eta u}{1.\mathfrak{Cos}2\eta K}-\frac{\sin^2 2\eta u}{4.\mathfrak{Cos}4\eta K'}-\frac{\sin^2 3\eta u}{9.\mathfrak{Cos}6\eta K'}-\frac{\sin^2 4\eta u}{16.\mathfrak{Cos}8\eta u}-\dots\right)$$

$$+\frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}2\eta K'.\sin^2\eta u}{1.\mathfrak{Cos}2\eta K'}+\frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}4\eta K'.\sin^2 2\eta u}{2.\mathfrak{Cos}4\eta K'}+\frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}6\eta K'.\sin^2 3\eta u}{3.\mathfrak{Cos}6\eta K'}$$

$$+\frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}8\eta K'.\sin^2 4\eta u}{4.\mathfrak{Cos}8\eta K'}+\dots$$

Multipliciren wir die Gleichung (7. §. 221.) mit $-d\operatorname{amc}u$, so entsteht

$$\int_0^u -\operatorname{el}u.d\operatorname{amc}u=\left(1-\frac{E'}{K'}\right)\int_0^u -u.\,d\operatorname{amc}u+\eta'\int_0^u -\frac{d(\eta' u).d\operatorname{amc}u}{dv'}$$

oder

$$\int_0^u -\operatorname{el}u.d\operatorname{amc}u=\frac{2(K'-E')}{\pi}\int_0^u -\eta' u.d\operatorname{amc}u+\eta'\int_0^u -\frac{d(\eta' u).d\operatorname{amc}u}{dv'}.$$

Da nach §. 220.

$$\int_0^u d(\eta u)(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)=4.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,v'}-\frac{4}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3v'}+\frac{4}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5v'}-+\dots$$

ist, so ist

$$\int_0^u -\frac{d(\eta u).d\operatorname{amc}u}{du'}$$

$$=-4.\frac{\mathfrak{Cot}\,v'.\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,v'}+\frac{4}{3}.\frac{\mathfrak{Cot}\,3v'.\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3v'}-\frac{4}{5}.\frac{\mathfrak{Cot}\,5v'.\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5v'}+-\dots;$$

daher erhalten wir durch Zusammensetzung

$$3.\quad \int_0 -\operatorname{el}u.d\operatorname{amc}u=$$

$$\frac{2(K'-E')}{\pi}\left\{(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)\eta' u-\frac{4}{1^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}+\frac{4}{3^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}-\frac{4}{5^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}+-\dots\right\}$$

$$-4\eta'\frac{\mathfrak{Cot}\,\eta' K.\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}+\frac{4\eta'}{3}.\frac{\mathfrak{Cot}\,3\eta' K.\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}-\frac{4\eta'}{5}.\frac{\mathfrak{Cot}\,5\eta' K.\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}+-\dots$$

Der Formel (8. §. 221.) gemäfs ist $E-\operatorname{elc}u=\left(1-\frac{E'}{K'}\right)u+\eta'.\frac{d(\eta' u)}{dv'}$, also ist $\int_0^u (E-\operatorname{elc}u)\,d\operatorname{am}u=\left(1-\frac{E'}{K'}\right)\int_0^u u.d\operatorname{am}u+\eta'\int_0^u \frac{d(\eta' u).d\operatorname{am}u}{dv'}=$ $\frac{2(K'-E')}{\pi}\int_0^u \eta' u.\,d\operatorname{am}u+\eta'\int_0^u \frac{d(\eta' u)\,d\operatorname{am}u}{dv'}$. Da die Reihe (3. §. 220.) auch

also dargestellt werden kann:

$$\int_0^u d(\eta' u).\operatorname{am} u = \Phi(\eta' u) + \frac{4}{1^2}(\operatorname{Cot} v' - 1).\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\eta' u - \frac{4}{3^2}(\operatorname{Cot} 3v' - 1).\operatorname{Sin}^2 \tfrac{3}{2}\eta' u$$
$$+ \frac{4}{5^2}(\operatorname{Cot} 5v' - 1).\operatorname{Sin}^2 \tfrac{5}{2}\eta' u - + \ldots,$$

so hat man

$$\int_0^u \frac{d(\eta' u)\, d \operatorname{am} u}{d v'} = -\frac{4}{1}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin}^2 v'} + \frac{4}{3}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{3}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin}^2 3v'} - \frac{4}{5}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{5}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin}^2 5v'} + - \ldots,$$

und also

$$4. \quad \int_0^u (E - \operatorname{elc} u)\, d \operatorname{am} u =$$

$$\frac{2(K' - E')}{\pi}\Big\{\eta' u.\operatorname{am} u - \Phi(\eta' u) - \frac{4p}{1^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin} \eta' K} + \frac{4p^3}{3^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{3}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin} 3\eta' K} - \frac{4p^5}{5^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{5}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin} 5\eta' K} + - \ldots\Big\}$$
$$- \frac{4\eta'}{1}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin}^2 \eta' K} + \frac{4\eta'}{3}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{3}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin}^2 3\eta K'} - \frac{4\eta'}{5}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{5}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin}^2 5\eta K'} + \frac{4\eta'}{7}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{7}{2}\eta' u}{\operatorname{Sin}^2 7\eta' K} - + \ldots$$

Die Formeln (3. und 4.) convergiren rasch, wenn der Modul $k > \sin \frac{1}{4}\pi$ ist, und es hat $\Phi(\eta' u)$ dieselbe Bedeutung wie im §. 220.

**Anmerkung.** Im zehnten Bande des gegenwärtigen Journals ist in der Abhandlung: „Motus corporum coelestium in medio resistente auct. Dr. *Sohncke*" die Auflösung des erwähnten Problems auf die beiden Integrale $\int_0^u - u.d \operatorname{amc} u$ und $\int_0^u - \operatorname{el} u.d \operatorname{amc} u$ zurückgeführt. Die beiden Integrale sind am angeführten Orte in Reihen entwickelt worden, welche mit der zweiten von den Reihen (5. §. 220.) und mit der vorstehenden Reihe (1.) übereinstimmen. Aus Rücksicht auf das angeführte Problem sind hier die zu benutzenden Reihen in gröfserer Vollständigkeit entwickelt worden. Andere Reihen für dieselben Integrale sind am Schlusse des Zwei und zwanzigsten Abschnitts hergeleitet worden.

(Die Fortsetzung folgt.)

---

# 16.

# De integralibus quibusdam definitis, quorum summa ad quadraturam divisionemque circuli revocatur.

(Auct. *F. Richelot*, prof. math. in univ. Regiom.)

---

Integralia, de quibus sermo est, in eorum numero sunt, in quibus sub signo integrationis functio algebraica invenitur, ita ut ad genus functionum circularium, integralium ellipticorum, Abelianorumque pertineant. Limites integrationum tales sunt, pro quibus functio irrationalis sub signo integrationis evanescit, vel abit in infinitum. Quorum limitum numerus si duo est, integrale unum, definitum inde prodeuns, pendere a quadratura circuli, dummodo summa exponentium factorum linearium irrationalium numerus integer sit, ex elementis calculi integralis constat. Iam vero si numerus limitum par atque maior quam duo est, inveni, summam integralium definitorum, quae simili proprietate gaudent, non minus revocari posse ad quadraturam divisionemque circuli. Demonstrationes vero, quibus relationes has memorabiles invenis comprobatas, ut in principio in aequationibus nituntur, quas ex casu speciali theorematis notissimi Abeliani prodeuntes considerare licet, unde, lemmatibus nonnullis, quae in articulo I. exposui, advocatis, relationes illas, quibus integralia definita comparantur, deduxi. In articulis II. et III. exposui casum simplicissimum, ubi unum integrale determinatur, in ceteris summam integralium ad quadraturam circuli reductam invenis.

Similem theorematis Abeliani applicationem ad integralia indefinita invenis in articulis 6. et 7. commentationis celeberrimae „*De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis*" (vid. Diar. *Crell.* tom. XIII.), ubi auctor illustrissimus hanc relationem inter tria integralia derivat:

$$\int_0^{x_1} \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{x_2} \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{x_3} \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}}.$$

Ibi per $X$ denotatur functio:

$$x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)$$

atque $x_1$, $x_2$, $x_3$ sunt radices aequationis tertii ordinis ab una quantitate

pendentes, quae simul pro eodem huius quantitatis valore fiunt:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \infty, \qquad x_3 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Unde oritur relatio inter tria integralia definita. Similis aequatio, si ponitur,

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\varkappa_1^2 x) \ \ldots\ldots \ (1-\varkappa_{2n-4}^2 x)$$

inter $n$ integralia ibidem proponitur.

Expressiones, quibus in generaliori casu aggregata integralium formae a me adoptatae determinantur, pro limitibus similiter indefinitis, ac in exemplo modo allato, alia integralia indefinita continent, quae nonnisi per formulas valde compositàs determinari possunt. Quam ob rem hìc expressiones concinniores, quae pro limitibus definitis antea assignatis valent, solas derivare placuit.

I.

Antequam ad rem ipsam aggrediamur, nonnullas denotationes, lemmataque tria antemittere velimus, quibus in sequentibus utimur.

Primum per signum radicale:

$$\sqrt[n]{X},$$

si $X$ reali valore positivo gaudet, unum valorem positivum significabimus, atque per signum

$$X^{\frac{1}{n}},$$

si $X$ valore generaliori formae $A+Bi$ gaudet, expressionem hanc:

$$\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

ubi ex aequationibus

$$A = R\cos\theta, \qquad B = R\sin\theta,$$

quantitates $R$ et $\theta$ ita determinantur, ut illa positiva sit, et haec limites $-\pi \ldots\ldots 0$, vel $0$ et $+\pi$ haud superet. Deinde per signum:

$$X^{\frac{m}{n}}$$

designabitur expressio:

$$\sqrt[n]{R^m}\left(\cos\frac{m\theta}{n} + i\sin\frac{m\theta}{n}\right)$$

atque si $X_1$ valore formae $A_1+B_1 i$ gaudet, atque eodem modo ac antea, $R_1$ et $\theta_1$, determinantur ex aequationibus:

$$A_1 = R_1\cos\theta_1, \qquad B_1 = R_1\sin\theta_1,$$

per

$$X^{\frac{m}{n}} X_1^{\frac{m_1}{n_1}}$$

expressio haec

$$\sqrt[nn_1]{(R^{mn_1} R_1^{m_1 n})} \left(\cos \frac{m n_1 \theta + m_1 n \theta_1}{n n_1} + i \sin \frac{m n_1 \theta + m_1 n \theta_1}{n n_1}\right)$$

exprimetur.

Porro cum aliis geometris denotatione

$$[Fx]_{x^\lambda}$$

utamur, ut coefficiente potestatis $x^\lambda$ in evolutione ipsius $Fx$ secundum descendentes potestates argumenti $x$ progrediente, et denique per signum

$$\Sigma_1^\nu Fx$$

expressionem:

$$Fx_1 + Fx_2 + \ldots . + Fx_\nu,$$

aeque ac distinctius, si $F(x, b)$ functio duorum argumentorum est, per

$$\Sigma_1^{\nu}{}^h F(x_h, b)$$

expressionem:

$$F(x_1, b) + F(x_2, b) + \ldots . + F(x_\nu, b),$$

repraesentare placebit, ubi quantitates

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots . \quad x_\nu$$

dati alterius argumenti valores sunt.

Quibus positis habemus hoc notissimum

Lemma 1. hac aequatione expressum:

$$\left[\frac{fx}{(x-b)\varphi x}\right]_{x^{-1}} = \frac{fb}{\varphi b} + \Sigma_1^\nu \frac{fx}{(x-b)\varphi' x},$$

si $fx$ et $\varphi x$ sunt functiones rationales integrae, quarum haec ordinem aequat, et per

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots . \quad x_\nu$$

radices aequationis

$$\varphi x = 0,$$

nec non per $\varphi' x_1$ valor quotientis differentialis $\frac{\partial \varphi x}{\partial x}$ pro $x = x_1$, denotantur. Quod lemma ex aequatione identica de theoria fractionum rationalium derivata:

$$\frac{fx}{(x-b)\varphi x} = \frac{1}{(x-b)} \frac{fb}{\varphi b} + \Sigma_1^{\nu}{}^h \frac{1}{x - x_h} \frac{fx_h}{(x_h - b)\varphi' x_h}$$

sponte prodit.

Deinde e principiis calculi integralis emanat hoc

**Lemma 2.** Si functio $F(x, t)$, quae variabilem $t$ ab ipso $x$ non pendentem involvit, pro omnibus ipsius $t$ valoribus, haud extra limites $m_1$ et $m_2$ iacentibus, aeque ac integrale definitum

$$\int_{m_1}^{m_2} F(x, t)\partial t$$

in series secundum potestates descendentes argumenti $x$ progredientes evolvi potest, quae pro valoribus satis magnis ipsius $x$ convergunt, generaliter erit:

$$\int_{m_1}^{m_2} [(F(x,t)]_{x^{-\lambda}}\partial t = \left[\int_{m_1}^{m_2} F(x,t)\partial t\right]_{x^{-\lambda}}.$$

Similiter ex theoria serierum sponte prodit hoc

**Lemma 3.** Si functio $F(x, t+h)$ pro valore $t = b$ in seriem Taylorianam, nec non functio $F(x, t)$ simul cum ipsius differentialibus secundum $t$, pro eodem valore $t = b$ in series secundum potestates ipsius $x$ descendentes progredientes evolvi possunt, quae pro valoribus satis magnis ipsius $x$ convergunt, erit:

$$\frac{\partial^{\kappa}[Fx, b]_{x^{-\lambda}}}{\partial b^{\kappa}} = \left[\frac{\partial^{\kappa} F(x, b)}{\partial b^{\kappa}}\right]_{x^{-\lambda}},$$

ubi generaliter per $\frac{\partial^{\kappa} F(x, b)}{\partial b^{\kappa}}$ exprimitur valor quotientis differentialis ordinis $\kappa$, secundum $t$, pro valore $t = b$.

## II.

Initium facere placet cum integralibus, quae functionem

$$\sqrt{((a_1 - x)(x - a_2))}$$

involvunt. Quae integralia, quamquam indefinite secundum regulas notissimas calculi integralis determinantur, tamen credo, ipsorum expressiones generales, ex theoria sequenti prodeuntes, attentione Geometrarum haud prorsus indignas esse. Hic vero nonnisi casum, si limites integrationis $a_1$ et $a_2$ sunt, exponere velimus.

Ponamus quantitatem $a_1 - a_2$ esse positivam, atque statuamus aequationem hanc:

$$1.\quad x - a_1 + t^2(x - a_2) = 0,$$

cuius radicem $x$ ut functionem variabilis $t$ spectare placet. Dum quantitas $t$ reali valore quolibet gaudet, terminus prior aequationis (1.) pro $x = a_2$, negativo, atque pro $x = a_1$, positivo valore induit; ergo eius radix $x$,

dum $t$ realis manet, continetur in intervallo $a_2 - a_1$. Adeoque ex formula inde prodeunte:

$$t^2 = \frac{a_1 - x}{x - a_2}$$

differentiata, sequitur:

$$\frac{\partial (t^2)}{\partial x} = -\frac{(a_1 - a_2)}{(x - a_2)^2};$$

quae expressio, cum semper negativo valore gaudeat, docet, radicem $x$, dum variabilis $t$ ab 0 usque ad infinitum continuo progreditur, ipsam ab $a_1$ usque ad $a_2$ continuo decrescere. Inde ex aequat. (1.), denotatione in articulo I. adhibita, variabilique $t$ ut positiva assumta, derivatur haec formula:

$$2. \quad \sqrt{((a_1 - x)(x - a_2))} = t(x - a_2).$$

Loco aequationis (1.) introducamus brevitatis gratia hanc:

$$\varphi(x, t) = 0,$$

qua differentiata habebimus:

$$3. \quad \varphi' x \, \partial x = -\varphi' t \, \partial t,$$

ubi brevitatis gratia ponitur

$$4. \quad 1 + t^2 = \varphi' x,$$

$$5. \quad 2t(x - a_2) = \varphi' t.$$

Aequationis (3.), priorem terminum, per expressionem:

$$\frac{fx}{(x-b)} \frac{1}{\sqrt{((a_1 - x)(x - a_2))}} \frac{1}{\varphi' x},$$

atque posteriorem, per quantitatum huic identicam:

$$\frac{fx}{(x-b)} \frac{2}{\varphi' x \, . \, \varphi' t}$$

multiplicemus, ubi $fx$ quaelibet functio rationalis integra ipsius $x$ est, atque $b$ quantitas quaelibet quae, si reali valore gaudet, maior quam $a_1$ vel minor quam $a_2$ assumitur. Quo facto habebimus hanc aequationem:

$$6. \quad \frac{fx \, \partial x}{(x-b)\sqrt{((a_1 - x)(x - a_2))}} = -\frac{2fx}{x-b} \frac{dt}{\varphi' x}.$$

Iam vero ex lemmate primo sequitur fore:

$$7. \quad \frac{fx}{(x_1 - b)\varphi' x_1} = \left[\frac{fx}{(x-b)\varphi(x,t)}\right]_{x^{-1}} - \frac{fb}{\varphi(b,t)},$$

si $x_1$ est radix aeqationis

$$\varphi(x, t) = 0.$$

Quae radix in altero termino aequationis (6.) per $x$ designata est, unde fit per substitutionem formulae (7.):

$$8. \quad \frac{fx \, \partial x}{(x-b)\sqrt{((a_1 - x)(x - a_2))}} = -2\partial t \left[\frac{fx}{(x-b)\varphi(x,t)}\right]_{x^{-1}} + \frac{2fb \, \partial t}{\varphi(b,t)}.$$

Huius aequationis differentialis integrationem faciamus, in altero termino ab $x=a_2$ usque ad $x=a_1$, atque in altero, ab $t=\infty$ usque ad $t=0$, nec non adhibeamus hic lemma secundum, quod suppeditat formulam:

$$\int_{\infty}^{0} -2\,\partial t \left[\frac{fx}{(x-b)\varphi(x,t)}\right]_{x^{-1}} = \left[-\int_{\infty}^{0} \frac{2fx\,\partial t}{(x-b)\varphi(x,t)}\right]_{x^{-1}},$$

quae, quia functio $fx$ variabilem $t$ non involvit, abit in hanc:

$$= \left[\frac{2fx}{(x-b)} \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(x-a_1)+t^2(x-a_2)}\right]_{x^{-1}}.$$

Quibus collectis habebimus hanc aequationem:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{fx\,\partial x}{(x-b)\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}}$$

$$= \left[\frac{2fx}{x-b} \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{\partial t}{(x-a_1)+t^2(x-a_2)}\right]_{x^{-1}} - \int_{0}^{\infty} \frac{2fb\,\partial t}{(b-a_1)+t^2(b-a_2)},$$

unde prodit integratione peracta, aequatio haec:

$$9. \quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{fx\,\partial x}{(x-b)\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}}$$

$$= \pi\left[\frac{fx}{(x-b)\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}} - \pi\,\frac{fb}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

ubi in ultimo termino denotatione art. I. usi sumus. Si quantitas $b$ realis est, atque differentia $b-a_1$ positiva, erit

$$\frac{1}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{((b-a_1)(b-a_2))}};$$

si vero $b-a_2$ negativa est quantitas, eadem expressio fit:

$$\frac{1}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{((a_1-b)(a_2-b))}}.$$

Si generaliter $b$ forma $m+ni$ gaudet, sit:

$$b-a_1 = (m-a_1)+ni = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$b-a_2 = (m-a_2)+ni = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

ubi arcus $\theta_1$ et $\theta_2$ simul aut positivi aut negativi limitis $\pi$ aut $-\pi$ superare non debeant. Habebimus ex articulo I.:

$$\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + \sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right),$$

quia differentia $\theta_1-\theta_2$ limites $\pi$ aut $-\pi$ superare nequit, unde fit:

$$\frac{1}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(r_1 r_2)}}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right),$$

quae expressio cum valore formulae:

$$\frac{1}{(b-a_1)^{\frac{1}{2}}(b-a_2)^{\frac{1}{2}}},$$

coïncidit.

Quibus collectis eruitur hoc primum theorema:

„Si $fx$ designat functionem integram ipsius $x$ rationalem, atque $a_1$ et $a_2$ „sunt quantitates reales, $b$ vero quantitas aut imaginaria, aut realis talis, „ut aut $b-a_1$ aut $a_2-b$ positivum sit, valor integralis definiti

$$10.\quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{fx\,\partial x}{(x-b)\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}},$$

„ad quadraturam circuli per hanc expressionem reducitur:

$$10.\quad = \pi\left[\frac{fx}{(x-b)\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}} - \pi\frac{fb}{(b-a_1)^{\frac{1}{2}}(b-a_2)^{\frac{1}{2}}}$$

„ubi denotationes articuli I. adhibentur."

Corollarium 1. Si ponitur $fx=(x-b)Fx$, erit:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}} = \pi\left[\frac{Fx}{\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}}$$

unde si $a_1=1$, $a_2=-1$ ponitur, emanat hic valor integralis definiti notissimi:

$$\int_0^{\pi} F(\cos\varphi)\,\partial\varphi = \pi\left[\frac{Fx}{\sqrt{(x^2-1)}}\right]_{x^{-1}}.$$

Corollarium 2. Si in aequatione utrumque terminum ut functionem ipsius $b$ spectamus, atque $(m-1)$ differentiationes secundum $b$ facimus, obtinemus, lemmate 3. adhibito:

$$11.\quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{fx\,\partial x}{(x-b)^m\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}} = \pi\left[\frac{fx}{(x-b)^m\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}} - \frac{\pi}{1.2\ldots.m-1}\,\frac{\partial^{m-1}\dfrac{fb}{(b-a_1)^{\frac{1}{2}}(b-a_2)^{\frac{1}{2}}}}{\partial b^{m-1}}.$$

Ponamus in aequatione (10.) ex ordine:

$$\frac{\psi x}{F'b_1} = fx, \quad \text{et} \quad b = b_1,$$

$$\frac{\psi x}{F'b_2} = fx, \quad \text{et} \quad b = b_2,$$

etc.

$$\frac{\psi x}{F'b_\nu} = fx, \quad \text{et} \quad b = b_\nu,$$

ubi $\psi x$ functio integra ipsius $x$ est, nec non

$$Fx = (x-b_1)(x-b_2)\ \ldots.\ (x-b_\nu),$$

ponitur, atque aequationes inde oriuntes per additionem coniungamus, quo

facto, cum sit

$$\frac{\psi x}{Fx} = \frac{\psi x}{(x-b_1)F'h_1} + \frac{\psi x}{(x-b_2)F'h_2} + \text{etc.} \frac{\psi x}{(x-b_\nu)F'h_\nu},$$

oritur haec aequatio:

$$12.\quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{\psi x\,\partial x}{Fx\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}}$$

$$= \pi\left[\frac{\psi x}{Fx\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}} - \pi \Sigma_1^\nu \frac{\psi b}{F'b(b-a_1)^{\frac{1}{2}}(b-a_2)^{\frac{1}{2}}},$$

ubi signum summatorium in articulo I. introductum adhibetur. Rursus animadvertendum erit, si quantitas $b_1$, exempli gratia, realis fuerit, terminum ipsi $b_1$ correspondentem summae fore,

$$\text{vel} \quad -\pi\left(\frac{\psi h_1}{F'h_1\sqrt{((h_1-a_1)(h_1-a_2))}}\right)$$

$$\text{vel} \quad +\pi\left(\frac{\psi h_1}{F'h_1\sqrt{((a_1-h_1)(a_2-h_1))}}\right),$$

prout differentia $b_1-a_1$ vel differentia $a_2-b_1$ positiva est. Id quod ex denotationibus art. I. sponte prodit. Eodem modo ex aequatione (12.) similem generaliorem deducere licet.

Ponamus enim, si functio $Fx$ factorem $(x-b_1)^{m_1}$ continet:

$$13.\quad Fx = \frac{(x-b_1)^{m_1}}{\Pi_1 x},$$

atque in formula (11.) substituamus loco ipsius $fx$ expressionem

$$\psi x\left[\Pi_1 b_1 + \frac{x-b_1}{1}\Pi_1' b_1 + \frac{(x-b_1)^2}{1.2}\Pi_1'' b_1 + \text{etc.} \frac{(x-b_1)^{m_1-1}}{1.2\,\ldots\, m_1-1}\Pi_1^{m_1-1} b_1\right],$$

ubi $\psi x$ functio quaelibet integra est; quae expressio cum hac coïncidit:

$$(x-b_1)^m \cdot \frac{\partial^{m-1}\left(\frac{\Pi_1 b_1}{x-b_1}\right)}{1.2\,\ldots\, m-1\,\partial b_1^{m-1}}\psi x.$$

Qua substitutione facta, positoque

$$b = b_1, \qquad m = m_1,$$

cum sit $fb_1 = \psi b_1 . \Pi_1 b_1$, habebimus hanc aequationem:

$$14.\quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{\psi x}{\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}} \frac{\partial^{m_1-1}\left(\frac{\Pi_1 b_1}{x-b_1}\right)}{1.2\ldots m_1-1\,\partial b_1^{m_1-1}}$$

$$= \pi\left(\frac{\psi x}{\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}} \frac{\partial^{m_1-1}\left(\frac{\Pi_1 b_1}{x-b_1}\right)}{1.2\ldots m_1-1\,\partial b_1^{m_1-1}}\right)_{x^{-1}}$$

$$- \frac{\pi}{1.2\ldots m_1-1} \frac{\partial^{m_1-1}\frac{\Pi_1 b_1\,\psi b_1}{(b_1-a_1)^{\frac{1}{2}}(b_1-a_2)^{\frac{1}{2}}}}{\partial b_1^{m_1-1}}.$$

Si igitur functio $Fx$ ex factoribus his

$$15.\quad (x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\dots\dots(x-b_\nu)^{m_\nu}$$

componitur, similiter introducamus functiones

$$\Pi_1 x,\ \Pi_2 x,\ \dots\dots\ \Pi_\nu x,$$

per has aequationes;

$$16.\quad Fx = \frac{(x-b_1)^{m_1}}{\Pi_1 x} = \frac{(x-b_2)^{m_2}}{\Pi_2 x} = \dots\dots = \frac{(x-b_\nu)^{m_\nu}}{\Pi_\nu x},$$

atque ex aequatione (14.) indices quantitatum

$$\Pi,\qquad b,\qquad m$$

augendo, $\nu-1$ similes aequationes derivemus; quibus $\nu$ aequationibus additis, advocataque aequatione hac identica:

$$\frac{1}{Fx} = \frac{\partial^{m_1-1}\frac{\Pi_1 b_1}{x-b_1}}{1.2\dots.(m_1-1)\partial b_1^{m_1-1}} + \frac{\partial^{m_2-1}\frac{\Pi_2 b_2}{x-b_2}}{1.2\dots.(m_2-1)\partial b_2^{m_2-1}} + \text{etc.} + \frac{\partial^{m_\nu-1}\frac{\Pi_\nu b_\nu}{x-b_\nu}}{1.2\dots.(m_\nu-1)\partial b_\nu^{m_\nu-1}},$$

si signum summatorium articuli I. adhibemus, pervenimus ad hanc denique aequationem memorabilem:

$$17.\quad \int_{a_2}^{a_1}\frac{\psi x}{Fx}\,\frac{\partial x}{\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}}$$

$$= \pi\left[\frac{\psi x}{Fx}\,\frac{1}{\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}} - \pi\sum_1^\nu{}_h\left(\frac{\partial^{m_h-1}\frac{\psi b_h\,\Pi_h b_h}{(b_h-a_1)^{\frac12}(b_h-a_2)^{\frac12}}}{1.2\dots.(m_h-1)\partial b_h^{m_h-1}}\right).$$

Unde prodit hoc secundum theorema generale.

„Si $\psi x$ et $Fx$ sunt quaelibet functiones rationales integrae, quarum „posterior forma

$$(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\dots\dots(x-b_\nu)^{m_\nu}$$

„gaudet, ubi quantitates $b$ quovis valore reali, extra intervallo $a_2-a_1$ ia- „cente, vel quolibet valore imaginario gaudent, integrale definitum:

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{\psi x}{Fx}\,\frac{\partial x}{\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}}$$

„per aequationum (17.) ad quadraturam circuli reducitur."

Corollarium 1. Si secundum denotationem ab illustrissimo *Cauchy* introductam (vid. *Exercices de mathematiques tom I. pag. 11*) residuum functionis cuiuslibet $\Pi z$, quod radici aequationis

$$\frac{1}{\Pi z} = 0$$

$z_1$, adhuc $(m-1)$ radices ipsi $z_1$ aequales secum ferentis, respondet, voca-

mus valorem expressionis

$$\frac{1}{1.2\ldots.m-1}\,\frac{\partial^{m-1}(\varepsilon^m\Pi(z_1+\varepsilon))}{\partial\varepsilon^{m-1}}$$

pro valore ipsius $\varepsilon$ infinite parvo, sive posito

$$\Pi z=\frac{p_z}{(z-z_1)^m},$$

valorem expressionis

$$\frac{\partial^{m-1}p_z}{1.2\ldots.m-1\,\partial z^{m-1}}$$

pro $z=z_1$, idque designamus per hoc signum:

$$E\frac{\Pi z(z-z_1)^m}{((z-z_1)^m)},$$

sive per hoc:

$$E\frac{p_z}{(((z-z_1)^m))};$$

si denique summam omnium residuorum functionis

$$\frac{\psi x}{Fx},$$

quae radicibus aequationis $Fx=0$ correspondent, denotamus per signum

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{}}E_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi x}{((Fx))},$$

habebimus hanc aequationem identicam:

$$18.\quad \sum_1^{\nu}{}_h\,\frac{\partial^{m_h-1}\dfrac{\psi b_h\,\Pi_h b_h}{(b_h-a_1)^{\frac{1}{2}}(b_h-a_2)^{\frac{1}{2}}}}{1.2\ldots.(m_h-1)\,\partial b_h^{m_h-1}}=\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{}}E_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi x}{((Fx))\,(x-a_1)^{\frac{1}{2}}(x-a_2)^{\frac{1}{2}}},$$

ita ut theorema secundum hoc fiat:

„Integralis definiti

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_2}^{a_1}\frac{\psi x\,\partial x}{Fx\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}}$$

„valor est differentia inter coefficientem ipsius $\frac{1}{x}$ in evolutione functionis

$$\frac{\psi x}{Fx\,(x-a_1)^{\frac{1}{2}}\,(x-a_2)^{\frac{1}{2}}}$$

„secundum potestates descendentes ipsius $x$ progrediente, atque summam resi-„duorum eiusdem functionis quae radicibus aequationis $Fx=0$ correspondent."

**Corollarium 2.** Si in hoc theoremate ponimus:

$$x=\cos\varphi,\qquad a_2=-1,\qquad a_1=1,$$

oritur haec aequatio

$$19.\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(\cos\varphi)}{F(\cos\varphi)}\partial\varphi=\left[\frac{\psi x}{Fx}\,\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}\right]_{x^{-1}}-\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{}}E_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi x}{((Fx))}\,\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Illustrissimus *Cauchy* in libro celeberrimo *Exercices de mathematiques pag.* 224 eiusdem integralis definiti valorem in iis casibus, ubi ordo functionis $\psi x$ ordinem ipsius $Fx$ haud superat, per hanc expressionem ex notissima theoria residuorum prodeuntem, repraesentat:

$$20.\quad \frac{\psi\infty}{F\infty} + \underset{(0)}{\overset{(1)}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(+\pi)} \frac{\psi\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)}{t\left(\left(F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\right)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(\cos\varphi)}{F(\cos\varphi)}\partial\varphi.$$

In illa theoria vero generaliter per

$$\underset{(0)}{\overset{(1)}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(+\pi)}((\Pi t))Ft$$

summa residuorum functionis $(\Pi t).(Ft)$ exprimitur, talibus valoribus formulae

$$r(\cos p + i\sin p)$$

correspondentium, qui dum $r$ inter limites 0 et 1, et angulus $p$ inter limites $-\pi$ et $+\pi$ quolibet valore gaudent, aequationis

$$\frac{1}{\Pi t} = 0$$

radices sunt adiecto dimidio residuorum eiusdem producti, quae vel pro $r=1$, vel pro $p=-\pi$, vel pro $p=+\pi$ oriuntur.

Et adeo ex formula (91.) pag. 217 eiusdem libri

$$21.\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{fe^{pi}+fe^{-pi}}{2}\partial p = \mathcal{E}\frac{ft}{((t))} + \underset{(0)}{\overset{(1)}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(+\pi)}\left(\left(\frac{ft}{t}\right)\right)$$

generaliorem formulam, quam (20.) derivare licet. Ponamus enim in formula (21.):

$$ft = \frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)},$$

quo facto post faciles reductiones oritur haec aequatio:

$$22.\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(\cos p)}{F\cos p}\partial p = \mathcal{E}\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{((t))F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} + \underset{(0)}{\overset{(1)}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(+\pi)}\left(\left(\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{tF\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\right)\right),$$

Quae nova eiusdem integralis definiti expressio cum ex fonte prorsus diverso originem trahat, utramque formulam (19.) et (22.) inter se comparare velimus.

Secundum definitionem residuorum, expressio

$$E\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{((t))F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}$$

redit ad coefficientem potestatis $t^0$ in evolutione functionis

$$\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}$$

secundum aut ascendentes aut descendentes ipsius $t$ potestates progrediente; itaque erit:

$$E\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{((t))F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \left(\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\right)_{t^0}.$$

Iam vero habetur hoc

Theorema 3. Si $\psi x$ est functio integra, nec non $\frac{1}{Fx}$ functio quaelibet in descendentes integras ipsius $x$ potestates evolubilis, erit:

$$23.\quad \left[\frac{\psi x}{Fx}\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}\right]_{x^0} = \left(\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\right)_{t^0}.$$

Demonstratio. Sit:

$$\frac{\psi x}{Fx} = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \text{etc.} + B_n + B_{n+1}x^{-1} + \text{etc.}$$

$$x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = 1 + b_1x^{-2} + b_2x^{-4} + \text{etc.}$$

Iam erit:

$$24.\quad \left[\frac{\psi x}{Fx}\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}\right]_{x^0} = B_n + b_1B_{n-2} + b_2B_{n-4} + \text{etc.} + b_{\frac{1}{2}n}B_0,$$

$$\text{vel:} \quad = B_n + b_1B_{n-2} + b_2B_{n-4} + \text{etc.} + b_{\frac{1}{2}(n-1)}B_1,$$

prout numerus $n$ par vel impar est.

Eodem modo erit:

$$25.\quad \left(\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\right)_{t^0} = \left[\frac{B_0}{2^n}\left(t+\frac{1}{t}\right)^n + \frac{B_1}{2^{n-1}}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{n-1} + \text{etc.} + \frac{B_n}{1}\right]_{t^0},$$

quia expressio

$$\left[2B_{n+1}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)^{-1} + 2^2B_{n+2}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{-2} + \text{etc.}\right]_{t^0},$$

evanescit. Habemus vero generaliter:

$$26.\quad \begin{cases} \left[\frac{1}{2^{2\varkappa}}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{2\varkappa}\right]_{t^0} = \frac{2\varkappa.2\varkappa-1\ldots.\varkappa+1}{2^{2\varkappa}.1.2\ldots.\varkappa} = b_\varkappa, \\ \left[\frac{1}{2^{2\varkappa-1}}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{2\varkappa-1}\right]_{t^0} = 0, \end{cases}$$

si $\varkappa$ numerus integer positivus est. Quibus aequationibus in aequatione (25.) adhibitis, oriuntur hae:

$$27.\quad \frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = B_n + b_1 B_{n-2} + \text{etc.} + b_{\frac{1}{2}n} B_0,$$

$$\text{vel} \quad = B_n + b_1 B_{n-2} + \text{etc.} + b_{\frac{1}{2}(n-1)} B_0,$$

prout numerus $n$ par vel impar est. Q. e. d.

Hinc prodit, priores binos terminos expressionum (19.) et (22.) inter se esse aequales.

Iam vero transeamus ad binorum ultimorum aequat. (19.) et (22.) terminorum comparationem. Quo facto videmus demonstrandam esse hanc aequationem:

$$28.\quad -\,{}^{+\infty}_{-\infty}E^{+\infty}_{-\infty}\frac{\psi x}{((Fx))(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} = {}^{(1)}_{(0)}E^{(+\pi)}_{(-\pi)}\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(\left(F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\right).t}.$$

Erit enim ex definitione generali signi

$${}^{(1)}_{(0)}E^{(+\pi)}_{(-\pi)}((\Pi t))\,Ft,$$

$${}^{(1)}_{(0)}E^{(+\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{tF\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\right)\right) = {}^{(1)}_{(0)}E^{(+\pi)}_{(-\pi)}\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(\left(F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\right).t},$$

quia factores

$$\frac{\psi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t}$$

in infinitum abire nequeunt, nisi pro $t=0$, qui valor ipsius radicis in definitione excluditur. In memoriam revocare etiam placet, aequationem:

$$Fx = 0,$$

reali radice gaudere non posse, quae non extra intervallum $-1 \ldots. +1$ iacet; unde fluit aequationem

$$F\tfrac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) = 0,$$

radice imaginaria formae

$$r(\cos p + i\sin p)$$

gaudere non posse, ubi $r=1$ est.

Huius aequationis differentialis integrationem faciamus, in altero termino ab $x = a_2$ usque ad $x = a_1$, atque in altero, ab $t = \infty$ usque ad $t = 0$, nec non adhibeamus hic lemma secundum, quod suppeditat formulam:

$$\int_{\infty}^{0} -2\,\partial t \left[\frac{fx}{(x-b)\varphi(x,t)}\right]_{x^{-1}} = \left[-\int_{\infty}^{0} \frac{2fx\,\partial t}{(x-b)\varphi(x,t)}\right]_{x^{-1}},$$

quae, quia functio $fx$ variabilem $t$ non involvit, abit in hanc:

$$= \left[\frac{2fx}{(x-b)} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x-a_1)+t^2(x-a_2)}\right]_{x^{-1}}.$$

Quibus collectis habebimus hanc aequationem:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{fx\,\partial x}{(x-b)\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}}$$

$$= \left[\frac{2fx}{x-b} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\partial t}{(x-a_1)+t^2(x-a_2)}\right]_{x^{-1}} - \int_0^{\infty} \frac{2fb\,\partial t}{(b-a_1)+t^2(b-a_2)},$$

unde prodit integratione peracta, aequatio haec:

$$9. \quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{fx\,\partial x}{(x-b)\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}}$$

$$= \pi\left[\frac{fx}{(x-b)\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}} - \pi\,\frac{fb}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

ubi in ultimo termino denotatione art. I. usi sumus. Si quantitas $b$ realis est, atque differentia $b-a_1$ positiva, erit

$$\frac{1}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{((b-a_1)(b-a_2))}};$$

si vero $b-a_2$ negativa est quantitas, eadem expressio fit:

$$\frac{1}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{((a_1-b)(a_2-b))}}.$$

Si generaliter $b$ forma $m+ni$ gaudet, sit:

$$b-a_1 = (m-a_1)+ni = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

$$b-a_2 = (m-a_2)+ni = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

ubi arcus $\theta_1$ et $\theta_2$ simul aut positivi aut negativi limitis $\pi$ aut $-\pi$ superare non debeant. Habebimus ex articulo I.:

$$\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + \sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right),$$

quia differentia $\theta_1-\theta_2$ limites $\pi$ aut $-\pi$ superare nequit, unde fit:

$$\frac{1}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(r_1 r_2)}}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right),$$

quae expressio cum valore formulae:

$$\frac{1}{(b-a_1)^{\frac{1}{2}}(b-a_2)^{\frac{1}{2}}},$$

coïncidit.

Quibus collectis eruitur hoc primum theorema:

„Si $fx$ designat functionem integram ipsius $x$ rationalem, atque $a_1$ et $a_2$ „sunt quantitates reales, $b$ vero quantitas aut imaginaria, aut realis talis, „ut aut $b-a_1$ aut $a_2-b$ positivum sit, valor integralis definiti

$$10.\quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{fx\,\partial x}{(x-b)\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}},$$

„ad quadraturam circuli per hanc expressionem reducitur:

$$10.\quad = \pi\left[\frac{fx}{(x-b)\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}} - \pi\frac{fb}{(b-a_1)^{\frac{1}{2}}(b-a_2)^{\frac{1}{2}}}$$

„ubi denotationes articuli I. adhibentur."

Corollarium 1. Si ponitur $fx=(x-b)Fx$, erit:

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}} = \pi\left[\frac{Fx}{\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}}$$

unde si $a_1=1$, $a_2=-1$ ponitur, emanat hic valor integralis definiti notissimi:

$$\int_0^\pi F(\cos\varphi)\,\partial\varphi = \pi\left[\frac{Fx}{\sqrt{(x^2-1)}}\right]_{x^{-1}}.$$

Corollarium 2. Si in aequatione utrumque terminum ut functionem ipsius $b$ spectamus, atque $(m-1)$ differentiationes secundum $b$ facimus, obtinemus, lemmate 3. adhibito:

$$11.\quad \int_{a_2}^{a_1}\frac{fx\,\partial x}{(x-b)^m\sqrt{((a_1-x)(x-a_2))}} = \pi\left[\frac{fx}{(x-b)^m\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^{-1}}$$
$$-\frac{\pi}{1.2\ldots.m-1}\;\frac{\partial^{m-1}\dfrac{fb}{(b-a_1)^{\frac{1}{2}}(b-a_2)^{\frac{1}{2}}}}{\partial b^{m-1}}.$$

Ponamus in aequatione (10.) ex ordine:

$$\frac{\psi x}{F'b_1}=fx,\quad\text{et}\quad b=b_1,$$
$$\frac{\psi x}{F'b_2}=fx,\quad\text{et}\quad b=b_2,$$
etc.
$$\frac{\psi x}{F'b_\nu}=fx,\quad\text{et}\quad b=b_\nu,$$

ubi $\psi x$ functio integra ipsius $x$ est, nec non

$$Fx=(x-b_1)(x-b_2)\ldots.(x-b_\nu),$$

ponitur, atque aequationes inde oriuntes per additionem coniungamus, quo

theoria residuorum emanat fore:

$$34. \quad \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{}} E^{+\infty}_{-\infty} \frac{\psi x}{((Fx))(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} = \overset{(1)}{\underset{(0)}{}} E^{(+\pi)}_{(-\pi)} \frac{\psi \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(\left(F\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\right).t}.$$

Q. e. i.

Formulis (23.) et (34.) adhibitis, sponte prodit utramque expressionem (19.) et (22.) eandem esse. Similiter vero per formulam generaliorem

$$\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)t = x-\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)-(x-a_1)^{\frac{1}{2}}(x-a_2)^{\frac{1}{2}},$$

quae aequatione

$$x = \tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

correspondet, residuum integrale:

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{}} E^{+\infty}_{-\infty} \frac{\psi x}{((Fx))} \frac{1}{(x-a_1)^{\frac{1}{2}}(x-a_2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Transformare licuisset in residuum integrale functionis rationalis

$$-\overset{(1)}{\underset{(0)}{}} E^{(+\pi)}_{(-\pi)} \frac{\psi\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)}{t\left(\left(F\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\right)\right)}.$$

Adiicere adhuc placet, fore:

$$35. \quad \left[\frac{\psi x}{Fx}\frac{x}{\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^0} = \left(\frac{\psi\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)}{F\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)}\right)_{t^0},$$

quae aequatio generalior est, quam in theoremate 3. expressa, atque cum hac ipsa etiam formulae (29.) ope directe demonstratur. Ex theoria residuorum enim sequitur fore:

$$36. \quad \left[\frac{\psi x}{Fx}\frac{x}{\sqrt{((x-a_1)(x-a_2))}}\right]_{x^0} = E\frac{\psi\frac{1}{z}}{((z^2))\,F\frac{1}{z}}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{z}-a_1\right)\left(\frac{1}{z}-a_2\right)\right)}},$$

atque

$$37. \quad \left(\frac{\psi\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)}{F\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)}\right)_{t^0} = E\frac{\psi\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)}{((t))\,F\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)}.$$

Posito vero

$$38. \quad \frac{1}{z} = \tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

atque, ut variabiles $z$ et $t$ simul evanescant,

$$39.\quad \tfrac{1}{2}(a_1-a_2)t = \frac{1}{z}-\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)-\sqrt{\left(\left(\frac{1}{z}-a_1\right)\left(\frac{1}{z}-a_2\right)\right)},$$

fit:

$$40.\quad \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{z}-a_1\right)\left(\frac{1}{z}-a_2\right)\right)}} = -\frac{4}{(a_1-a_2)}\,\frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)},$$

$$\text{atque}\quad 41.\quad \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{a_1-a_2}{4z^2t}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

Iam vero ex formula (29.), quae etiam ad hunc casum extendi potest, derivatur haec:

$$E\frac{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))F\frac{1}{z}}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{z}-a_1\right)\left(\frac{1}{z}-a_2\right)\right)}} = E\frac{t\psi\left(\frac{1}{\chi t}\right).\chi' t}{((t))(\chi t)^2F\left(\frac{1}{\chi t}\right)}.\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{\chi t}-a_1\right)\left(\frac{1}{\chi t}-a_2\right)\right)}},$$

si ponitur

$$z = \chi t = \frac{1}{\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\tfrac{1}{4}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)},$$

in qua aequatione substitutionibus ex aequat. (40. et 41.) factis, habebimus

$$E\frac{\psi\frac{1}{z}}{((z^2))F\frac{1}{z}}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{z}-a_1\right)\left(\frac{1}{z}-a_2\right)\right)}} = E\frac{\psi\left[\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\tfrac{1}{4}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{((t))\,F\left[\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\tfrac{1}{4}(a_1-a_2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}.$$

Q. e. d.

Fortasse Geometris hae applicationes theoriae residuorum haud displicebunt. Iam vero hac longa digressione finita, ad generaliores applicationes principii in art. II. adhibiti aggrediamur, quae ad integralia functionem irrationalem

$$\sqrt[n]{\left(\left(\frac{a_1-x}{x-a_2}\right)^m\right)}$$

involventia determinanda ducunt.

## III.

Ponamus ut aequationem fundamentalem hanc:

$$(x-a_1)+t^n(x-a_2) = 0,$$

ubi $n$ est numerus integer positivus quilibet. Iam vero eodem modo, quo in art. II. usi sumus, demonstratur, variabilem $t$, dum radix huius aequationis $x$, ut variabilis tractata, ab $a_2$ usque ad $a_1$ continuo crescat, ipsam ab $\infty$ usque

ad 0 continuo decrescere. Si igitur talem radicem inter $a_2$ et $a_1$ iacentem per $x$ ipsum denotemus, et per $m$ quantitatem positivam numero $n$ minorem, erit:

$$42. \quad t^m = \sqrt[n]{\left(\left(\frac{a_1-x}{x-a_2}\right)^m\right)},$$

ubi per $t^m$ et $\left(\frac{a_1-x}{x-a_2}\right)^m$, si $m$ est numerus non integer vel adeo irrationalis semper valorem unum positivum denotare velimus.

Brevitatis gratia posito:

$$x-a_1+t^n(x-a_2) = \varphi(x,t)$$

nanciscimur, si $fx$ et $b$ eodem modo ac in art. II. definiuntur, hanc aequationem:

$$\frac{fx\,\partial x}{(x-b)(a_1-x)}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{a_1-x}{x-a_2}\right)^m\right)} = \frac{-nt^{m-1}fx\,\partial x}{(x-b)\varphi' x},$$

unde per similes transformationes, utriusque prioris lemmatis ope, integrationeque facta, haec oritur:

$$43. \quad \int_{a_2}^{a_1}\frac{fx\,\partial x}{(x-b)(a_1-x)}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{a_1-x}{x-a_2}\right)^m\right)}$$
$$= \left[\int_0^\infty \frac{n\,fx\,t^{m-1}\,\partial t}{(x-b)[x-a_1+t^n(x-a^2)]}\right]_{x=1} - \int_0^\infty \frac{nt^{m-1}\,fb\,\partial t}{b-a_1+t^n(b-a_2)}.$$

Prius integrale secundi termini post faciles transformationes ad hunc valorem:

$$\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\left[\frac{fx}{(x-b)(x-a_1)}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{x-a_1}{x-a_2}\right)^m\right)}\right]_{x=1},$$

atque posterius eodem modo ad hunc:

$$-\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\,\frac{fb}{b-a_1}\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{m}{n}}$$

reducitur, ubi denotationes in articulo I. introductae valent. Si quantitas $b$ valore reali positivo quantitate $a_1$ maiore vel quantitate $a_2$ minore gaudet, posterior expressio fit:

$$-\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\,\frac{fb}{b-a_1}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^m\right)}.$$

Quibus collectis habebimus

Theorema 4. „Si $fx$ et $b$ easdem quantitates designant, ac in theo-

„remate primo, nec non $n$ numerum integrum positivum atque $m$ quantitatem „positivam ipso $n$ minorem integrale definitum:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{fx\,\partial x}{(x-b)(a_1-x)} \sqrt[n]{\left(\left(\frac{a_1-x}{x-a_2}\right)^m\right)}$$

„ad quadraturam divisionemque circuli reducitur per hanc formulam:

$$= \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \left[\frac{fx}{(x-b)(x-a_1)} \sqrt[n]{\left(\left(\frac{x-a_1}{x-a_2}\right)^m\right)}\right]_{x^{-1}} - \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \cdot \frac{fb}{b-a_1} \cdot \left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{m}{n}},$$

„ubi denotationes art. I. adhibentur."

**Corollarium.** Expressionem

$$\left[\frac{fx}{(x-b)(x-a_1)} \sqrt[n]{\left(\left(\frac{x-a_1}{x-a_2}\right)^m\right)}\right]_{x^{-1}},$$

repraesentare licet, ut hoc residuum:

$$E\frac{zf\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))(1-zb)(1-za_1)} \sqrt[n]{\left(\left(\frac{1-a_1 z}{1-a_2 z}\right)^m\right)};$$

atque expressionem

$$\frac{fb}{b-a_1} \left(\frac{b-a_1}{b-a_2}\right)^{\frac{m}{n}}$$

per hoc residuum exprimere possumus:

$$E\frac{fz}{((z-b))(z-a_1)} \left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Simili ratione ac in articulo II., iisdem denotationibus (15. et 16.) introductis, adipiscimur ex hoc theoremate hoc multo generalius

„**Theorema 5.** Si $\psi x$ et $Fx$ sunt quaelibet functiones integrae, quarum haec forma:

$$Fx = (x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2} \ldots . (x-b_\nu)^{m_\nu}$$

„gaudet, ubi quantitates $b$ quosvis valores reales extra intervallum $a_2 - a_1$ „iacentes, vel quoslibet valores imaginarios habent, integrale definitum

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{\psi x}{Fx} \frac{1}{a_1-x} \sqrt[n]{\left(\left(\frac{a_1-x}{x-a_2}\right)^m\right)} \partial x$$

„ad quadraturam atque divisionem circuli revocatur formulae huius ope:

$$44. \quad = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \left[\frac{\psi x}{Fx} \frac{1}{x-a_1} \sqrt[n]{\left(\left(\frac{x-a_1}{x-a_2}\right)^m\right)}\right]_{x^{-1}} - \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \sum_1^{\nu} {}_h \frac{\partial^{m_h-1} \frac{\psi b_h \Pi b_h}{b_h-a_1} \left(\frac{b_h-a_1}{b_h-a_2}\right)^{\frac{m}{n}}}{1.2 \ldots . (m_h-1)\partial b_h^{m_h-1}}$$

**Corollarium.** Si hanc expressionem, per residua repraesentare velimus, erit

$$45.\quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{\psi x}{Fx}\,\frac{1}{a_1-x}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{a_1-x}{x-a_2}\right)^m\right)}$$

$$= \left(\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\right)\cdot E\left(\frac{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))\,F\left(\frac{1}{z}\right)}\,\frac{1}{1-a_1 z}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{1-a_1 z}{1-a_2 z}\right)^m\right)}\right)$$

$$-\left(\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\right)\,{}_{-\infty}^{+\infty}E_{-\infty}^{+\infty}\,\frac{\psi x}{((Fx))}\,\frac{1}{x-a_1}\left(\frac{x-a_1}{x-a_2}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Quae residua, si $m$ est numerus integer, illud per transformationem

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1-a_1 z}{1-a_2 z}\right)} = \frac{1-t}{1+t},$$

hoc per transformationem

$$\left(\frac{x-a_1}{x-a_2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1-t}{1+t}$$

facile ad residua functionum rationalium reduci possunt.

## IV.

Quaecunque integralia definita in articulis antecedentibus determinavimus, per calculos satis extensos ipsa et adeo similia indefinita inveniri posse, notum fuit. Fortasse ob concinnitatem formularum, quarum ope valorum integralium investigationem ad operationes finitas mereque algebraicas reduximus, haec longior expositio excusabitur. Ex generaliori vero aequatione egredientes fundamentali, per eandem methodum ad relationes inter integralia Abeliana generalioraque pervenimus, quae ob novitatem concinnitatemque formularum geometrarum attentione dignissimae videntur.

Ponamus nimirum hanc aequationem:

46. $(x-a_1)(x-a_3)\ldots.(x-a_{2\varkappa-1}) + t^n(x-a_2)(x-a_4)\ldots.(x-a_{2\varkappa}) = 0,$

ubi differentiae

$$a_1-a_2,\quad a_2-a_3,\quad \ldots\ldots\quad a_{2\varkappa-1}-a_{2\varkappa},$$

positivis valoribus gaudent. Dummodo quantitas $t$ positiva est, videmus, terminum priorem aequationis (46.) fore:

pro $x = a_1$ positivum,
pro $x = a_2$ negativum,

pro $x = a_3$ negativum,

etc.

ita ut pro $x = a_{2\varkappa-1}$ signum $(-1)^{\varkappa-1}$ et pro $x = a_{2\varkappa}$ signum $(-1)^{\varkappa}$ habeat. Inde sequitur, dum quantitas $t$ positiva sit, $\varkappa$ radices aequationis (46.), quas ex ordine, pro eodem valore ipsius $t$, denotabimus per:

$$x_1, \; x_2, \; \ldots . \; x_\varkappa$$

reales esse, atque contineri respective in his intervallis:

$$a_1 - a_2, \quad a_3 - a_4, \quad \ldots . \quad a_{2\varkappa-1} - a_{2\varkappa}.$$

Deinde cum sit:

$$\log t^n = \log \frac{a_1 - x}{x - a_{2\varkappa}} + \log \frac{x - a_3}{x - a_2} + \text{etc.} \log \frac{x - a_{2\varkappa-1}}{x - a_{2\varkappa-2}}$$

differentiatione facta, pro qualibet aequationis (26.) radice, valebit haec formula:

$$-\frac{\partial t^n}{\partial x} = +\frac{a_1 - a_{2\varkappa}}{(a_1 - x)(x - a_{2\varkappa})} + \frac{a_2 - a_3}{(x - a_2)(x - a_3)} + \text{etc.} \frac{a_{2\varkappa-2} - a_{2\varkappa-1}}{(x - a_{2\varkappa-2})(x - a_{2\varkappa-1})}.$$

Inde derivatur, valorem ipsius $\frac{\partial t^n}{\partial x}$, dum $t$ ipsum positivum maneat, pro qualibet radice aequationis (46.) negativum fore, hancque ob rem has radices dum $t$ ab 0 usque in infinitum continuo crescat, respective decrescere continuo

$x_1$ ab $a_1$ usque ad $a_2$,

$x_2$ ab $a_3$ usque ad $a_4$,

etc.

$x_\varkappa$ ab $a_{2\varkappa-1}$ usque ad $a_{2\varkappa}$.

Ex aequatione (46.), si per $x$ quaelibet radicum $x_1$, $x_2$, etc. $x_\varkappa$ designatur, fluit haec:

$$47. \quad t^m = \sqrt[n]{\left\{\frac{(a_1 - x)(x - a_3) \ldots . (x - a_{2\varkappa-1})}{(x - a_2)(x - a_4) \ldots . (x - a_{2\varkappa})}\right\}^m},$$

ubi $m$ est quantitas positiva minor quam $n$, atque idem, quod in formula (42.) adnotavimus, valet.

Loco aequationis (46.) brevitatis gratia posito

$$48. \quad \varphi(x, t) = 0$$

atque

$$49. \quad \frac{1}{(x - a_1)(x - a_3) \ldots . (x - a_{2\varkappa-1})} \sqrt[n]{\left(\left(\frac{(a_1 - x)(x - a_3) \ldots . (x - a_{2\varkappa-1})}{(x - a_2)(x - a_4) \ldots . (x - a_{2\varkappa})}\right)^m\right)} = X,$$

differentiatione aequationis (48.) instituta, multiplicationeque per

$$\frac{t^m f x}{(x - b)\, \varphi(x, t)}$$

facta, post nonnullas reductiones hanc obtinemus aequationem:

$$50.\quad \frac{fx.X.\partial x}{x-b} = \frac{nt^{m-1}fx\,\partial t}{x-b.\varphi' x}.$$

Adiiciamus $fx$ esse functionem integram rationalem, atque $b$ quantitatem, vel realem extra intervalla

$$a_1 - a_2,\quad a_3 - a_4,\quad \ldots\quad a_{2\varkappa-1} - a_{2\varkappa}$$

iacentem, vel imaginariam quamlibet.

Si loco quantitatis $x$ in aequatione (50.) ex ordine ponimus $\varkappa$ radices aequationis (46.) ad valorem $t$ pertinentes, atque in singula quaque aequatione inde prodeunte integrationem facimus ab $t=\infty$ usque ad $t=0$, atque respective ab $x_1 = a_2$ usque ad $x_1 = a_1$,

$x_2 = a_4$ - - $x_2 = a_3$,

etc.

$x_\varkappa = a_{2\varkappa}$ - - $x_\varkappa = a_{2\varkappa-1}$,

habebimus hanc aequationem inter integralia definita:

$$51.\quad \int_{a_2}^{a_1} \frac{Xfx}{x-b}\partial x + \int_{a_4}^{a_3} \frac{Xfx}{x-b}\partial x + \text{etc.} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{Xfx}{x-b}\partial x$$

$$= -n\int_0^\infty t^{m-1}\partial t\left\{\frac{fx_1}{(x_1-b)\varphi' x_1} + \frac{fx_2}{(x_2-b)\varphi' x_2} + \text{etc.} + \frac{fx_\varkappa}{(x_\varkappa - b)\varphi' x_\varkappa}\right\},$$

quam secundum denotationes articuli I. ita repraesentare licet:

$$52.\quad \sum_1^{\varkappa}{}^h \int_{a_{2h}}^{a_{2h-1}} \frac{Xfx}{x-b}\partial x = -n\int_0^\infty t^{m-1}\,\partial t \sum_1^{\varkappa}{}^h \frac{fx_h}{(x_h-b)\varphi' x_h}.$$

Iam vero ex lemmate primo sequitur fore:

$$\sum_1^{\varkappa}{}^h \frac{fx_h}{(x_h-b)\varphi' x_h} = \left[\frac{fx}{(x-b)\varphi x}\right]_{x^{-1}} - \frac{fb}{\varphi b},$$

quo substituto, lemmatis secundi ope, ex aequatione (52.) si brevitatis gratia ponimus:

$$53.\quad \psi_x = \frac{1}{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2\varkappa-1})}\left[\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2\varkappa-1})}{(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2\varkappa})}\right]^{\frac{m}{n}},$$

hanc eruimus aequationem:

$$54.\quad \sum_1^{\varkappa}{}^h \int_{a_{2h}}^{a_{2h-1}} \frac{Xfx}{x-b}\partial x = -\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\left\{\left[\frac{fx\,\psi x}{x-b}\right]_{x^{-1}} - fb\,\psi b\right\}.$$

Quibus collectis prodit hoc

**Theorema 5. memorabile.** „Si per $fx$ functionem integram ratio-

„nalem ipsius $x$, per $X$ expressionem denotemus hanc:

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_3)\;\ldots\;(x-a_{2n-1})}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{(x-a_1)(x-a_3)\;\ldots\;(x-a_{2n-1})}{(x-a_2)(x-a_4)\;\ldots\;(x-a_{2n})}\right)^m\right)}$$

„ubi quantitates $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ tales sunt, ut differentiae

$$a_1-a_2,\quad a_2-a_3,\quad \ldots\quad a_{2n-1}-a_{2n},$$

„positivis valoribus gaudeant, atque $n$ est numerus integer positivus, nec non $m$ „quantitas positiva ipso $n$ minor; si denique quantitas $b$ vel ut realis extra limites

$$a_2-a_1,\quad a_4-a_3,\quad \ldots\quad a_{2n}-a_{2n-1}$$

„iacens, vel ut imaginaria quaelibet assumitur, summa integralium definitorum

$$\int_{a_2}^{a}\frac{Xfx}{x-b}\partial x+\int_{a_4}^{a_3}\frac{Xfx}{x-b}\partial x+\int_{a_{2n}}^{a_{2n-1}}\frac{Xfx}{x-b}\partial x = P$$

„ad quadraturam atque divisionem circuli revocatur per formulam:

$$P=\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\left\{fb\;\psi b-\left[\frac{fx\;\psi x}{x-b}\right]_{x^{-1}}\right\},$$

„ubi $\psi x$ per aequationem (53.) explicatur."

**Corollarium.** Expressionem in altero termino aequationis (54.) per residua exprimere licet; nimirum erit.

$$\left[\frac{fx\;\psi x}{x-b}\right]_{x^{-1}} = E\frac{f\frac{1}{z}\;\psi\frac{1}{z}}{((z))(1-zb)},$$

$$fb\;\psi b = E\frac{fz\;\psi z.(z-b)}{((z-b))}.$$

Itaque habebimus hanc aequationem:

$$\Sigma_1^n\int_{a_{2h}}^{a_{2h-1}}\frac{Xfx}{x-b}\partial x=\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\left(E\frac{fz.\psi z.(z-b)}{((z-b))}-E\frac{f\frac{1}{z}\;\psi\frac{1}{z}}{((z))(1-zb)}\right).$$

Aeque ac in articulis antecedentibus ex hoc theoremate derivatur hoc generalissimum

**Theorema 6.** „Si, iisdem dōnotationibus ac in theoremate 5. valentibus, ponitur:

$$Fx=(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\;\ldots\;(x-b_\nu)^{m_\nu},$$

„ubi quantitates $b_1, b_2, \ldots b_\nu$ iisdem conditionibus ac quantitas $b$ in theore- „mate 5. satisfaciunt, atque

$$(x-b_1)^{m_1}=Fx\,\Pi_1 x,$$
$$(x-b_2)^{m_2}=Fx\,\Pi_2 x,$$
etc.
$$(x-b_\nu)^{m_\nu}=Fx\,\Pi_\nu x,$$

„aggregatum hoc integralium definitorum:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{fx}{Fx} X\partial x + \int_{a_4}^{a_3} \frac{fx}{Fx} X\partial x + \ldots + \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{fx}{Fx} X\partial x = P,$$

„ad quadraturam atque divisionem circuli reducitur per hanc formulam:

$$55. \quad P = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \left\{ \sum_1^{\nu} {}_h \frac{\partial^{m_h-1} fb_h \Pi_h b_h \, \psi b_h}{1.2\ldots m_h-1.\partial b_h^{m_h-1}} - \left[\frac{fx\,\psi x}{Fx}\right]_{x^{-1}} \right\}$$

„sive per hanc expressionem, ubi signum residuorum adhibetur,

$$\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \left( {}_{-\infty}^{+\infty} E_{-\infty}^{+\infty} \frac{fx\,\psi x}{((Fx))} - E \frac{f\frac{1}{x}\,\psi\frac{1}{x}}{((x^2))F\frac{1}{x}} \right).$$

Corollarium. Si ponitur:

$$fx = Fx.Px$$

ubi $Px$ alia functio integra est, prior terminus expressionis (55.) evanescit, atque erit:

$$56. \quad \int_{a_2}^{a_1} XPx\,\partial x + \int_{a_4}^{a_3} XPx\,\partial x + \ldots + \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} XPx\,\partial x$$

$$= -\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \left[ \frac{Px}{(x-a_1)\ldots(x-a_{2\varkappa-1})} \sqrt[n]{\left(\left(\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{2\varkappa-1})}{(x-a_2)\ldots(x-a_{2\varkappa})}\right)^m\right)} \right]_{x^{-1}}.$$

Si functionis $Px$ ordo, numerum $\varkappa-2$ haud superat, inde fluit, fore:

$$57. \quad \int_{a_2}^{a_1} XPx\,\partial x + \int_{a_4}^{a_3} XPx\,\partial x + \ldots + \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} XPx\,\partial x = 0.$$

## V.

Haud supervacaneum mihi videtur, theoriam generalem in articulo antecedenti expositam, nonnullis exemplis illustrare.

Exemplum 1. Sit:

$$m = 1, \quad n = 2 \quad Fx = 1.$$

Erit

$$X = \frac{1}{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2\varkappa-1})} \sqrt[2]{\left(\frac{(a_1-x)(x-a_3)\ldots(x-a_{2\varkappa-1})}{(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2\varkappa})}\right)},$$

quae expressio, dum argumentum $x$ in intervallis

$$a_1 - a_2, \quad a_5 - a_6, \quad \text{etc.}$$

continetur, in hanc abit formam:

$$X = -\frac{1}{\sqrt[2]{((a_1-x)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_{2\varkappa}))}},$$

atque dum argumentum in ceteris intervallis iacet

$$a_3 \ldots a_4, \quad a_7 \ldots a_8, \quad \text{etc.}$$

in hanc:

$$X = \frac{1}{\sqrt[2]{((a_1-x)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_{2\varkappa}))}}.$$

Brevitatis igitur causa, posito:

$$\sqrt[2]{((a_1-x)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_{2\varkappa}))} = \Delta x,$$

ex corollario theorematis 6. sequuntur hae formulae:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa-2}\,\partial x}{\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa-2}\,\partial x}{\Delta x} + \ldots\ldots (-1)^{\varkappa-1} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa-2}\,\partial x}{\Delta x} = 0,$$

ubi loco numeri $\varkappa-2$ in numeratore, quilibet numerus ipso $\varkappa-2$ minor positivus poni potest

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{\Delta x} + \ldots\ldots (-1)^{\varkappa} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{\Delta x} = \pi,$$

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{\Delta x} + \ldots\ldots (-1)^{\varkappa} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{\Delta x}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2\varkappa}\},$$

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa+1}\,\partial x}{\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa+1}\,\partial x}{\Delta x} + \ldots\ldots (-1)^{\varkappa} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa+1}\,\partial x}{\Delta x}$$

$$= \pi \cdot \frac{1.3}{2.4}[2] + \pi \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [1, 1],$$

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa+2}\,\partial x}{\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa+2}\,\partial x}{\Delta x} + \ldots\ldots (-1)^{\varkappa} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa+2}\,\partial x}{\Delta x}$$

$$= \pi\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}[3] + \frac{1.3}{2.4} \cdot \tfrac{1}{2}[2, 1] + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}[1, 1, 1]\right),$$

ubi generaliter per

$$[\mu, \nu, \varrho, \ldots]$$

denotamus functionem symmetricam argumentorum

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_{2\varkappa},$$

cuius terminus unus est

$$a_1^{\mu}, \quad a_2^{\nu}, \quad a_3^{\varrho}.$$

Si ponamus generaliter

$$B_\mu = \frac{1.3 \ldots. 2\mu - 1}{2.4 \ldots. 2\mu},$$

erit

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa+\lambda}\,\partial x}{\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa+\lambda}\,\partial x}{\Delta x} + \ldots\ldots (-1)^{\varkappa} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa+\lambda}\,\partial x}{\Delta x}$$

$$= \pi . \Sigma B_\mu . B_\nu . B_\varrho \ldots. [\mu, \nu, \varrho \ldots.],$$

ubi numeri $\mu, \nu, \varrho \ldots.$ ita omnibus modis determinantur, ut sit:

$$\begin{array}{ll} \text{aut} & \mu = \lambda + 1, \\ \text{aut} & \mu + \nu = \lambda + 1, \\ \text{aut} & \mu + \nu + \varrho = \lambda + 1, \\ & \text{etc.} \end{array}$$

atque $\mu \geqq \nu \geqq \varrho$ etc., signum summatorium vero exprimit, functiones omnibus his modis ortas symmetricas additione coniungendas esse.

Ex prima harum aequationum relatio ab illustrissimo *Jacobi* inventa, cuius supra mentionem fecimus, sponte prodit.

**Exemplum II.** Sit:

$$m = 1, \quad n = 2, \quad Fx = x - b,$$

atque quantitas $b$ realis extra intervalla

$$a_1 \ldots. a_2, \quad a_3 \ldots. a_4, \quad \ldots. \quad a_{2\varkappa-1} \ldots. a_{2\varkappa},$$

iacens.

Ex theoremate 5. emanant hae aequationes:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x} \ldots\ldots (-1)^{\varkappa-1} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x}$$

$$= \pm \frac{\pi\, b^{\varkappa-1}}{\sqrt{((b-a_1)(b-a_2) \ldots. (b-a_{2\varkappa}))}},$$

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x} \ldots\ldots (-1)^{\varkappa-1} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x}$$

$$= \pi \pm \frac{\pi\, b^{\varkappa}}{\sqrt{((b-a_1)(b-a_2) \ldots. (b-a_{2\varkappa}))}},$$

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa+1}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa+1}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x} \ldots\ldots (-1)^{\varkappa-1} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa+1}} \frac{x^{\varkappa+1}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x}$$

$$= \pi\{b + \tfrac{1}{2}[1]\} \pm \frac{\pi\, b^{\varkappa+1}}{\sqrt{((b-a_1)(b-a_2) \ldots. (b-a_{2\varkappa}))}},$$

atque generaliter, si ponamus, brevitatis gratia, aggregatum terminorum,

quod in exemplo 1. per

$$\Sigma B_\mu B_\nu B_\varrho \ldots\ldots [\mu, \nu, \varrho \ldots]$$

designavimus esse $= S_{\lambda+1}$:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa+\sigma}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa+\sigma}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x} \ldots\ldots (-1)^{\varkappa-1} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa+\sigma}\,\partial x}{(x-b)\,\Delta x}$$

$$= \pi \left\{ b^\sigma + b^{\sigma-1}S_1 + b^{\sigma-2}S_2 \ldots + bS_{\sigma-1} + S_\sigma \pm \frac{b^{\varkappa+\sigma}}{\sqrt{((b-a_1)(b-a_2)\ldots(b-a_{2\varkappa}))}} \right\}.$$

In omnibus his aequationibus superius vel inferius signum in ultimo termino valet, prout productum

$$(b-a_1)(b-a_3)\ldots\ldots(b-a_{2\varkappa-1})$$

negativo vel positivo signo gaudet.

Exemplum III. Sit

$$m = 1, \quad n = 2, \quad Fx = x^2 - 2rx\cos\theta + r^2.$$

Introducamus quantitates $R_1$, $H_1$, $R_2$, $H_2$ per has aequationes determinatas:

$$(r\cos\theta - a_1 \pm ir\sin\theta)(r\cos\theta - a_3 \pm ir\sin\theta)\ldots\ldots(r\cos\theta - a_{2\varkappa-1} \pm ir\sin\theta)$$
$$= R_1(\cos H_1 \pm i\sin H_1),$$
$$(r\cos\theta - a_2 \pm ir\sin\theta)(r\cos\theta - a_4 \pm ir\sin\theta)\ldots\ldots(r\cos\theta - a_{2\varkappa} \pm ir\sin\theta)$$
$$= R_2(\cos H_2 \pm i\sin H_2),$$

ubi arcus $H_1$ et $H_2$ aeque ac $\theta$ limites $-\pi$ et $\pi$ superare nequeunt.

Iam igitur erit, si in theoremate 6. ponamus

$$b_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$b_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta),$$
$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 0, \text{ etc. } \quad fx = x^{\varkappa+\lambda}:$$
$$\Pi_1 x = \frac{1}{x - r(\cos\theta - i\sin\theta)},$$
$$\Pi_2 x = \frac{1}{x - r(\cos\theta + i\sin\theta)},$$
$$\psi b_1 = \frac{1}{\sqrt{(R_1 R_2)}} \frac{1}{\cos H_1 + i\sin H_1} \left(\frac{\cos H_1 + i\sin H_1}{\cos H_2 + i\sin H_2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

quae expressio, si $\frac{1}{2}(H_1 - H_2)$ limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi$ haud superat, redit ad hanc

$$\psi b_1 = \frac{1}{\sqrt{(R_1 R_2)}}(\cos\tfrac{1}{2}(H_1 + H_2) - i\sin\tfrac{1}{2}(H_1 + H_2)),$$

si vero $\frac{1}{2}(H_1 - H_2)$ limites $-\frac{1}{2}\pi \ldots\ldots -\pi$ vel $\frac{1}{2}\pi$ et $\pi$ haud superat, ad hanc reducitur expressionem:

$$\psi b_1 = \frac{-1}{\sqrt{(R_1 R_2)}}(\cos\tfrac{1}{2}(H_1 + H_2) - i\sin\tfrac{1}{2}(H_1 + H_2)).$$

Eodem modo erit

$$\psi b_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{(R_1 R_2)}}(\cos\tfrac{1}{2}(H_1+H_2) + i\sin\tfrac{1}{2}(H_1+H_2)),$$

prout prior vel posterior conditio valet.

Expressio in theoremate 6.

$$\sum_1^\nu {}_h \partial^{m_h-1} \frac{fb_h \Pi b_h \psi b_h}{1.2 \ldots (m_h-1)\partial b_h^{m_h-1}},$$

abit in hanc summam

$$fb_1 \psi b_1 \Pi_1 b_1 + fb_2 \psi b_2 \Pi_1 b_2,$$
$$= \frac{fb_1 \psi b_1 - fb_2 \psi b_2}{2ri\sin\theta},$$

quae post faciles reductiones fit

$$= \frac{r^{\varkappa+\lambda-1}\sin((\varkappa+\lambda)\theta - \frac{1}{2}(H_1+H_2))}{\sqrt{(R_1 R_2)}\sin\theta}.$$

Qua expressione in theoremate 6. substituta, sponte relationes sequentes prodibunt:

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^\varkappa \partial x}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^\varkappa \partial x}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)\Delta x} \text{ etc.} (-1)^{\varkappa-1} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^\varkappa \partial x}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)\Delta x}$$
$$= \mp\pi\left[\frac{r^{\varkappa-1}\sin(\varkappa\theta - \frac{1}{2}(H_1+H_2))}{\sqrt{(R_1 R_2)}\sin\theta}\right],$$

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{x^{\varkappa+\lambda} \partial x}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)\Delta x} - \int_{a_4}^{a_3} \frac{x^{\varkappa+\lambda} \partial x}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)\Delta x} + \text{etc.} (-1)^{\varkappa-1} \int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}} \frac{x^{\varkappa+\lambda} \partial x}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)\Delta x}$$
$$= \frac{\pi}{\sin\theta}[S_{\lambda-1}\sin\theta + rS_{\lambda-2}\sin 2\theta + \text{etc.} + r^{\lambda-1}S_0 \sin\lambda\theta]$$
$$\mp \frac{\pi r^{\varkappa+\lambda-1}\sin((\varkappa+\lambda)\theta - \frac{1}{2}(H_1+H_2))}{\sqrt{(R_1 R_2)}\sin\theta}.$$

**Exemplum IV.** Sit

$$m = 1, \quad n = 3, \quad Fx = 1.$$

Eodem modo ac antea erit:

$$\psi x = \mp \frac{1}{\sqrt[3]{((x-a_1)^2(x-a_2)(x-a_3)^2 \ldots (x-a_{2n}))}} = \mp \frac{1}{\sqrt[3]{\varphi x}},$$

prout argumentum $x$ in intervallis:

$$a_1 \ldots a_2, \quad a_5 \ldots a_6, \quad \text{etc.}$$

vel in intervallis:

$$a_3 \ldots a_4, \quad a_7 \ldots a_8, \quad \text{etc.}$$

continetur.

Quibus positis habebimus has aequationes:

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{x^{\varkappa-2}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}-\int_{a_4}^{a_3}\frac{x^{\varkappa-2}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}\;\dots\;(-1)^{\varkappa-1}\int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}}\frac{x^{\varkappa-2}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}=0,$$

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}-\int_{a_4}^{a_3}\frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}\;\dots\;(-1)^{\varkappa-1}\int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}}\frac{x^{\varkappa-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}-\int_{a_4}^{a_3}\frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}\;\dots\;(-1)^{\varkappa-1}\int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}}\frac{x^{\varkappa}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}$$

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(2a_1+a_2+2a_3+a_4+\dots+a_{2\varkappa}),$$

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{x^{\varkappa+\lambda}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}-\int_{a_4}^{a_3}\frac{x^{\varkappa+\lambda}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}\;\dots\;(-1)^{\varkappa-1}\int_{a_{2\varkappa}}^{a_{2\varkappa-1}}\frac{x^{\varkappa+\lambda}\,\partial x}{\sqrt[3]{\varphi x}}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Sigma\, C_\mu\, C_\nu\, C_\varrho \dots [[\mu,\nu,\varrho\dots]],$$

ubi signum $[[\mu,\nu,\varrho]]$ denotat functionem symmetricam argumentorum

$$a_1,\; \alpha_1,\; a_2,\; a_3,\; \alpha_3 \qquad a_{2\varkappa},$$

cuius terminus generalis

$$a_1^{\mu}\;\alpha_1^{\nu}\;a_2^{\varrho}\dots$$

est, talem ut sit

$$\begin{aligned}\text{vel}\qquad\qquad \mu &= \lambda+1,\\ \text{vel}\qquad \mu+\nu &= \lambda+1,\\ \text{vel}\quad \mu+\nu+\varrho &= \lambda+1,\end{aligned}$$

atque $\mu\gtreqless\nu\gtreqless\varrho$ etc., in qua functione symmetrica postea ponitur

$$\alpha_1=a_1,\quad \alpha_3=a_3,\quad\dots\quad \alpha_{2\varkappa-1}=a_{2\varkappa-1}.$$

Signum denique $C_\mu$ designat productum hoc:

$$\frac{1.4.7.10\dots 3\mu-2}{3.6.9.12\dots 3\mu}.$$

## VI.

Loco formae aequationis generalis (46.) aliam supponere placet, qua ad alias relationes ducimur. Sit enim:

58. $$0=(x-a_1)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_8)(x-a_9)\dots(x-a_{4p})$$
$$+t^{r}(x-a_2)(x-a_3)(x-a_6)(x-a_7)\dots(x-a_{4p-2})(x-a_{4p-1}),$$

ubi rursus differentiae

$$a_1-a_2,\quad a_2-a_3,\quad \text{etc.}$$

positivis valoribus gaudent.

Dum quantitas $t$ positiva est, secundus terminus aequationis (58.) erit

pro $x = a_1$, positivus,
pro $x = a_2$, negativus,
pro $x = a_3$, negativus,
pro $x = a_4$, positivus,
etc.

Ergo huius aequationis radices, si $t$ positivo valore gaudet, reales sunt, atque continentur in intervallis

$$a_1 \dots a_2, \quad a_3 \dots a_4, \quad \text{etc.} \quad a_{4p-1} \dots a_{4p}.$$

Eodem modo ac in articulo IV. sequitur ex aequat. (58.), si per $x$ radicem quamlibet denotamus:

$$\frac{\partial t^n}{\partial x} = \frac{1}{x-a_1} - \frac{1}{x-a_2} - \frac{1}{x-a_3} + \frac{1}{x-a_4} + \frac{1}{x-a_5} - \frac{1}{x-a_6} \text{ etc.}$$
$$- \frac{1}{x-a_{4p-1}} + \frac{1}{x-a_{4p}},$$

quae expressio his duobus formis induit:

$$= -\left(\frac{a_1-a_{4p-1}}{(a_1-x)(x-a_{4p-1})} + \frac{a_3-a_4}{(x-a_3)(x-a_4)} + \frac{a_3-a_5}{(x-a_3)(x-a_5)} + \dots + \frac{a_{4p-2}-a_{4p}}{(x-a_{4p-2})(x-a_{4p})}\right)$$

atque

$$= \frac{a_2-a_{4p}}{(a_2-x)(x-a_{4p})} + \frac{a_1-a_3}{(x-a_1)(x-a_3)} + \frac{a_4-a_6}{(x-a_4)(x-a_6)} + \dots + \frac{a_{4p-1}-a_{4p-3})}{(x-a_{4p-1})(x-a_{4p-3})}.$$

Illa forma docet, valorem ipsius $\frac{\partial t^n}{\partial x}$, si $x$ in intervallis

$$a_1 \dots a_2, \quad a_5 \dots a_6, \quad \text{etc.} \quad a_{4p-3} \dots a_{4p-2}$$

contineatur, negativum esse, haec eundem valorem, si $x$ in quolibet intervallorum

$$a_3 \dots a_4, \quad a_7 \dots a_8, \quad \text{etc.} \quad a_{4p-1} \dots a_{4p}$$

iaceat, positivum esse. Inde colligitur, radices aequationis (58.), dum variabilis $t$ ab 0 usque in infinitum crescat, in prioribus intervallis iacentes respective

ab $a_1$ usque ad $a_2$,
ab $a_5$ usque ad $a_6$,
etc.
ab $a_{4p-3}$ usque ad $a_{4p-2}$,

continuo decrescere, atque in posterioribus intervallis iacentes respective

ab $a_3$ usque ad $a_4$,
ab $a_7$ usque ad $a_8$,
etc.
ab $a_{4p-1}$ usque ad $a_{4p}$

continuo crescere.

Ex aequatione (58.) sequitur, fore

$$t^m = \left[\sqrt[n]{\left(\frac{(a_1-x)(x-a_4)(x-a_5)\ \dots\ (x-a_{4p})}{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_6)\ \dots\ (x-a_{4p-1})}\right)}\right]^m,$$

si quantitas $m$ positiva ipsoque $n$ minor est, atque in utroque termino valores positivi reales sumuntur.

Posito igitur brevitatis gratia:

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_4)(x-a_5)\ \dots\ (x-a_{4p})}\left[\sqrt[n]{\left(\frac{(a_1-x)(x-a_4)(x-a_5)\dots(x-a_{4p})}{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_6)\dots(x-a_{4p-1})}\right)}\right]^m = X$$

atque

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_4)(x-a_5)\ \dots\ (x-a_{4p})}\left[\frac{(x-a_1)(x-a_4)(x-a_5)\ \dots\ (x-a_{4p})}{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_6)\ \dots\ (x-a_{4p-1})}\right]^{\frac{m}{n}} = \psi x,$$

habebimus haec

Theoremata 7. et 8. „Iisdem denotationibus ac in theorematibus 5. et 6. valentibus summa integralium definitorum

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}+\int_{a_3}^{a_4}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}+\ \dots\ +\int_{a_{4p-1}}^{a_{4p}}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b} = P,$$

„revocatur ad quadraturam atque divisionem circuli per formulam

$$P = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\left(fb\,\psi b - \left[\frac{fx\ \psi x}{x-b}\right]_{x^{-1}}\right),$$

„sive

$$P = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\left(E\frac{fz\,.\,\psi z\,.\,(z-b)}{((z-b))} - E\frac{f\frac{1}{z}\ \psi\frac{1}{z}}{((z))(1-bz)}\right);$$

„atque summa integralium definitorum

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{Xfx\,\partial x}{Fx}+\int_{a_3}^{a_4}\frac{Xfx\,\partial x}{Fx}+\ \dots\ +\int_{a_{4p-1}}^{a_{4p}}\frac{Xfx\,\partial x}{Fx} = Q$$

„per hanc formulam :

$$Q = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\left(\sum\nolimits_1^{\nu}{}_h \frac{\partial^{m_h-1}(fb_h\,\Pi_h b_h\,\psi b_h)}{1.2\dots(m_h-1)\,\partial b_h^{m_h-1}} - \left[\frac{fx\,\psi x}{Fx}\right]_{x^{-1}}\right),$$

„sive

$$Q = \left(\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\,{}^{+\infty}_{-\infty}E^{+\infty}_{-\infty}\frac{fx\ \psi x}{((Fx))} - E\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)\ \psi\left(\frac{1}{x}\right)}{((x^2))\,F\left(\frac{1}{x}\right)}\right).$$

**Corollarium 1.** Si ponitur loco functionis $fx$,

$$(x - a_{4p})fx$$

atque $a_{4p} = a_{4p-1}$, iisdem formulis hanc summam integralium definitorum

$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{Xfx\,\partial x}{Fx} + \int_{a_3}^{a_4} \frac{Xfx\,\partial x}{Fx} + \dots + \int_{a_{4p-2}}^{a_{4p-3}} \frac{Xfx\,\partial x}{Fx},$$

exprimi, dummodo per $X$ et $\psi x$ designemus has expressiones:

$$X = \frac{1}{(x-a_1)(x-a_4)\dots(x-a_{4p-3})} \left[\sqrt[n]{\left(\frac{(a_1-x)(x-a_4)\dots(x-a_{4p-3})}{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{4p-2})}\right)}\right]^m,$$

$$\psi x = \frac{1}{(x-a_1)(x-a_4)\dots(x-a_{4p-3})} \left[\sqrt[6]{\left(\frac{(x-a_1)(x-a_4)\dots(x-a_{4p-3})}{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{4p-2})}\right)}\right]^{\frac{m}{n}},$$

sponte ex antecedentibus emanat.

**Corollarium 2.** Considerare adhuc placet nonnullos casus memorabiles speciales, in quibus limites integralium cum omnibus limitibus intervallorum functionis irrationalis coïncidunt. Quem ad finem segregentur duo casus, prout $m$ ipso $\frac{1}{2}n$ minor vel maior fuerit.

In priori casu loco ipsius $fx$ introducamus functionem

$$(x-a_4)(x-a_8)\dots(x-a_{4p-4})f_1 x,$$

in posteriori casu vero

$$(x-a_2)(x-a_6)\dots(x-a_{4p-2})f_1 x,$$

atque postea in utroque casu ponamus

$$a_3 = a_2, \quad a_7 = a_6, \quad \dots \quad a_{4p-1} = a_{4p-2}.$$

Quibus positis in priori casu, ubi $m > \frac{1}{2}n$ est, fit

$$Xfx = \frac{1}{(x-a_1)(x-a_4)(x-a_8)\dots(x-a_{4p})} \left[\sqrt[n]{\left(\frac{(a_1-x)(x-a_4)^2\dots(x-a_{4p})}{(x-a_2)^2(x-a_6)^2\dots(x-a_{4p-2})^2}\right)}\right]^m,$$

quae expressio, cum in intervallis

$$a_1 \dots a_4, \quad a_8 \dots a_{12}, \quad \text{etc.}$$

negativo, atque in intervallis ceteris positivo valore gaudeat, brevitatis gratia designetur per

$$Xfx = \mp \frac{f_1 x}{\Delta_1 x};$$

quo posito summa integralium definitorum theorematis 8. in hanc abit:

$$-\int_{a_2}^{a_1} \frac{f_1 x\,\partial x}{Fx.\Delta_1 x} - \int_{a_3}^{a_6} \frac{f_1 x\,\partial x}{Fx.\Delta_1 x} + \int_{a_6}^{a_{10}} \frac{f_1 x\,\partial x}{Fx.\Delta_1 x} - \dots + (-1)^p \int_{a_{4p-2}}^{a_{4p}} \frac{f_1 x\,\partial x}{Fx.\Delta_1 x}.$$

Eodem modo si $m > \frac{1}{2}n$ est, erit:

$$Xfx = \frac{(x-a_2)(x-a_6)\,\ldots\,(x-a_{4p-2})}{(x-a_1)(x-a_4)^2\ldots(x-a_{4p})}\left[\sqrt[n]{\left(\frac{(a_1-x)(x-a_4)^2\ldots(x-a_{4p})}{(x-a_2)^2(x-a_6)^2\ldots(x-a_{4p-2})^2}\right)}\right]^m,$$

quam expressionem, in intervallis $a_1 \ldots a_2$, $a_6 \ldots a_{10}$, etc. negativam, in ceterisque positivam, denotemus per

$$Xfx = \pm\frac{fx}{\Delta_2 x},$$

quo posito summa integralium definitorum haec erit:

$$-\int_{a_4}^{a_1}\frac{f_1 x\,\partial x}{Fx\,\Delta_2 x}+\int_{a_8}^{a_4}\frac{f_1 x\,\partial x}{Fx\,\Delta_2 x}-\;\ldots\;(-1)^p\int_{a_{4p}}^{a_{4p-4}}\frac{f_1 x\,\partial x}{Fx\,\Delta_2 x}.$$

**Theoremata** 7. et 8. per nonnulla exempla explicare velimus.

**Exemplum 1.** Sit:

$$n = 3, \qquad m = 1, \qquad Fx = 1.$$

Habebimus

$$-X = \frac{1}{\sqrt[3]{((x-a_1)^2(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)^2\ldots(x-a_{4p})^2)}},$$

si $x$ in intervallis

$$a_1 \ldots a_2, \qquad a_3 \ldots a_4, \qquad \text{etc.}$$

continetur, atque erit

$$\int_{a_2}^{a_1} Xfx\,\partial x + \int_{a_3}^{a_4} Xfx\,\partial x + \ldots + \int_{a_{4p-1}}^{a_{4p}} Xfx\,\partial x = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}[Xfx]_{x^{-1}}.$$

Inde colligitur, si ordo functionis $fx$ numerum $2p-2$ haud superet, summam integralium nostram evanescere. Si $fx = x^{2p-1}$ est, erit

$$\int_{a_2}^{a_1} Xx^{2p-1}\,\partial x + \int_{a_3}^{a_4} Xx^{2p-1}\,\partial x + \ldots + \int_{a_{4p-1}}^{a_{4p}} Xx^{2p-1}\,\partial x = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

atque generaliter

$$\int_{a_2}^{a_1} Xx^{2p+\lambda}\,\partial x + \int_{a_3}^{a_4} Xx^{2p+\lambda}\,\partial x + \ldots + \int_{a_{4p-1}}^{a_{4p}} Xx^{2p+\lambda}\,\partial x$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\Sigma\, C_\mu\, C_\nu\, C_\varrho \ldots [[\mu, \nu, \varrho]],$$

ubi signum

$$[[\mu, \nu, \varrho]]$$

denotat functionem symmetricam argumentorem

$$a_1, \alpha_1, a_2, a_3, a_4, \alpha_4, a_5, \alpha_5, \ldots a_{4p}, \alpha_{4p},$$

cuius terminus unus est

$$a_1^\mu\ a_1^\nu\ a_3^\varrho\ \ldots\ldots$$

talem, ut sit

$$\text{vel}\qquad \mu = \lambda+1,$$
$$\text{vel}\quad \mu+\nu = \lambda+1,$$
$$\text{vel}\ \mu+\nu+\varrho = \lambda+1,$$

atque $\mu \geqq \nu \geqq \varrho$ etc., in qua functione postea ponitur

$$\alpha_1 = a_1, \qquad \alpha_4 = a_4, \qquad \alpha_5 = a_5, \qquad \text{etc.}$$

Signum $C_\mu$ denotat productum

$$\frac{1.4.7\ldots\ldots 3\mu-2}{3.6.9\ldots\ldots 3\mu}.$$

Si adhuc in exemplo hoc ponimus

$$a_2 = a_3, \qquad a_6 = a_7, \qquad \text{etc.}$$

erit

$$-X = \frac{1}{\sqrt[3]{((x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-a_4)^2(x-a_5)^2\ \ldots\ (x-a_{4p})^2)}},$$

atque summa integralium erit:

$$\int_{a_2}^{a_1} Xfx\,\partial x + \int_{a_3}^{a_4} Xfx\,\partial x + \int_{a_6}^{a_7} Xfx\,\partial x + \ldots\ldots + \int_{a_{4p-2}}^{a_{4p}} Xfx\,\partial x.$$

**Exemplum II.** Sit:

$$n = 3, \qquad m = 2, \qquad Fx = 1.$$

Habebimus

$$-X = \frac{1}{\sqrt[3]{((x-a_1)(x-a_2)^2(x-a_3)^2\ \ldots\ (x-a_{4p}))}},$$

si argumentum $x$ continetur in intervallis

$$a_1 \ldots\ldots a_2, \quad a_3 \ldots\ldots a_4, \quad a_5 \ldots\ldots a_6, \quad \text{etc.}$$

atque has relationes

$$\int_{a_2}^{a_1} Xfx\,\partial x + \int_{a_3}^{a_4} Xfx\,\partial x + \ldots\ldots + \int_{a_{4p-1}}^{a_{4p}} Xfx\,\partial x$$
$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}[Xfx]_{x^{-1}}.$$

Si ponamus esse

$$a_2 = a_3, \quad a_6 = a_7, \quad \text{etc.}$$

atque

$$fx = (x-a_2)(x-a_6)\ \ldots\ (x-a_{4p-2})Px,$$

erit

$$Xfx = \mp\frac{Px}{\sqrt[3]{((x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)\ \ldots\ (x-a_{4p}))}},$$

prout argumentum $x$ iacet in intervallis

$$a_1 \ldots . a_2, \quad a_5 \ldots . a_6, \quad a_9 \ldots . a_{10}, \quad \text{etc.}$$

vel in intervallis

$$a_2 \ldots . a_4, \quad a_6 \ldots . a_8, \quad a_{10} \ldots . a_{12}, \quad \text{etc.}$$

Posito igitur

$$Xfx = \mp \frac{Px}{\Delta_3 x},$$

habebimus hanc aequationem:

$$\int_{a_4}^{a_1} \frac{Px\,\partial x}{\Delta_3 x} - \int_{a_8}^{a_5} \frac{Px\,\partial x}{\Delta_3 x} \ldots . (-1)^{p-1} \int_{a_{4p}}^{a_{4p-3}} \frac{Px\,\partial x}{\Delta_3 x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{Px}{\Delta_3 x}\right]_{x^{-1}},$$

unde sequitur, hanc summam integralium, si functio $Px$ ordinem $(p-1)$ haud superat, evanescere, generaliterque esse:

$$\int_{a_4}^{a_1} \frac{x^{p+\lambda}\,\partial x}{\Delta_3 x} - \int_{a_8}^{a_5} \frac{x^{p+\lambda}\,\partial x}{\Delta_3 x} \ldots . (-1)^{p-1} \int_{a_{4p}}^{a_{4p-3}} \frac{x^{p+\lambda}\,\partial x}{\Delta_3 x}$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \Sigma\, C_\mu\, C_\nu\, C_\varrho \ldots . [\mu, \nu, \varrho \ldots .],$$

ubi signum hoc pertinet ad argumenta

$$a_1, \; a_2, \; a_4, \; a_5, \; \ldots . \; a_{4p}.$$

Haec exempla attulisse sufficiat. Ulteriores vero de eadem materie disquisitiones, dum occasio se praebet, geometris proponam.

Regiomonti 1 Oct. 1839.

---

cuius terminus unus est

$$a_1^\mu \ a_1^\nu \ a_3^\varrho \ \ldots$$

talem, ut sit

$$\begin{aligned} \text{vel} \qquad \mu &= \lambda+1, \\ \text{vel} \quad \mu+\nu &= \lambda+1, \\ \text{vel} \ \mu+\nu+\varrho &= \lambda+1, \end{aligned}$$

atque $\mu \geqq \nu \geqq \varrho$ etc., in qua functione postea ponitur

$$\alpha_1 = a_1, \qquad \alpha_4 = a_4, \qquad \alpha_5 = a_5, \qquad \text{etc.}$$

Signum $C_\mu$ denotat productum

$$\frac{1.4.7 \ldots . 3\mu-2}{3.6.9 \ldots . 3\mu}.$$

Si adhuc in exemplo hoc ponimus

$$a_2 = a_3, \qquad a_6 = a_7, \qquad \text{etc.}$$

erit

$$-X = \frac{1}{\sqrt[3]{((x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-\alpha_4)^2(x-a_5)^2 \ldots . (x-a_{4p})^2)}},$$

atque summa integralium erit:

$$\int_{a_2}^{a_1} Xfx\,\partial x + \int_{a_3}^{a_4} Xfx\,\partial x + \int_{a_6}^{a_5} Xfx\,\partial x + \ldots . + \int_{a_{4p-2}}^{a_{4p}} Xfx\,\partial x.$$

**Exemplum II.** Sit:

$$n = 3, \qquad m = 2, \qquad Fx = 1.$$

Habebimus

$$-X = \frac{1}{\sqrt[3]{((x-a_1)(x-a_2)^2(x-a_3)^2 \ldots . (x-a_{4p}))}},$$

si argumentum $x$ continetur in intervallis

$$a_1 \ldots . a_2, \quad a_3 \ldots . a_4, \quad a_5 \ldots . a_6, \quad \text{etc.}$$

atque has relationes

$$\int_{a_2}^{a_1} Xfx\,\partial x + \int_{a_3}^{a_4} Xfx\,\partial x + \ldots . + \int_{a_{4p-1}}^{a_{4p}} Xfx\,\partial x$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}[Xfx]_{x^{-1}}.$$

Si ponamus esse

$$a_2 = a_3, \quad a_6 = a_7, \quad \text{etc.}$$

atque

$$fx = (x-a_2)(x-a_6) \ldots . (x-a_{4p-2})Px,$$

erit

$$Xfx = \mp \frac{Px}{\sqrt[3]{((x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5) \ldots . (x-a_{4p}))}},$$

# 17.

# Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen.

(Vom Herrn Prof. Dr. E. E. Kummer zu Liegnitz.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 5. im ersten und No. 12. im zweiten Hefte dieses Bandes.)

---

## Zweiter Theil.

## Ueber die logarithmischen Integrale dritter Ordnung.

### §. 10.

Die allgemeine Form der logarithmischen Integrale dritter Ordnung, $\int R\int Q\int P\,dx.dx.dx$, enthält aufser den ihr eigenthümlichen Transcendenten auch die in dem ersten Theile untersuchten logarithmischen Integrale zweiter Ordnung, und aufserdem die von erster Ordnung, oder Logarithmen und Kreisbogen in sich. Diese Transcendenten niederer Ordnungen aber sollen hier unberücksichtigt bleiben und, wo sie sich zeigen, als bekannt oder bereits untersucht angesehen werden. Zerlegt man nun die drei rationalen Functionen $P$, $Q$ und $R$ in ihre einzelnen Theile von der Form $\frac{A}{(a+bx)^l}$, wo $l$ auch eine ganze negative Zahl sein kann, (wenn nämlich diese rationale Functionen ganze Theile enthalten, oder in den Zählern höhere Potenzen von $x$ haben als in den Nennern), so zerfällt die obige allgemeine Formel in eine Summe einzelner Theile von der Form

$$\int\frac{A}{(a+bx)^l}\int\frac{B}{(c+\partial x)^m}\int\frac{C}{(e+fx)^n}\,dx.dx.dx.$$

Diese Form giebt aber, wenn nicht die ganzen Zahlen $l$, $m$ und $n$ alle drei gleich 1 sind, nur logarithmische Integrale von der zweiten und ersten Ordnung. Denn wenn zunächst $n$ nicht $=1$ ist, so hat man, indem man die erste Integration ausführt, nur ein zweifaches Integral rationaler Functionen, welches im ersten Theile untersucht ist; wenn aber, zweitens, $m$ nicht $=1$ ist, so verwandelt sich diese Form durch theilweise Integration in

$$\int\frac{-A.B}{(m-1)\,\partial\,(a+bx)^l(c+\partial x)^{m-1}}\int\frac{C}{(e+fx)^n}\,dx.dx$$
$$+\int\frac{A}{(a+bx)^l}\int\frac{B.C}{(m-1)\,\partial\,(c+\partial x)^{m-1}(e+fx)^n}\,dx.dx$$

und enthält also ebenfalls nur logarithmische Integrale von der zweiten und ersten Ordnung. Wenn endlich $l$ nicht $= 1$ ist, so verwandelt sich die obige Form durch theilweise Integration in

$$-\frac{A}{b(l-1)(a+bx)^{l-1}}\int\frac{B}{(c+dx)^m}\,dx.dx$$
$$+\int\frac{A.B}{b(l-1)(a+bx)^{l-1}(c+\partial x)^m}\int\frac{C}{(e+fx)^n}\,dx.dx.$$

Da diese Formel ebenfalls nur logarithmische Integrale von niederen Ordnungen enthält, so bleibt der einzige Fall übrig, wo $l=1$, $m=1$ und $n=1$ ist, oder die Form

$$\int\frac{A}{a+bx}\int\frac{B}{c+\partial x}\int\frac{C}{e+fx}\,dx.dx.dx.$$

Diese wird durch theilweise Integration verwandelt in:

$$\frac{A}{b}l(a+bx)\int\frac{B}{c+\partial x}\int\frac{C}{e+fx}\,dx.dx-\frac{A}{b}\int l(a+bx)\frac{B}{c+\partial x}\int\frac{C}{e+fx}\,dx.dx.$$

Der erste Theil fällt hier wieder hinweg; der zweite aber verwandelt sich, wenn man die erste Integration ausführt und die constanten Factoren wegläfst, in

$$\int l(a+bx).l(e+fx)\frac{dx}{c+\partial x}.$$

Diese Form der logarithmischen Integrale dritter Ordnung läfst sich noch bedeutend vereinfachen; namentlich kann sie immer dahin reducirt werden, dafs nicht ein Product zweier verschiedener Logarithmen unter dem Integrationszeichen steht, sondern nur das Quadrat eines Logarithmen. Es ist nämlich

$$2l(a+bx)\,l(e+fx)=(l(a+bx))^2+(l(e+fx))^2-\left(l\left(\frac{a+bx}{e+fx}\right)\right)^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{dx}{c+\partial x}$, integrirt und setzt $\frac{a+bx}{e+fx}=z$, so erhält man

$$2\int l(a+bx)\,l(e+fx)\frac{dx}{c+\partial x}=$$
$$\int(l(a+bx))^2\frac{dx}{c+\partial x}+\int(l(e+fx))^2\frac{dx}{c+\partial x}-\int\frac{(lz)^2(de-fc)\,dz}{\partial(cb-\partial a+(\partial e-fc)z)}-\int\frac{(lz)^2 f\,dz}{d(b-fz)}.$$

Es läfst sich also jedes Integral von der Form

$$\int l(a+bx)\,l(e+fx)\frac{dx}{c+\partial x}$$

durch vier Integrale von folgender Form ausdrücken:

$$\int(l(a+bx))^2\frac{dx}{c+\partial x}$$

und folglich sind in dieser Form alle logarithmischen Integrale dritter Ordnung enthalten. Um endlich noch dieses Integral in seiner einfachsten Form darzustellen, setze ich $a+bx=kz$ und $k=\frac{bc-a\partial}{\partial}$, was $c+\partial x$ $\partial.k(1+z)$ giebt, und erhalte so die Form

$$\int (l(kz))^2 \frac{dz}{1+z}.$$

Wird hierin noch $(l(kz))^2$ in $(lz)^2+2lk.lz+(lk)^2$ entwickelt, so bleibt für die logarithmischen Integrale dritter Ordnung die einfachste Form

$$\int (lz)^2 \frac{dz}{1+z}.$$

Dieses Integral hat mit dem Integrale $\varLambda(x)$ die gröfste Aehnlichkeit, und da es für die logarithmischen Integrale dritter Ordnung dasselbe ist wie jenes für die zweiter Ordnung, so wollen wir es ebenfalls mit dem Functionszeichen $\varLambda$ bezeichnen, welchem aber hier der Index 3 zugefügt werden soll. Eben so werden wir auch später die entsprechenden Integrale vierter und fünfter Ordnung mit demselben Functionszeichen $\varLambda$ bezeichnen, welchem die Ordnungszahl als Index beigegeben wird. Den im ersten Theile behandelten logarithmischen Integralen von der zweiten Ordnung kommt eigentlich eben so der Index 2 zu: es scheint aber nicht nöthig, diesen ihren Index beizufügen, da ja auch der Index 2, welcher den Quadratwurzeln zukommt, fast durchgehends weggelassen wird. Es sei demnach

$$\varLambda_3(x)=\int_0 \frac{(l\pm x)^2\,dx}{1+x}.$$

Wenn das Element dieser Function imaginär ist, so führt die Zerlegung in den realen und imaginären Theil wieder auf zwei verschiedene Integrale, welche den im ersten Theile behandelten $D(x,\alpha)$ und $E(x,\alpha)$ analog sind. Es ist nämlich

$$\varLambda_3(xe^{\alpha i})=\int_0 \frac{(l\pm xe^{\alpha i})^2\,e^{\alpha i}\,dx}{1+xe^{\alpha i}},$$

oder, wenn der reale und der imaginäre Theil von einander getrennt werden,

$$\varLambda_3(xe^{\alpha i})=\int_0 \frac{(l\pm x)^2(\cos\alpha+x)-2\alpha\sin\alpha\; l(\pm x)-\alpha^2(\cos\alpha+x)}{1+2x\cos\alpha+x^2}\,dx$$

$$+i\int_0 \frac{(l\pm x)^2\sin\alpha+2\alpha\; l(\pm x)(\cos\alpha+x)-\alpha^2\sin\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2}\,dx.$$

Hierin sind nur Logarithmen und Kreisbogen enthalten, so wie auch die

logarithmischen Integrale von der zweiten Ordnung $D(x,\alpha)$ und $E(x,\alpha)$, und aufserdem die beiden Integrale

$$\int_0 \frac{(l \pm x)^2 (\cos\alpha + x)\, dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2} \quad \text{und} \quad \int_0 \frac{(l \pm x)^2 \sin\alpha \,.\, dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Diese sollen nun ebenfalls durch die Functionszeichen $D$ und $E$ bezeichnet werden, welchen der Index 3 beigegeben wird. Es sei daher

$$D_3(x,\alpha) = \int_0 \frac{(l \pm x)^2 (\cos\alpha + x)\, dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2}, \qquad E_3(x,\alpha) = \int_0 \frac{(l \pm x)^2 \sin\alpha \,.\, dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Hiernach läfst sich die Zerlegung der Function $\Lambda_3(xe^{\alpha i})$ in ihre realen und imaginären Theile folgendermaafsen darstellen:

$$\Lambda_2(xe^{\alpha i}) = D_3(x,\alpha) - 2\alpha E_2(x,\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha^2 l(1 + 2x\cos\alpha + x^2)$$
$$+ i\left(E_3(x,\alpha) + 2\alpha D_2(x,\alpha) - \alpha^2 \text{ arc tang} \frac{x\sin\alpha}{1 + x\cos\alpha}\right).$$

Es hat nun durchaus keine Schwierigkeit, irgend ein gegebenes Integral von der oben aufgestellten allgemeinen Form durch die Functionen $D_3(x,\alpha)$, $E_3(x,\alpha)$, $D_2(x,\alpha)$, $E_2(x,\alpha)$ und durch Logarithmen und Kreisbogen zu integriren; denn man darf nur das Integral zunächst durch die Functionen $\Lambda_3(x)$, $\Lambda_2(x)$ und durch Logerithmen integriren, und diese, wo sie imaginär sind, in ihre realen und imaginären Theile zerlegen, wodurch das Imaginäre wieder verschwindet. Ganz auf dieselbe Weise lassen sich auch die allgemeinen Formen

$$\int P\, lQ\, lR\, dx, \quad \int P\, lQ \text{ arc tang} R\, dx, \quad \int P \text{ arc tang} Q \text{ arc tang} R\, dx,$$

wo $P$, $Q$ und $R$ beliebige rationale Functionen von $x$ sind, durch diese logarithmischen Integrale von der dritten, zweiten und ersten Ordnung integriren; denn diese Formen sind, wie sich leicht zeigen läfst, alle in der oben aufgestellten allgemeinen Form enthalten. Die Functionen $D_3(x,\alpha)$ und $E_3(x,\alpha)$ sind die beiden einzigen logarithmischen Integrale von der dritten Ordnung, da $\Lambda_3(x)$ nur ein specieller Fall von $D_3(x,\alpha)$ ist. Es wird aber auch hier zweckmäfsig sein, die speciellere Function $\Lambda_3(x)$ zunächst zu behandeln und dann aus den gefundenen Eigenschaften derselben die der allgemeineren Functionen $D_3(x,\alpha)$ und $E_3(x,\alpha)$ abzuleiten. Da ferner die meisten Formeln für diese sich beträchtlich vereinfachen, wenn $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ gesetzt wird, so werden wir auch hier diese Substitution anwenden und, eben so wie für die Functionen zweiter Ordnung, $D_3\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \alpha\right)$

durch $D_3(u, \alpha)$ und $E_3\left(\frac{-\sin n}{\sin(u+\alpha)}, \alpha\right)$ durch $E_3(u, \alpha)$ bezeichnen. Eine Zerlegung eines dieser Integrale in einfachere, nur von einem Elemente abhängige, wie bei der Function $E_2(u, \alpha)$, wird durch diese Substitution nicht erlangt; auch ist uns eine solche Zerlegung auf keine andere Weise gelungen.

## §. 11.

Dieselbe Methode, welche wir §. 2. für das einfache logarithmische Integral von der zweiten Ordnung $A(x)$ angewendet haben, um die Formeln zu finden, welche die Grundeigenschaften desselben ausdrücken, kann mit demselben Erfolge auch für das entsprechende logarithmische Integral dritter Ordnung

$$A_3(x) = \int_0 \frac{(l \pm x)^2\, dx}{1+x}$$

angewendet werden. Setzt man nämlich statt $x$ irgend eine rationale Function von $x$, welche ich $z$ nenne, von der Art, dafs $z$ und $1+z$ im Zähler und Nenner nur reale lineäre Factoren haben, so kann man das Integral $A_3(z)$ nach der in §. 10. angegebenen Methode in seine einfachen Bestandtheile zerlegen, welche wieder solche Integrale sind. Es scheint nun das zweckmäfsigste zu sein, auch hier wieder für $x$ zunächst eine gebrochene rationale Function vom ersten Grade zu setzen, um dadurch die einfachsten Grundgleichungen zu finden. Setzt man $\frac{a+bx}{c+\partial x}$ statt $x$, so erhält man

$$A_3\left(\frac{a+bx}{c+\partial x}\right) = \int \left(l\frac{a+bx}{c+\partial x}\right)^2 \left(\frac{(b+\partial)\, dx}{a+c+(b+d)x} - \frac{\partial . dx}{c+\partial x}\right).$$

Entwickelt man das Quadrat dieses Logarithmus und integrirt sodann die einzelnen Theile, so kommt man auf das Integral

$$\int l(a+bx)\, l(c+\partial x) \frac{(b+\partial)\, dx}{a+c+(b+\partial)x},$$

welches, wie wir oben gezeigt haben, durch vier Functionen $A_3(x)$ ausgedrückt werden kann. Behandelt man dasselbe aber so wie es oben gezeigt worden ist, so erhält man gar keine Formel, sondern nur eine rein identische Gleichung. Deshalb giebt die Substitution einer rationalen Function vom ersten Grade nur dann eine Formel, wenn das genannte Integral entweder anderweitig sich integriren läfst, oder ganz wegfällt; das Erstere ist der Fall, wenn $b=0$, das Letztere, wenn $b+\partial=0$ ist. Nimmt man zunächst $b=0$, so kann man, unbeschadet der Allgemeinheit, auch $a=1$

setzen, und man erhält

$$A_3\left(\frac{1}{c+\partial x}\right) = \int (l(c+\partial x))^2 \left(\frac{\partial . dx}{1+c+\partial x} - \frac{\partial . dx}{c+\partial x}\right),$$

und nach Ausführung der Integration,

$$A_3\left(\frac{1}{c+\partial x}\right) = A_3(c+\partial x) - \tfrac{1}{3}(l(c+\partial x))^3 + C,$$

oder, wenn $c+\partial x$ in $x$ verwandelt wird,

$$A_3\left(\frac{1}{x}\right) = A_3(x) - \tfrac{1}{3}(lx)^3 + C.$$

Die Constante dieser Formel ist für die beiden Intervalle von $x = -\infty$ bis $x = 0$ und von $x = 0$ bis $x = +\infty$ besonders zu bestimmen, weil für die Grenzwerthe $x = \pm\infty$ und $x = 0$ Discontinuität der in der Formel vorkommenden Functionen eintritt. Setzt man aber, um die Constante in dem ersten Intervalle zu bestimmen, $x = -1$, und in dem zweiten Intervalle $x = +1$, so erhält man beidemale $C = 0$. Es ist also für jeden beliebigen Werth des $x$ die Formel

$$91. \quad A_3(x) - A_3\left(\frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{3}(lx)^3$$

gültig. Nimmt man zweitens $b + \partial = 0$, so erhält man

$$A_3\left(\frac{a+bx}{c-bx}\right) = \int \left(l\frac{a+bx}{c-bx}\right)^2 \frac{b\,dx}{c-bx},$$

oder, wenn $a+bx = (a+c)z$ gesetzt wird, was $c-bx = (a+c)(1-z)$ giebt,

$$A_3\left(\frac{z}{1-z}\right) = \int \left(l\frac{z}{1-z}\right)^2 \frac{dz}{1-z},$$

also, entwickelt,

$$A_3\left(\frac{z}{1-z}\right) = \int (lz)^2 \frac{dz}{1-z} - 2\int lz\, l(1-z) \frac{dz}{1-z} + \int (l(1-z))^2 \frac{dz}{1-z};$$

und, da man durch theilweise Integration

$$-2\int lz\, l(1-z) \frac{dz}{1-z} = lz(l(1-z))^2 - \int (l(1-z))^2 \frac{dz}{z}$$

findet, so erhält man, indem man diese Integrale durch die Function $A_3$ und Logarithmen ausdrückt:

$$A_3\left(\frac{z}{1-z}\right) = -A_3(-z) - A_3(z-1) + lz(l(1-z))^2 - \tfrac{1}{3}(l(1-z))^3 + C.$$

Die Constante dieser Formel ist wieder für die beiden Intervalle von $z = -\infty$ bis $z = +1$, und von $z = +1$ bis $z = +\infty$ besonders zu bestimmen, weil für die Werthe $z = 1$, $z = +\infty$ und $z = -\infty$ die Continuität unterbrochen wird. Setzt man $z = 0$, so hat man $C = A_3(-1)$, in den Grenzen $z = -\infty$ und

$z=+1$; setzt man aber $z=2$, so erhält man $C=2\Lambda_3(-2)+\Lambda_3(+1)$ in den Grenzen $z=+1$ und $z=+\infty$. Diese beiden Werthe der Constante sind aber in der That nicht verschieden von einander. Um dies zu zeigen, setze ich $z=\frac{1}{2}$, welchem Werthe, da er in dem ersten Intervalle liegt, der Werth der Constante $C=\Lambda_3(-1)$ zukommt. Dies giebt $\Lambda_3(1)$ $=-2\Lambda_3(-\frac{1}{2})-\frac{2}{3}(l2)^3+\Lambda_3(-1)$. Setzt man aber in der Gleichung (91.) $x=-2$, so hat man $\Lambda_3(-2)-\Lambda_3(-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}(l2)^3$, und wenn man aus diesen beiden Gleichungen $\Lambda_3(-\frac{1}{2})$ eliminirt, so hat man $\Lambda_3(-1)=$ $2\Lambda_3(-2)+\Lambda_3(+1)$, welche Gleichung zeigt, dafs die beiden Werthe des $C$ einander gleich sind. Man hat daher, wenn $z$ in $x$ verwandelt wird, für jedes beliebige $x$ allgemeingültig die Formel

92. $$\Lambda_3\left(\frac{x}{1-x}\right)+\Lambda_3(x-1)+\Lambda_3(-x)=lx(l(1-x))^2-\tfrac{1}{3}(l(1-x))^3+\Lambda_3(-1).$$

Diese Formel, welcher man noch einige andere Gestalten geben kann, indem man die darin vorkommenden Functionen nach der Formel (91.) verwandelt, und die Formel (91.) selbst, sind die beiden einzigen, welche man erhält, wenn man in $\Lambda_3(x)$ statt $x$ eine rationale Function vom ersten Grade setzt. Eine dieser entsprechende Formel findet sich in *Legendre Exercices de calcul intégral;* alle übrigen Formeln aber, welche wir noch entwickeln werden, sind für neu zu erachten. Da die Substitution einer rationalen gebrochenen Function vom ersten Grade nur diese beiden Formeln gegeben hat, welche nur eine einzige unabhängige Variable enthalten und deshalb weniger allgemein sind als die Formeln für die Function $\Lambda_2(x)$, welche wir oben entwickelt haben: so sind wir hier genöthigt, zu der Substitution einer rationalen gebrochenen Function zweiten Grades unsere Zuflucht zu nehmen. Wird eine solche aber in ihrer allgemeinsten Form substituirt, so wächst die daraus entspringende Formel zu einer enormen Gröfse an und wird dadurch fast ganz unbrauchbar. Deshalb wollen wir dieser rationalen Function folgende speciellere bestimmte Form geben:

$$z=-\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}.$$

Hierdurch wird

$$1+z=\frac{(y-x)(1-xy)}{y(1-x)^2},\qquad \frac{dz}{1+z}=\frac{-dx}{y-x}-\frac{y\,dx}{1-yx}+\frac{2dx}{1-x};$$

man erhält also

$$\Lambda_3\left(-\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right)=\int\left(l\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right)^2\left(\frac{-dx}{y-x}-\frac{y\,dx}{1-yx}+\frac{2dx}{1-x}\right).$$

Wird nun dieses Integral genau nach den in §. 10. gegebenen Regeln zerlegt, so findet man die gesuchte Formel ohne andere Schwierigkeiten als etwas weitläuftige Rechnungen. Um jedoch auch diese so viel es sich thun läfst zu vermeiden, wollen wir diese Zerlegung auf folgende, dem bestimmten Falle angemessenere Art ausführen. Da für jeden beliebigen Werth von $a$ und $b$,

$$(l\,ab^2)^2+(l\,a)^2-2(l\,ab)^2-2(lb)^2 = 0$$

ist, so hat man, wenn man $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{1-y}{1-x}$ setzt,

$$\left(l\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right)^2+\left(l\,\frac{x}{y}\right)^2-2\left(l\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)^2-2\left(l\frac{1-y}{1-x}\right)^2 = 0$$

und, wenn man $a=xy$, $b=\frac{1-y}{y(1-x)}$ setzt,

$$\left(l\,\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right)^2+(l\,xy)^2-2\left(l\frac{x(1-y)}{1-x}\right)^2-2\left(l\frac{1-y}{y(1-x)}\right)^2 = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser beiden Gleichungen mit $\frac{-dx}{y-x}+\frac{dx}{1-x}$, die zweite mit $\frac{-y\,dx}{1-yx}+\frac{dx}{1-x}$ und addirt beide, so erhält man, bei gehöriger Anordnung der einzelnen Theile:

$$\begin{aligned}&\left(l\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right)^2\left(\frac{-dx}{y-x}-\frac{y\,dx}{1-yx}+\frac{2\,dx}{1-x}\right)-\left(l\,\frac{x}{y}\right)^2\frac{dx}{y-x}-(lxy)^2\frac{y\,dx}{1-yx}\\ &-2\left(l\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)^2\left(\frac{-dx}{y-x}+\frac{dx}{1-x}\right)-2\left(l\frac{x(1-y)}{1-x}\right)^2\left(\frac{-y\,dx}{1-yx}+\frac{dx}{1-x}\right)\\ &\qquad\qquad-2\left(l\frac{1-y}{1-x}\right)^2\left(\frac{-dx}{y-x}+\frac{dx}{1-x}\right)\\ &-2\,l\left(\frac{1-y}{y(1-x)}\right)^2\left(\frac{-y\,dx}{1-yx}+\frac{dx}{1-x}\right)+\left(\left(l\,\frac{x}{y}\right)^2+(l\,xy)^2\right)\frac{dx}{1-y} = 0.\end{aligned}$$

Die einzelnen Glieder dieser Formel sind hier so zusammengestellt, dafs sie sich alle unmittelbar durch die Function $\Lambda_3$ integriren lassen. Führt man daher die Integration aus, so hat man

$$\begin{aligned}&\Lambda\left(-\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right)+\Lambda_3\left(-\frac{x}{y}\right)+\Lambda_3(-xy)-2\Lambda_3\left(-\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)-2\Lambda_3\left(\frac{x(1-y)}{1-x}\right)\\ &\quad-2\Lambda_3\left(-\frac{1-y}{1-x}\right)-2\Lambda_3\left(\frac{1-y}{y(1-x)}\right)-2\Lambda_3(-x)-2(ly)^2\,l(1-x)+C.\end{aligned}$$

Da einige der in dieser Formel vorkommenden Functionen unendlich grofs werden, sobald $x$ den Werth $+1$ erhält, so kann die Constante auch hier wieder zwei von einander verschiedene Werthe haben, von welchen der eine dem Intervalle von $x=-\infty$ bis $x=+1$, der andere dem Intervalle von

$x = +1$ bis $x = +\infty$ zugehört. Es wird sich aber zeigen, dafs in dieser Formel, so wie in allen, welche wir für die Function $\Lambda_3(x)$ herleiten werden, die Constante in den verschiedenen Intervallen des $x$ stets unverändert bleibt; wodurch sich diese Formeln von den für das entsprechende logarithmische Integral der zweiten Ordnung im ersten Theile gefundenen wesentlich unterscheiden. Setzt man, um die Constante in dem ersten Intervalle zu bestimmen, $x = 0$, so erhält man

$$-2\Lambda_3(y-1) - 2\Lambda_3\left(\frac{1-y}{y}\right) + C = 0.$$

Um nun die Constante in dem anderen Intervalle von $x = +1$ bis $x = \infty$ zu bestimmen, nehme ich einen der Grenzwerthe, nämlich $x = m$, wo $m$ unendlich grofs ist. Da nach Formel (91.)

$$\Lambda_3(-my) = \tfrac{1}{3}(lmy)^3; \quad \Lambda_3\left(-\frac{m}{y}\right) = \tfrac{1}{3}\left(l\frac{m}{y}\right)^3; \quad \Lambda_3(-m) = \tfrac{1}{3}(lm)^3$$

für $m = \infty$ ist, so giebt dieser Werth

$$\tfrac{1}{3}\left(l\frac{m}{y}\right)^3 + \tfrac{1}{3}(lmy)^3 - 2\Lambda_3\left(\frac{1-y}{y}\right) - 2\Lambda_3(y-1) - \tfrac{2}{3}(lm)^3 - 2(ly)^2 lm + C = 0,$$

oder, da $m$ sich von selbst hinweghebt,

$$-2\Lambda_3\left(\frac{1-y}{y}\right) - 2\Lambda_3(y-1) + C = 0;$$

welches genau mit dem in dem anderen Intervalle des $x$ geltenden Werthe übereinstimmt. Setzt man in der Formel (91.) $x = 1-y$, so sieht man sogleich, dafs der Werth des $C$ auch folgende Form annimmt:

$$C = -2\Lambda_3(-y) - \tfrac{2}{3}(ly)^3 + 2(ly)^2 l(1-y) + 2\Lambda_3(-1).$$

Substituirt man nun diesen Werth des $C$, so läfst sich die gefundene Formel folgendermafsen darstellen:

$$93. \quad \Lambda_3\left(-\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2} + \Lambda_3\left(-\frac{x}{y}\right) + \Lambda_3(-xy)$$
$$= 2\Lambda_3\left(-\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) + 2\Lambda_3\left(\frac{x(1-y)}{1-x}\right) + 2\Lambda_3\left(-\frac{1-y}{1-x}\right) + 2\Lambda_3\left(\frac{1-y}{y(1-x)}\right)$$
$$+ 2\Lambda_3(-x) + 2\Lambda_3(-y) - 2(ly)^2 l\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \tfrac{2}{3}(ly)^3 - 2\Lambda_3(-1).$$

Diese Formel soll nun für die logarithmischen Integrale dritter Ordnung eben so als Grundformel benutzt werden, wie wir die Formel (2.) als Grundformel für die ganze Theorie der logarithmischen Integrale zweiter Ordnung gebraucht haben. Sie ist zwar im Vergleich mit jener complicirt zu nennen, weil sie neun solche Functionen in sich enthält: aber dies liegt in der Natur der Sache, da die einfachen Eigenschaften der logarithmischen Inte-

grale immer mehr verschwinden, je höher die Ordnung derselben wird. Es giebt zum Beispiel für die einfache logarithmische Function von der dritten Ordnung $\Lambda_3(x)$ aufser der Formel (91.) keine andere, in welcher nur zwei solche Functionen mit einander verbunden wären, und aufser der Formel (92.) giebt es nur noch eine einzige, in welcher drei solche Functionen vorkommen, nämlich die Formel

$$94. \quad \Lambda_3(-x)^2 = 4\Lambda_3(-x) + 4\Lambda_3(+x),$$

welche man aus (93.) erhält, wenn man $y = x$ setzt. In allen übrigen Formeln, welche wir gefunden haben, kommen mehr als drei dieser Functionen vor. Einige der einfachsten sind folgende:

$$95. \quad \Lambda_3\left(\frac{4x}{(1-x)^2}\right) + 2\Lambda_3(x)$$
$$= 4\Lambda_3\left(\frac{2x}{1-x}\right) + 4\Lambda_3\left(\frac{-2}{1-x}\right) + 2\Lambda_3(-x) - 4\Lambda_3(-2),$$

welche Formel man aus (93.) erhält, wenn man $y = -1$ setzt; ferner

$$96. \quad \Lambda_3(x^3) + \Lambda_3\left(\frac{x}{(1-x)^3}\right)$$
$$= 2\Lambda_3\left(\frac{x^2}{1-x}\right) + 2\Lambda_3(-x(1-x)) + 6\Lambda_3(-x) + 9\Lambda_3(x) - 2(l(1-x))^3;$$

diese erhält man aus (93.), wenn man $y = 1 - x$ setzt und alsdann $x$ in $\frac{-x}{1-x}$ verwandelt, oder indem man $x = y^2$ setzt und alsdann $y$ in $-x$ verwandelt. Setzt man in (93.) $y = -x$ und wendet die Formel (94.) zur Vereinfachung an, so erhält man

$$97. \quad \Lambda_3(z^2) - \tfrac{1}{4}\Lambda_3(-z^2) + \Lambda_3(x^2) - \tfrac{1}{4}\Lambda_3(-x^2)$$
$$= 2\Lambda_3(xz) + 2\Lambda_3\left(\frac{z}{x}\right) + \tfrac{2}{3}(lx)^3 - 2(lx)^2 lz - \tfrac{1}{4}\Lambda_3(-1),$$

wo Kürze halber $\frac{1+x}{1-x} = z$ gesetzt ist.

Die Anzahl dieser specielleren Formeln läfst sich leicht beträchtlich vermehren, wenn einer der beiden Gröfsen $x$ oder $y$ andere, besondere Werthe gegeben werden; auch lassen sich dieselben in vielen anderen Gestalten darstellen und mannigfach unter einander verbinden. Von diesen Verbindungen wollen wir aber nur einer erwähnen, welche man aus (92. und 94.) leicht erhält, nemlich der Verbindung

$$98. \quad \Lambda_3(-x) =$$
$$\Lambda_3\left(\frac{x-1}{x}\right) - \Lambda_3(x-1) - \tfrac{1}{4}\Lambda_3\left(-\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\right) + (lx)^2 l(1-x) - \tfrac{1}{3}(lx)^3 + \Lambda_3(-1).$$

Diese Formel ist nemlich für die numerische Berechnung der Function $A_3 x$, von Wichtigkeit; wie wir alsbald zeigen werden.

## §. 12.

Die Function $A_3$ nimmt fortwährend ab, von $x = -\infty$ bis $x = -1$: von $x = -1$ bis $x = +\infty$ aber nimmt sie fortwährend zu; denn der erste Differenzialquotient $\frac{(A \pm x)^2}{1+x}$ ist in dem ganzen ersten Intervalle negativ, in dem zweiten Intervalle aber positiv. Für $x = -1$ hat diese Function ein Minimum, dessen numerischer Werth $A_3(-1) = -2{,}4041138063$ oder $A_3(-1) = 2S_3$ ist, wenn nach *Legendre* durch $S_3$ die Reihe $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$ bezeichnet wird. Da ferner $A_3(0) = 0$ ist, so folgt, dafs für alle positiven Werthe von $x$ auch $A_3(x)$ positiv ist, und die Formel (91.) zeigt, dafs wenn $x$ sehr grofs ist, $A_3(x)$ sehr nahe gleich $\frac{1}{6}(lx)^3$ wird. Für negative Werthe des $x$ ist $A_3(x)$ anfangs negativ, kehrt aber bald wieder ins Positive zurück und wird, auch wenn $x$ negativ sehr grofs ist, sehr nahe gleich $\frac{1}{6}(l-x)^3$. Die numerische Berechnung dieser Function wird durch die gefundenen Formeln aufserordentlich erleichtert; denn vermittelst derselben kann man jede Function $A_3(x)$ durch andere ausdrücken, in welchen das Element $x$ in bestimmte, sehr enge Grenzen eingeschlossen ist, so dafs eine ausreichende Tafel dieser Function nur ein sehr kleines Intervall umfassen dürfte. Zunächst kann man nemlich durch die Formel (91.) jede Function $A_3(x)$, in welcher der absolute Werth des $x$ gröfser als die Einheit ist, durch eine andere ausdrücken, in welcher $x$ in den Grenzen $-1$ und $+1$ liegt; ferner kann man nach der Formel (94.) jede solche Function mit positivem Elemente durch zwei andere ausdrücken, deren Elemente negativ sind, so dafs nur noch das Intervall von $-1$ bis $0$ zu berechnen bleibt. Dieses wird nun durch die Formel (98.) noch weiter eingeschränkt; denn durch dieselbe wird jede Function $A_3(x)$, deren Element $x$ in den Grenzen $-1$ und $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ liegt, auf drei andere reducirt, deren Elemente in den Grenzen $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ und $0$ liegen. Durch Anwendung der Formel (96.) kann man sogar die Grenzen dieses Intervalles wieder so weit verengern als man will. Da aber diese weiteren Reductionen zu weitläuftig sind, um praktisch mit gutem Erfolge angewendet zu werden, so übergehen wir dieselben.

Um nun $\Lambda_3(x)$ in Reihen zu entwickeln, verwandeln wir dieses Integral durch theilweise Integration folgendermaſsen:

$$\int\frac{(lx^2)dx}{1+x} = -(lx)^2 l(1+x) + 2lx\int\frac{lx\,dx}{1+x} + 2\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}l(1+x).$$

Wird $l(1+x)$ entwickelt und die doppelte Integration ausgeführt, so hat man

99. $\Lambda_3(x) = -(lx)^2 l(1+x) + 2lx.\Lambda_2(x) + 2\left(\frac{x}{1^3} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{3^3} - \frac{x^4}{4^3} + \ldots\right).$

Diese Reihen-Entwickelung, durch welche man $\Lambda_3(x)$ für alle Werthe des $x$ in den Grenzen $-1$ und $+1$ berechnen kann, setzt das entsprechende logarithmische Integral der zweiten Ordnung $\Lambda_2(x)$ als bekannt voraus. Ist dasselbe unbekannt, so muſs man dafür die Reihen-Entwickelung aus §. 3. substituiren, wodurch man erhält:

100. $$\Lambda_3(x) = (lx)^2 l(1+x) - 2lx\left(\frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots\right) + 2\left(\frac{x}{1^3} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{3^3} - \frac{x^4}{4^3} + \ldots\right).$$

Wenn man $x$ in $\frac{1}{x}$ verwandelt und alsdann $\Lambda_3\left(\frac{1}{x}\right)$ nach der Formel (91.) in $\Lambda_3(x) - \frac{1}{6}(lx)^3$ verwandelt, so erhält man eine Reihen-Entwickelung, welche nach negativen Potenzen von $x$ fortschreitet und welche dazu dient, diese Function für Werthe des $x$ zu berechnen, welche gröſser als 1 sind, nemlich die Reihen-Entwickelung

101. $$\Lambda_3(x) = -\tfrac{1}{6}(lx)^3 + (lx)^2 l(1+x) + 2lx\left(\frac{1}{1^2x} - \frac{1}{2^2x^2} + \frac{1}{3^2x^3} - \frac{1}{4^2x^4} + \ldots\right) + 2\left(\frac{1}{1^3x} - \frac{1}{2^3x^2} + \frac{1}{3^3x^3} - \frac{1}{4^3x^4} + \ldots\right).$$

Für den Fall, daſs $x$ dem Werthe $+1$ oder $-1$ sehr nahe liegt, convergiren diese Reihen nur sehr langsam. In diesem Falle muſs man, um dieselben mit Vortheil anwenden zu können, die Function $\Lambda_3(x)$, wie wir oben gezeigt haben, durch andere Functionen derselben Art ausdrücken, in welchen $x$ dem Werthe 0 näher liegt. Da dies aber Weitläuftigkeiten verursacht, so wollen wir für diesen Fall andere Reihen-Entwickelungen herleiten, welche nach Potenzen von $lx$ geordnet sind und deshalb grade für den Fall, daſs $x$ der Eins nahe liegt, sehr gut convergiren. Da diese Art der Reihen-Entwickelungen nicht nur dem logarithmischen Integrale dritter Ordnung $\Lambda_3(x)$, sondern eben so den entsprechenden logarithmischen Integralen aller Ordnungen zukommt, so wollen wir

dieselben sogleich allgemein für das Integral

$$A_n(x) = \int_0 \frac{(l \pm x)^{n-1}\, dx}{1+x}$$

geben. Setzt man $x = -e^z$, so verwandelt sich das Integral in

$$A_n(-e^z) = -\int_0 \frac{z^{n-1} \cdot e^z\, dz}{1-e^z} + A_n(-1).$$

Es ist aber, nach Potenzen von $z$ entwickelt,

$$\frac{-e^z}{1-e^z} = \frac{1}{z} + \tfrac{1}{2} + \frac{B_1 z}{1.2} - \frac{B_2 z^3}{1.2.3.4} + \frac{B_3 z^5}{1.2.3.4.5.6} - \dots;$$

wo $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, etc. die *Bernoulli*schen Zahlen sind. Wird nun diese Reihen-Entwickelung substituirt und die Integration ausgeführt, so hat man

$$A_n(-e^z) = A_n(-1) + \frac{z^{n-1}}{n-1} + \frac{z^n}{2.n} + \frac{B_1 z^{n+1}}{1.2(n+1)} - \frac{B_2 z^{n+3}}{1.2.3.4(n+3)} + \dots$$

Diese Reihe ist convergent in den Grenzen $x = -2\pi$ und $+2\pi$, wie man aus dem bekannten Gesetze ersieht, nach welchem die Reihe der *Bernoulli*schen Zahlen zunimmt. Auf ähnliche Weise hat man auch

$$A_n(e^z) = \int_0 \frac{z^{n-1}\, e^z\, dz}{1+e^z} + A_n(1),$$

und da bekanntlich

$$\frac{e^z}{1+e^z} = \tfrac{1}{2} + \frac{(2^2-1) B_1 z}{1.2} - \frac{(2^4-1) B_2 z^3}{1.2.3.4} + \frac{(2^6-1) B_3 z^5}{1.2.3.4.5.6}$$

ist, so erhält man ebenfalls

$$A_n(e^z) = A_n(1) + \frac{z^n}{2.n} + \frac{(2^2-1) B_1 z^{n+1}}{1.2(n+1)} - \frac{(2^4-1) B_2 z^{n+3}}{1.2.3.4(n+3)} + \dots;$$

welche Reihe in den Grenzen $z = -\pi$ und $z = +\pi$ convergirt. Für den besonderen Fall $n = 3$, um welchen es sich hier handelt, hat man daher

$$102. \quad A_3(-e^z)$$
$$= A_3(-1) + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{B_1 z^4}{1.2.4} - \frac{B_2 z^6}{1.2.3.4.6} + \frac{B_3 z^8}{1.2.3.4.5.6.8} - \dots,$$

$$103. \quad A_3(+e^z)$$
$$= A_3(+1) + \frac{z^3}{6} + \frac{(2^2-1) B_1 z^4}{1.2.4} - \frac{(2^4-1) B_2 z^6}{1.2.3.4.6} + \frac{(2^6-1) B_3 z^8}{1.2.3.4.5.6.8} - \dots$$

Bestimmte Werthe des $x$, für welche sich die Function $A_3(x)$ durch bekannte Functionen, namentlich durch Logarithmen und Kreisbogen ausdrücken liefse, sind bis jetzt noch nicht bekannt, obgleich schon *Jacob* und *Johann Bernoulli* und später *Euler* und andere Mathematiker darauf ausgegangen sind, besonders den Werth des $A_3(-1)$, oder was dasselbe ist, den Werth der Reihe $S_3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$

durch die Zahl $\pi$ oder durch Logarithmen auszudrücken. Auch von den hier gefundenen Formeln giebt keine einen solchen Ausdruck, weder für $x=-1$, noch für irgend einen anderen Werth des $x$. Zu bemerken ist in dieser Beziehung, dafs man aus dem gefundenen Werthe von $\Lambda_3(-1)$ sogleich die Werthe von $\Lambda_3(+1)$, $\Lambda_3(-2)$ und $\Lambda_3(-\frac{1}{2})$ ableiten könnte; denn nach den obigen Formeln ist $\Lambda_3(+1)=-\frac{3}{4}\Lambda_3(-1)$, $\Lambda_3(-2)=\frac{7}{4}\Lambda_3(-1)$ und $\Lambda_3(-\frac{1}{2})=\frac{7}{4}\Lambda_3(-1)-\frac{1}{6}(l2)^3$.

## §. 13.

Nachdem wir die Haupteigenschaften des einfachen logarithmischen Integrals dritter Ordnung $\Lambda_3(x)$ entwickelt haben, gehen wir zur Behandlung der allgemeineren, von zwei Elementen abhängigen Functionen $D_3(x,\alpha)$ und $E_3(x,\alpha)$ über. Da $D_3(x,\alpha)$ durch folgendes Integral definirt wird:

$$D_3(x,\alpha)=\int_0 \frac{(l\pm x)^2(\cos\alpha+x)\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2},$$

so hat man unmittelbar folgende Eigenschaften desselben:

$$D_3(x,-\alpha)=D_3(x,\alpha);\qquad D_3(x,\alpha+2\varkappa\pi)=D_3(x,\alpha);$$
$$D_3(x,\alpha+(2\varkappa+1)\pi)=D_3(-x,\alpha);\qquad D_3(x,0)=\Lambda_3(x);$$
$$D_3(x,\pi)=\Lambda_3(-x);\qquad D_3(x,\tfrac{1}{2}\pi)=\tfrac{1}{4}\Lambda_3(-x^2),$$

oder wenn $x=\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ gesetzt und $D_3\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)},\alpha\right)$ durch $D(u,\alpha)$ bezeichnet wird:

$$D_3(-u,-\alpha)=D_3(u,\alpha);\qquad D_3(u+\varkappa\pi,\alpha)=D_3(u,\alpha);$$
$$D_3(u,\alpha+\varkappa\pi)=D_3(u,\alpha);\qquad D_3(u,0)=\Lambda_3(-1);$$
$$D_3(u,\pi)=\Lambda_3(+1);\qquad D_3(u,\tfrac{1}{2}\pi)=\tfrac{1}{4}\Lambda_3(\operatorname{tang}^2u).$$

Wenn ferner $u$ und $\alpha$ zugleich verschwinden, so geht $D_3(u,\alpha)$ in $\Lambda_3(-z)$ über, wo $z$ der Gr nzwerth ist, welchen der Quotient $\frac{u}{u+\alpha}$ erhält, wenn $u$ und $\alpha$ zugleich verschwinden, oder in

$$D_3(u.\omega,\alpha.\omega)=\Lambda_3\left(\frac{-u}{u+\alpha}\right),\text{ wenn }\omega\text{ unendlich klein ist.}$$

Die Differenzialquotienten des $D_3(x,\alpha)$, in Beziehung auf $x$ und $\alpha$, sind

$$\frac{dD_3(x,\alpha)}{dx}=\frac{(l\pm x)^2(x+\cos\alpha)}{1+2x\cos\alpha+x^2},$$
$$\frac{dD_3(x,\alpha)}{d\alpha}=\frac{-x(l\pm x)^2\sin\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2}+2E_2(x,\alpha).$$

Also ist das vollständige Differenzial

$$dD(x,\alpha) = \frac{(l\pm x)^2(x+\cos\alpha)\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} - \frac{x(l\pm x)\sin\alpha\,d\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2} + 2E_2(x,\alpha)\,d\alpha,$$

welches auch auf folgende einfachere Form gebracht werden kann:

$$dD(x,\alpha) = \tfrac{1}{2}(l\pm x)^2\,dl(1+2x\cos\alpha+x^2) + 2E_2(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Setzt man $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$, so erhält man hieraus für das vollständige Differenzial von $D(u,\alpha)$:

$$dD(u,\alpha) = \tfrac{1}{2}\Big(l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\Big)^2\,dl\Big(\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\Big) + 2E_2(u,\alpha)\,d\alpha.$$

Wir leiten nun zunächst wieder die Formeln her, durch welche $D_3(-x^n, n\alpha)$ und $D_3(+x^n, n\alpha)$ in andere Functionen von derselben Art zerlegt werden können; denn diese Formeln kommen den logarithmischen Integralen $D$ und $E$ aller Ordnungen zu. Da

$$D_3(-x^n, n\alpha) = n^2\int_0 \frac{(l\pm x)^2(x^n-\cos n\alpha)\,n x^{n-1}\,dx}{1-2x^n\cos n\alpha+x^{2n}}$$

ist, so hat man, wenn der rationale Bruch unter dem Integrationszeichen in seine Partialbrüche zerlegt wird, und wenn diese einzeln integrirt werden:

104. $$D_3(-x^n, n\alpha) = \sum_0^{n-1}{}_x\, n^2 . D_3\Big(-x, \alpha+\frac{2x\pi}{n}\Big),$$

und wenn $\alpha$ in $\alpha+\frac{\pi}{n}$ verwandelt wird,

105. $$D_3(+x^n, n\alpha) = \sum_0^{n-1}{}_x\, n^2 D_3\Big(-x, \alpha+\frac{(2x+1)\pi}{n}\Big).$$

Setzt man in $D_3(x,\alpha)$, $\frac{1}{x}$ statt $x$, so erhält man

$$D_3\Big(\frac{1}{x},\alpha\Big) = \int (l\pm x)^2\Big(\frac{(x+\cos\alpha)\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} - \frac{dx}{x}\Big),$$

und wenn die Integration ausgeführt wird:

$$D_3\Big(\frac{1}{x},\alpha\Big) = D_3(x,\alpha) - \tfrac{1}{3}(l\pm x)^3 + C.$$

Da für $x=0$ die Continuität der in der Formel vorkommenden Functionen unterbrochen wird, so mufs die Constante für die beiden Intervalle von $x = -\infty$ bis $0$ und von $x=0$ bis $+\infty$ besonders bestimmt werden. Setzt man aber $x=-1$ und $x=+1$, so zeigt sich, dafs die Constante in beiden Fällen gleich 0 ist. Deshalb hat man

106. $$D_3(x,\alpha) - D_3\Big(\frac{1}{x},\alpha\Big) = \tfrac{1}{3}(l\pm x)^3.$$

Setzt man $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$, so kann man, nach der anderen Art der Bezeichnung, diese Formel auch folgendermaßsen darstellen:

$$107. \quad D_3(u,\alpha) - D_3(-u-\alpha,\alpha) = \tfrac{1}{6}\Big(l\frac{\pm\sin u}{\sin(u+\alpha)}\Big)^3.$$

Die übrigen Formeln für die Function $D_3(x,\alpha)$ entwickeln wir aus den bereits gefundenen Formeln für die einfache Function $\Lambda_3(x)$, indem wir das Element $x$ imaginär nehmen und alsdann diese Functionen in ihre realen und imaginären Theile zerlegen. Setzt man so zunächst in Formel (92.) $xe^{\alpha i}$ statt $x$ und $1-xe^{\alpha i} = re^{-ui}$ und zerlegt diese Functionen in ihre realen und imaginären Theile, von welchen hier nur die realen berücksichtigt werden, so erhält man

$$D_3\Big(\frac{x}{r}, \alpha+u\Big) + D_3(-r,u) + D_3(-x,\alpha) = L,$$

wo die logarithmischen Integrale zweiter und erster Ordnung, welche in der Formel vorkommen können, mit $L$ bezeichnet sind. Da $1-xe^{\alpha i} = re^{-ui}$ ist, so ist

$$x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \quad r = \frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}, \quad \frac{x}{r} = \frac{\sin u}{\sin\alpha},$$

und deshalb kann, nach der anderen Art der Bezeichnung, diese Formel auch folgendermaßsen dargestellt werden:

$$D_3(-u,\alpha+u) + D_3(\alpha,u) + D_3(u,\alpha) = L.$$

Differenziirt man jetzt in Beziehung auf $u$, so erhält man

$$\Big(l\frac{\sin u}{\sin\alpha}\Big)^2\cotg(u+\alpha) + 2E_2(-u,\alpha+u) + \Big(l\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\Big)^2(\cotg u - \cotg(u+\alpha))$$
$$+ 2E_2(u,\alpha) - \Big(l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\Big)^2\cotg(u+\alpha) = \frac{dL}{du}.$$

Die beiden Functionen $E_2$ fallen von selbst hinweg, weil nach Formel (69.) §. 8. $E(u,\alpha) = E(u,-\alpha-u)$ ist. Das Uebrige aber vereinfacht sich leicht, so dafs man erhält:

$$\frac{dL}{du} = -2l\Big(\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\Big)l\Big(\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\Big)\cotg(u+\alpha) + \Big(l\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\Big)^2\cotg u.$$

Die Integration giebt hierauf

$$L = l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\Big(l\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\Big)^2 - \tfrac{1}{3}\Big(l\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\Big)^3 + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, bemerke ich, dafs wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ beide in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, die Continuität der in der Formel vorkommenden Functionen niemals unterbrochen wird und dafs also die Con-

stante dann nur einen bestimmten Werth haben kann. Setzt man, um diesen zu bestimmen, $u=0$, so erhält man $C=\Lambda_3(-1)$. Dies giebt die Formel

$$108.\quad D_3(-u, \alpha+u)+D_3(\alpha, u)+D_3(u, \alpha)$$
$$= l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\left(l\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(l\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}\right)^3+\Lambda_3(-1)$$

für jeden beliebigen Werth des $u$ und $\alpha$; denn obgleich die Constante unter der Voraussetzung gefunden worden ist, dafs $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, so gilt doch dieser Werth der Constante ganz allgemein, da man $\alpha$ und $u$ um beliebige Vielfache von $\pi$ vermehren und vermindern kann, ohne dafs die Formel sich änderte.

Um nun auf ähnliche Weise auch aus der allgemeinen Grundformel für die Function $\Lambda_3$ die entsprechende Formel für die Function $D_3$ herzuleiten, verwandle man in der Formel (93.) $x$ in $x e^{\alpha i}$ und $y$ in $y e^{\beta i}$ und setze überdies $1-x e^{\alpha i}=r e^{-ui}$ und $1-y e^{\beta i}=r e^{-vi}$. Werden nun die einzelnen Functionen in ihre realen und imaginären Theile zerlegt, so erhält man, wenn hier nur die realen Theile berücksichtigt werden, folgende Formel:

$$D_3\left(-\frac{x\varrho^2}{y r^2}, \alpha-\beta+2u-2v\right)+D_3\left(-\frac{x}{y}, \alpha-\beta\right)+D_3(-x.y, \alpha+\beta)=$$
$$2D_3\left(-\frac{x\varrho}{y r}, \alpha-\beta+u-v\right)+2D_3\left(\frac{x\varrho}{r}, \alpha+u-v\right)+2D_3\left(-\frac{\varrho}{r}, u-v\right)$$
$$+2D_3\left(-\frac{\varrho}{y r}, \beta+v-u\right)+2D_3(-x, \alpha)+2D_3(-y, \beta)+L,$$

wo $L$ die logarithmischen Integrale von der zweiten und ersten Ordnung bezeichnet, welche in der Formel vorkommen können. Dieser Theil $L$ wird am leichtesten durch Differenziation der ganzen Formel gefunden; wodurch solche zugleich einen eigenthümlichen, von der Betrachtung des Imaginären unabhängigen Beweis erhält. Um aber die Differenziation mit Leichtigkeit ausführen zu können, treffen wir noch folgende Vorbereitungen. Aus $1-x e^{\alpha i}=r e^{-ui}$ und $1-y e^{\beta i}=\varrho e^{-vi}$ folgt

$$1-2x\cos\alpha+x^2=r^2;\quad 1-2y\cos\beta+y^2=\varrho^2.$$

Aufserdem führen wir folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$1-2xy\cos(\alpha+\beta)+x^2y^2=p^2;\quad 1-2\frac{x}{y}\cos(\alpha-\beta)+\frac{x^2}{y^2}=q^2.$$

Hierdurch wird

$$1-2\frac{x\varrho}{yr}\cos(\alpha-\beta+u-v)+\frac{x^2\varrho^2}{y^2r^2}=\frac{q^2}{r^2};\quad 1+\frac{2x\varrho}{r}\cos(\alpha+u-v)+\frac{x^2\varrho^2}{r^2}=\frac{p^2}{r^2};$$

$$1-\frac{2\varrho}{r}\cos(u-v)+\frac{\varrho^2}{r^2}=\frac{y^2.q^2}{r^2};\qquad 1+\frac{2\varrho}{yr}\cos(\beta+v-u)+\frac{\varrho^2}{y^2r^2}=\frac{p^2}{y^2r^2};$$

$$1-2\frac{x\varrho^2}{yr^2}\cos(\alpha-\beta+2u-2v)+\frac{x^2\varrho^4}{y^2r^4}=\frac{p^2.q^2}{r^4}.$$

Da in dem Differenziale der Function $D_3(x,\alpha)$ der Ausdruck $dl(1+2x\cos\alpha+x^2)$ vorkommt, so sind die einfachen Ausdrücke, welche diese leicht zu beweisenden Gleichungen gewähren, von sehr großem Vortheil für die Differenziation. In dem vollständigen Differenziale der Function $D_3(x,\alpha)$ ist ferner auch das logarithmische Integral zweiter Ordnung $E_2(x,\alpha)$ enthalten, welches nur dann verschwindet, wenn das zweite Element der zu differenziirenden Function constant ist. Da nun aus dem Endresultate diese logarithmischen Integrale zweiter Ordnung verschwinden, so wird es zweckmäßig sein, die Differenziation so einzurichten, daß dieselben gar nicht erst in die Rechnung hineinkommen. Dies wird erreicht, wenn $u$ und $v$ zugleich als variabel betrachtet werden, die Differenz $u-v$ aber als constant, so wie auch $\alpha$ und $\beta$ als constant. Das Differenzial der allgemeinen Formel, in Beziehung auf $u$ und $v$ genommen, jedoch so, daß $u-v$ constant ist, oder $du-dv=0$, läßt sich nun folgendermaßen darstellen:

$$\left(l\frac{x\varrho^2}{yr^2}\right)^2\left(\frac{dp}{p}+\frac{dq}{q}-\frac{2dr}{r}\right)+\left(l\frac{x}{y}\right)^2\frac{dq}{q}+(lxy)^2\frac{dp}{p}$$
$$=2\left(l\frac{x\varrho}{yr}\right)^2\left(\frac{dq}{q}-\frac{dr}{r}\right)+2\left(l\frac{x\varrho}{r}\right)^2\left(\frac{dp}{p}-\frac{dr}{r}\right)+2\left(l\frac{\varrho}{r}\right)^2\left(\frac{dq}{q}-\frac{dr}{r}+\frac{dy}{y}\right)$$
$$+2\left(l\frac{\varrho}{yr}\right)^2\left(\frac{dp}{p}-\frac{dr}{r}-\frac{dy}{y}\right)+2(lx)^2\frac{dr}{r}+2(ly)^2\frac{d\varrho}{\varrho}+dL.$$

Sammelt man jetzt die einzelnen Glieder, welche $\frac{dp}{p}$ enthalten, und eben so die, welche $\frac{dq}{q}$ enthalten, so verschwinden dieselben für sich, wie man sogleich aus der für jedes beliebige $a$ und $b$ gültigen Formel

$$(lab^2)^2+(la)^2-2(lab)^2-2(lb)^2=0$$

ersieht, von welcher wir schon oben Gebrauch gemacht haben. Die Glieder, welche $\frac{dr}{r}$ enthalten, verschwinden zwar nicht vollständig, werden aber leicht vereinfacht, so daß endlich nur folgender Ausdruck von $dL$ übrig bleibt:

$$dL=-2(ly)^2\left(\frac{d\varrho}{\varrho}-\frac{dr}{r}\right)-4l\left(\frac{\varrho}{r}\right)ly\frac{dy}{y}+2(ly)^2\frac{dy}{y},$$

woraus man durch Integration

$$L = -2(ly)^2 l\frac{\varrho}{r} + \tfrac{2}{3}(ly)^3 + \text{const.}$$

erhält. Die Constante welche nun zu bestimmen ist, kann zwar $u-v$ enthalten, weil dies bei der Differenziation als constant betrachtet worden ist: setzt man aber $u-v=\gamma$ oder $u=v+\gamma$, so kann die Constante nur die Gröfsen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ enthalten, aber nicht die Variable $v$. Wird $u=v+\gamma$ gesetzt, so haben die Gröfsen $x$, $y$, $r$ und $\varrho$ folgende Werthe:

$$x=\frac{\sin(v+\gamma)}{\sin(v+\gamma+\alpha)};\quad y=\frac{\sin v}{\sin(v+\beta)};\quad r=\frac{\sin\alpha}{\sin(v+\gamma+\alpha)};\quad \varrho=\frac{\sin\beta}{\sin(v+\beta)}.$$

Hieraus ersieht man, dafs nur dann in der allgemeinen Formel eine Discontinuität Statt haben kann, wenn, indem $v$ seinen Werth ändert, eine der Gröfsen $\sin(u+\gamma+\alpha)$, $\sin v$ und $\sin(v+\beta)$ gleich Null wird. In diesen Fällen könnte daher auch eine Aenderung der Constante Statt haben. Wir werden aber zeigen, dafs die Constante auch in diesen Fällen unverändert ihren Werth behält und dafs sie keine der Gröfsen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ enthält, sondern den einfachen, rein numerischen Werth $-2A_3(-1)$ hat. Um erstens zu zeigen, dafs die Constante unverändert bleibt, wenn $\sin(v+\gamma+\alpha)$ $=0$ wird, oder sein Vorzeichen ändert, setze ich $\sin(v+\gamma+\alpha)=\omega$, wo $\omega$ unendlich klein sein soll. Wird nun $\omega$ positiv unendlich klein angenommen, so mufs man den einen Werth der Constante erhalten, und wenn $\omega$ negativ ist, den andern: wenn aber $\omega$ ganz aus der Gleichung hinwegfällt, so sind beide Werthe einander gleich oder es tritt keine Aenderung der Constante ein. Die Annahme $\sin(v+\gamma+\alpha)=\omega$ giebt

$$x=\frac{-\sin\alpha}{\omega};\quad y=\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\gamma+\alpha-\beta)},\quad r=\frac{\sin\alpha}{\omega};\quad \varrho=\frac{-\sin\beta}{\sin(\gamma+\alpha-\beta)}.$$

Ferner ist nach Formel (106.) $D\left(\frac{z}{\omega},\alpha\right)=\frac{1}{6}\left(l\frac{z}{\omega}\right)^3$ für $\omega$ unendlich klein. Deshalb erhält man

$$\tfrac{1}{3}\left(l\frac{\sin\alpha}{\omega.y}\right)^3+\tfrac{1}{3}\left(l\frac{\sin\alpha\, y}{\omega}\right)^3 = 2D_3\left(\frac{\varrho}{y},\alpha-\beta+\gamma\right)+2D_3(-\varrho,\alpha+\gamma)$$
$$+\tfrac{2}{3}\left(l\frac{\sin\alpha}{\omega}\right)^3+2D_3(-y,\beta)-2(ly)^2 l\left(\frac{\varrho\,\omega}{\sin\alpha}\right)+\tfrac{2}{3}(ly)^3+C.$$

Aus dieser Gleichung hebt sich $\omega$ von selbst hinweg und es bleibt

$$0=2D_3\left(\frac{\varrho}{y},\alpha-\beta+\gamma\right)+2D_3(-\varrho,\alpha+\gamma)+2D_3(-y,\beta)-2(ly)^2 l\varrho$$
$$+\tfrac{2}{3}(ly)^3+C.$$

Die Constante bleibt also ungeändert, wenn $\sin(v+\gamma+\alpha)$, indem $v$ sich ändert, den Werth 0 passirt. Da ganz auf dieselbe Weise auch bewiesen wird, dafs die Constante ungeändert bleibt, wenn $\sin v$ oder $\sin(v+\beta)$ gleich Null wird, so wollen wir die Beweise hierfür nicht erst herschreiben, sondern diesen gefundenen Werth der Constante, welcher unter allen Umständen gültig ist, noch durch Formel (108.) in seiner einfachsten Gestalt darstellen. Setzt man in der Formel (108.) $-\alpha-\gamma$ statt $u$, und $\beta$ statt $\alpha$, so stimmt dieselbe genau mit der Gleichung für die Constante überein und man erhält aus der Vergleichung beider sogleich $C=-2\Lambda_3(-1)$. Die jetzt völlig bestimmte Grundformel für das logarithmische Integral dritter Ordnung $D_3(x,\alpha)$ kann nun folgendermafsen dargestellt werden:

109. $$D_3\left(-\frac{x\varrho^2}{yr^2},\alpha-\beta+2u-2v\right)+D_3\left(-\frac{x}{y},\alpha-\beta\right)+D_3(-xy,\alpha+\beta)$$
$$=2D_3\left(-\frac{x\varrho}{yr},\ \alpha-\beta+u-v\right)+2D_3\left(\frac{x\varrho}{r},\ \alpha+u-v\right)+2D_3\left(-\frac{\varrho}{r},u-v\right)$$
$$+2D_3\left(\frac{\varrho}{yr},\beta+v-u\right)+2D_3(-x,\alpha)+2D_3(-y,\beta)-2(ly)^2 l\left(\frac{\varrho}{r}\right)$$
$$+\tfrac{2}{3}(ly)^3-2\Lambda_3(-1),$$
wenn $x=\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}$, $y=\frac{\sin v}{\sin(v+\beta)}$, $r=\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)}$, $\varrho=\frac{\sin\beta}{\sin(v+\beta)}$.

Wir haben bisher den logarithmischen Integralen, welche in dieser Formel enthalten sind, die Form $D_3(x,\alpha)$ gelassen: sie können aber auch auf einfache Weise auf die Form $D_3(u,\alpha)$ gebracht werden. Zu diesem Zwecke sind zwei Hülfswinkel nöthig, welche durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{xy\sin(\alpha+\beta)}{1-xy\cos(\alpha+\beta)},\qquad \operatorname{tang}\psi=\frac{x\sin(\alpha-\beta)}{y-x\cos(\alpha-\beta)}.$$

Durch diese Winkel wird, wie leicht zu beweisen ist,

$$xy=\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)},\qquad \frac{x}{y}=\frac{\sin\psi}{\sin(\psi+\alpha-\beta)},$$
$$\frac{x\varrho}{r}=\frac{-\sin(\varphi-u)}{\sin(\varphi+\alpha-v)},\qquad \frac{x\varrho}{yr}=\frac{\sin(\psi-u)}{\sin(\psi+\alpha-\beta-v)},$$
$$\frac{\varrho}{yr}=\frac{-\sin(\varphi+\beta-u)}{\sin(\varphi-v)},\qquad \frac{\varrho}{r}=\frac{\sin(\psi-\beta-u)}{\sin(\psi-\beta-v)},$$
$$\frac{x\varrho^2}{yr^2}=\frac{\sin(\varphi+\psi-2u)}{\sin(\varphi+\psi+\alpha-\beta-2v)}.$$

Substituirt man diese Werthe, so hat man nach der oben eingeführten einfacheren Art der Bezeichnung:

110. $D_3(\Phi+\psi-2u,\alpha-\beta+2u-2v)+D_3(\psi,\alpha-\beta)+D_3(\Phi,\alpha+\beta)$
$=2D_3(\psi-u,\alpha-\beta+u-v)+2D_3(\Phi-u,\alpha+u-v)+2D_3(\psi-\beta-u,u-v)$
$+2D_3(\Phi+\beta-u,-\beta+u-v)+2D_3(u,\alpha)+2D_3(v,\beta)$
$-2\left(l\frac{\sin v}{\sin(v+\beta)}\right)^2 l\left(\frac{\sin\beta\sin(u+\alpha)}{\sin\alpha\sin(v+\beta)}\right)+\frac{2}{3}\left(l\frac{\sin v}{\sin(v+\beta)}\right)^3-2\Lambda_3(-1).$

Aus dieser allgemeinen Formel wollen wir nun wieder einige der merkwürdigsten speciellen Fälle entwickeln. Setzt man $\beta=\alpha$ und $v=u+\alpha$, so wird $\Phi=u$ und $\psi=0$ und man erhält

111. $D\,(u,2\alpha)=2D_3(u,\alpha)+2D_3(u+\alpha,\alpha)+\Lambda_3\left(\frac{\sin u}{\sin(u+2\alpha)}\right)$
$-\frac{1}{2}\Lambda_3\left(\frac{-\sin u\sin(u+2\alpha)}{\sin^2(u+\alpha)}\right)+D_3(-\alpha,2\alpha)-\frac{2}{3}\left(l\frac{\sin(u+\alpha)}{\sin(u+2\alpha)}\right)^3-\Lambda_3(-1).$

Wenn man die Functionen $D_3$, welche in dieser Formel enthalten sind, nach Formel (107.) umformt, so kann man derselben noch einige andere Gestalten geben, z. B.

112. $D_3(u,2\alpha)=2D_3(u,\alpha)+2D_3(-u-2\alpha,\alpha)+\Lambda_3\left(\frac{\sin u}{\sin(u+2\alpha)}\right)$
$-\frac{1}{2}\Lambda_3\left(\frac{-\sin u\sin(u+2\alpha)}{\sin^2(u+\alpha)}\right)-2D_3(-2\alpha,\alpha),$

113. $D_3(u-\alpha,2\alpha)=2D_3(u,\alpha)+2D_3(-u,\alpha)+\Lambda_3\left(\frac{\sin(u-\alpha)}{\sin(u+\alpha)}\right)$
$-\frac{1}{2}\Lambda_3\left(\frac{-\sin(u+\alpha)\sin(u-\alpha)}{\sin^2 u}\right)-\frac{1}{3}\left(l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)^3-\frac{1}{3}\left(l\frac{\sin u}{\sin(u-\alpha)}\right)^3$
$+D_3(-\alpha,2\alpha)-\Lambda_3(-1).$

Eine andere, noch ziemlich einfache Formel erhält man aus der allgemeinen Formel (110.), wenn man $\beta=\alpha$, $v=\frac{1}{2}\pi-u$ nimmt, wodurch $\psi=0$ und $\Phi=2u$ wird, nemlich

114. $D_3(2u,2\alpha)=2D_3(u,\alpha)+2D_3(u+\frac{1}{2}\pi,\alpha)+2D_3(u,\alpha+\frac{1}{2}\pi)$
$+2D_3(u+\frac{1}{2}\pi,\alpha+\frac{1}{2}\pi)-\Lambda_3\left(\frac{-\operatorname{tang}u}{\operatorname{tang}(u+\alpha)}\right)-\Lambda_3(\operatorname{tang}u\operatorname{tang}(u+\alpha))$
$+\frac{1}{4}\Lambda_3(\operatorname{tang}^2u)+\frac{1}{4}\Lambda_3(\operatorname{tang}^2(u+\alpha))+\frac{2}{3}(l\operatorname{tang}(u+\alpha))^3$
$-2\left(l\frac{\cos u}{\cos(u+\alpha)}\right)(l\operatorname{tang}(u+\alpha))^2-2\Lambda_3(-1).$

In der Formel, welche wir jetzt aus der allgemeinen Formel (110.) herleiten werden, spielt die specielle Function $D_3(\frac{1}{2}(\pi-\alpha),\alpha)$ eine Hauptrolle. Diese steht zu der allgemeinen Function $D_3(u,\alpha)$ in einem ähnlichen Verhältnisse, wie bei den logarithmischen Integralen zweiter Ordnung $E(\frac{1}{2}(\pi-\alpha),\alpha)$ zu $E(u,\alpha)$, und deshalb wollen wir, wie wir oben $E(\frac{1}{2}(\pi-\alpha),\alpha)$ einfach durch $E'(\alpha)$ bezeichnet haben, so auch hier $D_3(\frac{1}{2}(\pi-\alpha),\alpha)$ einfach durch

$D_3(\alpha)$ bezeichnen. Für die logarithmischen Integrale zweiter Ordnung konnte $E(u, \alpha)$ vollständig durch die einfache Function $E'(\alpha)$ ausgedrückt werden: hier aber, für die logarithmischen Integrale dritter Ordnung, kann nicht jedes Integral $D_3(u, \alpha)$ für sich selbst durch die einfache Function $D'_3(\alpha)$ ausgedrückt werden, sondern nur die Summe zweier zusammengehörigen Integrale; wie wir sogleich zeigen werden. Setzt man nämlich in der allgemeinen Formel (110.) $u = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ und $v = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$, was $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta)$ und $\psi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta)$ giebt, so erhält man, wenn man von der angegebenen einfacheren Bezeichnung Gebrauch macht:

$$115.\quad D_3(\tfrac{1}{2}\beta, \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)) + D_3(-\tfrac{1}{2}\beta, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)) = \tfrac{1}{4}D'_3(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{4}D'_3(\alpha+\beta)$$
$$- \tfrac{1}{2}D'_3(\alpha) - \tfrac{1}{2}D'_3(\beta) + \tfrac{1}{4}A_3\left(\frac{-\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}A_3(-1).$$

Setzt man hierin weiter $\beta = \pi$ und $2\alpha + \pi$ statt $\alpha$, so hat man

$$116.\quad D_3(\tfrac{1}{2}\pi, \alpha) = \tfrac{1}{8}D'_3(2\alpha) - \tfrac{1}{2}D'_3(\pi - 2\alpha) + \tfrac{1}{4}A_3\left(\frac{-1}{\cos^2\alpha}\right) + \tfrac{7}{16}A_3(-1).$$

Die Grund-Eigenschaften der Function $D'_3(\alpha)$, welche unmittelbar aus der Definition folgen, sind:

$$D'_3(-\alpha) = D'_3(\alpha),\quad D'_3(\alpha + 2k\pi) = D'_3(\alpha),\quad D'_3(0) = A_3(-1),$$
$$D'_3(\pi) = A_3(+1) = -\tfrac{4}{3}A_3(-1),$$

und da für $x = 1$, $D_3(-x, \alpha)$ in $D'_3(\alpha)$ übergeht, so hat man aus (104.) unmittelbar folgende Formel:

$$117.\quad D'_3(n\alpha) = n^2 \sum_0^{n-1}{}_k D'_3\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

deren specielle Fälle für $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ folgende sind:

$$D'_3(2\alpha) = 4D'_3(\alpha) + 4D'_3(\alpha + \pi),$$
$$D'_3(3\alpha) = 9D'_3(\alpha) + 9D'_3(\alpha + \tfrac{2}{3}\pi) + 9D'_3(\alpha + \tfrac{4}{3}\pi),$$
$$D'_3(4\alpha) = 16D'_3(\alpha) + 16D'_3(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) + 16D'_3(\alpha + \pi) + 16D'_3(\alpha + \tfrac{3}{2}\pi).$$

Andere specielle Formeln, welche man sich nach Belieben aus der allgemeinen Formel (110.) verschaffen kann, übergehen wir, da sie fast alle den hier gegebenen an Einfachheit nachstehen. Ueberhaupt bietet die Function $D_3(u, \alpha)$ nicht eine so grofse Mannigfaltigkeit einfacher Eigenschaften dar, als das entsprechende logarithmische Integral zweiter Ordnung; wovon wir den Grund in einer Schlufsbemerkung zu diesem Theile der Abhandlung zu zeigen gedenken.

§. 14.

Wir haben nun noch die einfachen Reihen-Entwickelungen herzuleiten, welche zur numerischen Berechnung der Function $D_3$ dienen. Hierzu wählen wir die ursprüngliche Form dieses Integrales, nämlich:

$$D_3(x, \alpha) = \int_0 \frac{(l\pm x)^2 (\cos\alpha + x)\, dx}{1+2x\cos\alpha + x^2}.$$

Setzt man der Kürze wegen $r^2 = 1+2x\cos\alpha+x^2$, so ist

$$D_3(x, \alpha) = \int_0 (l\pm x)^2\, d\,lr,$$

und hieraus hat man durch theilweise Integration:

$$D_3(x, \alpha) = lr(lx)^2 - 2lx\int\frac{dx}{x}lr + 2\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}lr.$$

Da aber bekanntlich

$$l(r) = \frac{x\cos\alpha}{1} - \frac{x^2\cos 2\alpha}{2} + \frac{x^3\cos 3\alpha}{3} - \dots$$

ist, so findet sich durch Ausführung der Integrationen:

118. $$D_3(x, \alpha) = (lx)^2 lr - 2lx\left(\frac{x\cos\alpha}{1^2} - \frac{x^2\cos 2\alpha}{2^2} + \frac{x^3\cos 3\alpha}{3^2} - \dots\right) + 2\left(\frac{x\cos\alpha}{1^3} - \frac{x^2\cos 2\alpha}{2^3} + \frac{x^3\cos 3\alpha}{3^3} - \dots\right).$$

Setzt man $\frac{1}{x}$ statt $x$ und nimmt $D_3\left(\frac{1}{x}, \alpha\right) = D_3(x,\alpha) - \frac{1}{3}(lx)^3$ nach Formel (106.), so erhält man folgende nach negativen Potenzen von $x$ geordnete Reihen-Entwickelung:

119. $$D_3(x, \alpha) = (lx)^2 lr - \tfrac{1}{3}(lx)^3 + 2lx\left(\frac{\cos\alpha}{1^2.x} - \frac{\cos 2\alpha}{2^2.x^2} + \frac{\cos 3\alpha}{3^2.x^3} - \dots\right) + 2\left(\frac{\cos\alpha}{1^3.x} - \frac{\cos 2\alpha}{2^3.x^2} + \frac{\cos 3\alpha}{3^3.x^3} - \dots\right).$$

Diese beiden Reihen-Entwickelungen reichen zur Berechnung der numerischen Werthe der Function $D_3(x, \alpha)$ aus, weil die eine convergirt, wenn $x<1$, die andere, wenn $x>1$ ist; vom Vorzeichen abgesehen. In dem Falle aber, wo $x$ einem der Werthe $+1$ oder $-1$ nahe liegt, convergiren diese Reihen nur sehr langsam. In diesem Falle ist es daher vortheilhaft, die Function $D(x, \alpha)$ in eine Reihe zu entwickeln, welche nach Potenzen von $l(\pm x)$ geordnet ist, oder, was dasselbe ist, die Functionen $D_3(-e^z, \alpha)$ und $D_3(+e^z, \alpha)$ nach Potenzen von $z$ zu entwickeln. Zu diesem Zwecke braucht man eine nach Potenzen von $z$ geordnete Entwickelung von

$$\frac{e^{2z} - e^z\cos\alpha}{1-2e^z\cos\alpha + e^{2z}}.$$

Dieser Ausdruck läfst sich auf folgende Form bringen:

$$\frac{e^{2x}-e^x\cos\alpha}{1-2e^x\cos\alpha+e^{2x}} = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\,\text{cotang}(\tfrac{1}{2}(\alpha+ix))-\tfrac{1}{2}i\,\text{cotang}(\tfrac{1}{2}(\alpha-ix)),$$

wo $i=\sqrt{-1}$. Hiernach erhält man unmittelbar durch Anwendung des *Taylor*schen Satzes:

$$\frac{e^{2x}-e^x\cos\alpha}{1-2e^x\cos\alpha+e^{2x}} = \tfrac{1}{2}\Big(1-\frac{d\,\text{cotang}\,\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^3\,\text{cotang}\,\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}-\ldots\Big).$$

Multiplicirt man nun mit $x^2.dx$ und integrirt, so hat man

$$180.\quad D_3(-e^x,\alpha)$$

$$= D_3(-1,\alpha)+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{x^3}{3}-\frac{d\,\text{cotang}\,\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{x^4}{1.4}+\frac{d^3\,\text{cotang}\,\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^3}\cdot\frac{x^6}{1.2.3.6}-\ldots\Big).$$

Die Differenzialquotienten von cotang $\frac{1}{2}\alpha$, welche in dieser Entwickelung vorkommen, haben folgende Werthe:

$$\frac{d\,\text{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha}=\frac{-2}{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2},\quad \frac{d^3\,\text{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^3}=\frac{-4(\cos\alpha+2)}{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^4},\quad \frac{d^5\,\text{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^5}=$$

$$\frac{-4(\cos2\alpha+26\cos\alpha+33)}{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^6},\quad \frac{d^7\,\text{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^7}=\frac{-4(\cos3\alpha+120\cos2\alpha+1191\cos\alpha+1208)}{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^8}.$$

Ueber das Gesetz der hierin vorkommenden Zahlencoefficienten sehe man *Euleri institutiones calculi differentialis Cap. VII. p. 486.* Die Reihen-Entwickelung von $D_3(+e^x,\alpha)$ erhält man aus dieser, wenn man $\alpha$ in $\alpha-\pi$ verwandelt. Dafs diese Reihen-Entwickelung convergirt, wenn $x$ klein genug genommen wird, ist leicht zu zeigen. Man kann aber auch die Grenzen genau finden, innerhalb deren sie convergirt; dieselben sind $x=-\alpha$ bis $x=+\alpha$, wenn $\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ liegt.

Wir haben nun noch die Reihen-Entwickelungen der Function $D_3(x,\alpha)$ für den besondern Fall herzuleiten, wo $x=-1$ ist, in welchem Falle wir statt $D_3(-1,\alpha)$ oder $D_3(\frac{1}{2}(\pi-\alpha),\alpha)$ das Zeichen $D'_3(\alpha)$ eingeführt haben. Setzt man in (118.) $x=-1$, so erhält man zunächst

$$181.\quad D'_3(\alpha)=-2\Big(\frac{\cos\alpha}{1^3}+\frac{\cos2\alpha}{2^3}+\frac{\cos3\alpha}{3^3}+\ldots\Big).$$

Diese Reihe aber ist wegen ihrer geringen Convergenz zur numerischen Berechnung nicht brauchbar. Eine sehr gut convergirende Reihe erhält man dagegen aus der oben gefundenen Entwickelung von $E'_2(\alpha)$, weil $\frac{dD'_3(\alpha)}{d\alpha}$ $=2E'_2(\alpha)$ und

$$E'_2(\alpha)=-\alpha l\alpha+\alpha+\frac{B_1\alpha^3}{1.2.3.2}+\frac{B_3\alpha^5}{1.2.3.4.5.4}+\frac{B_5\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.7.6}+\ldots$$

ist. Integrirt man diese Reihe und bestimmt die Constante durch den Werth

$\alpha = 0$, so hat man

$$122.\quad D'_3(\alpha) = A_3(-1) - \alpha^2 l\alpha + \tfrac{3}{2}\alpha^2 + \frac{B_1\alpha^4}{1.2.3.4.1} + \frac{B_2\alpha^6}{1.2.3.4.5.6.2} + \frac{B_3\alpha^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.3} + \dots$$

Nach der Formel $D'_3(2\alpha) = 4D'_3(\alpha) + 4D'_3(\pi-\alpha)$ erhält man hieraus auch folgende Entwickelung von $D'_3(\pi-\alpha)$:

$$123.\quad D'_3(\pi-\alpha) = A_3(+1) - \alpha^2 l2 + \frac{(2^2-1)B_1\alpha^4}{1.2.3.4.1} + \frac{(2^4-1)B_2\alpha^6}{1.2.3.4.5.6.2} + \frac{(2^6-1)B_3\alpha^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.3} + \dots$$

## §. 15.

Genau denselben Gang verfolgend, welchen wir für die Function $D_3(x,\alpha)$ genommen haben, untersuchen wir jetzt das andere von zwei Elementen abhängige logarithmische Integral dritter Ordnung

$$E_3(x,\alpha) = \int_0 \frac{(l\pm x)^2 \sin\alpha\,.\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}.$$

Unmittelbar aus der Definition ersieht man, dafs

$$E_3(x,-\alpha) = -E_3(x,\alpha),\qquad E_3(x,\alpha+2\varkappa\pi) = E_3(x,\alpha),$$
$$E_3(x,\alpha+(2\varkappa+1)\pi) = E_3(-x,\alpha),\qquad E_3(x,0) = 0.$$

Wenn $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$ gesetzt und $E_3\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)},\alpha\right)$ durch $E_3(u,\alpha)$ bezeichnet wird, so lassen sich diese Eigenschaften auch folgendermafsen darstellen:

$$E_3(-u,-\alpha) = -E_3(u,\alpha),\qquad E_3(u+\varkappa\pi,\alpha) = E_3(u,\alpha),$$
$$E_3(u,\alpha+\varkappa\pi) = E_3(u,\alpha),\qquad E_3(u,0) = 0.$$

Auch wenn $u$ und $\alpha$ zugleich verschwinden, ist $E_3(u,\alpha), = 0$. Das vollständige Differenzial der Function $E_3(x,\alpha)$, wenn die beiden Elemente $x$ und $\alpha$ zugleich als veränderlich genommen werden, ist

$$dE_3(x,\alpha) = \frac{(l\pm x)^2\sin\alpha\,.\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} + \frac{x(l\pm x)^2(x+\cos\alpha)\,d\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2} - 2D_2(x,\alpha)\,d\alpha,$$

welches auch kürzer folgendermafsen dargestellt werden kann:

$$dE_3(x,\alpha) = (l\pm x)^2\, d\,\mathrm{arc\,tang}\frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha} - 2D_2(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Setzt man $x = \frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$, so findet sich hieraus

$$dE_3(u,\alpha) = -\left(l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)^2 du - 2D_2(u,\alpha)\,d\alpha.$$

Nach diesen Vorbereitungen suchen wir die Formeln, welche die Eigenschaften der Function $E_3(x,\alpha)$ enthalten. Zunächst findet man sogleich,

dafs für diese Function eben so wie für die Function $D_3(x, \alpha)$ folgende Formeln gelten:

124. $$E_3(-x^n, n\alpha) = n^2 \sum_0^{n-1}{}_x E_3\left(-x, \alpha + \frac{2x\pi}{n}\right),$$

125. $$E_3(+x^n, n\alpha) = n^2 \sum_0^{n-1}{}_x E_3\left(-x, \alpha + \frac{(2x+1)\pi}{n}\right).$$

Setzt man ferner $\frac{1}{x}$ statt $x$, so erhält man

$$E_3\left(\frac{1}{x}, \alpha\right) = -E_3(x, \alpha) + C.$$

Die Constante dieser Formel hat zwei von einander verschiedene Werthe. So lange nemlich $x$ continuirlich sich verändert, von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, verändert sich auch $E_3(x, \alpha)$ continuirlich, und behält auch, wenn $x$ unendlich grofs wird, immer einen endlichen Werth: wenn aber $x$ von dem Werthe $-\infty$ auf den Werth $+\infty$ überspringt, oder wenn in $E_3\left(\frac{1}{x}, \alpha\right)$ $x$ aus dem Negativen in's Positive übergeht, so macht der Werth dieser Function einen Sprung. Deshalb ist die Constante dieser Gleichung für die beiden Fälle, wenn $x$ positiv und wenn $x$ negativ ist, besonders zu bestimmen nöthig. Setzt man in dem ersten Falle $x = 1$, so hat man $C = 2E_3(1, \alpha)$; setzt man für den zweiten Fall $x = -1$, so hat man $C = 2E_3(-1, \alpha)$. Diese beiden Werthe der Constante lassen sich aber leicht durch Kreisbogen ausdrücken; denn für $x = 1$ ist

$$dE_3(1, \alpha) = -2D_2(1, \alpha)\, d\alpha,$$

und da, wie wir oben §. 5. (33.) gefunden haben, $D_2(\alpha, -2\alpha) = \alpha^2 - \frac{1}{12}\pi^2$, oder, was dasselbe ist, $D_2(1, \alpha) = \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{12}\pi^2$ ist, in den Grenzen $\alpha = -\pi$ bis $\alpha = +\pi$, so hat man

$$dE_3(1, \alpha) = -\tfrac{1}{2}\alpha^2\, d\alpha + \tfrac{1}{6}\pi^2\, d\alpha,$$

und nach Ausführung der Integration

126. $$E_3(1, \alpha) = -\tfrac{1}{6}\alpha^3 + \tfrac{1}{6}(\pi^2\alpha) = -\tfrac{1}{6}(\alpha + \pi)\,\alpha(\alpha - \pi),$$

in den Grenzen $\alpha = -\pi$ bis $\alpha = +\pi$. Setzt man $\alpha - \pi$ statt $\alpha$, so erhält man zugleich

127. $$E_3(-1, \alpha) = -\tfrac{1}{6}\alpha^3 + \tfrac{1}{2}\alpha^2\pi - \tfrac{1}{3}\alpha\pi^2 = -\tfrac{1}{6}\alpha(\alpha - \pi)(\alpha - 2\pi)$$

in den Grenzen $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$.

Hiernach hat man die Formeln

128. $$\begin{cases} E_3(x,\alpha)+E_3\left(\frac{1}{x},\,\alpha\right) = -\tfrac{1}{3}(\alpha+\pi)\alpha(\alpha-\pi), \\ \text{wenn } x \text{ positiv ist und } \alpha \text{ in den Grenzen } -\pi \text{ und } +\pi \text{ liegt, und} \\ E_3\,(x,\alpha)+E_3\left(\frac{1}{x},\,\alpha\right) = -\tfrac{1}{3}\alpha(\alpha-\pi)(\alpha-2\pi), \\ \text{wenn } x \text{ negativ ist und } \alpha \text{ in den Grenzen } 0 \text{ und } 2\pi \text{ liegt.} \end{cases}$$

Setzt man $x=\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$, so kann man die Formeln auch folgendermafsen darstellen:

$$129.\quad E_3(u,\alpha)+E_3(-u-\alpha,\alpha) = L,$$

wo unter der Voraussetzung, dafs $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen,

$L = -\frac{1}{3}(\alpha+\pi)\,\alpha(\alpha-\pi)$ ist, wenn $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0,
$L = -\frac{1}{3}\alpha(\alpha-\pi)(\alpha-2\pi)$, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt.

Die übrigen Formèln entwickeln wir wieder aus denen für die Function $\Lambda_3(x)$ auf dieselbe Weise, wie wir die Formeln der Function $D_3(x,\alpha)$ oben gefunden haben. Wird in der Formel (92.) §. 11. $xe^{\alpha i}$ statt $x$ gesetzt und aufserdem $1-xe^{\alpha i}=re^{-ui}$, so giebt der imaginäre Theil dieser Formel

$$E_3\left(\frac{x}{r},\alpha+u\right)-E_3(-r,u)+E_3(-x,\alpha) = L,$$

wo $L$ der Theil der Formel ist, welcher die logarithmischen Integrale von der zweiten und ersten Ordnung enthält. Da ferner $1-xe^{\alpha i}=re^{-ui}$ gesetzt ist, so ist

$$x = \frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)},\qquad r = \frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)},\qquad \frac{x}{r} = \frac{\sin u}{\sin\alpha}.$$

Substituirt man diese Werthe, so hat man, nach der einfacheren Art der Bezeichnung:

$$E_3(-u,u+\alpha)-E_3(\alpha,u)+E_3(u,\alpha) = L.$$

Differenziirt man nun in Beziehung auf $u$, so findet sich

$$\left(l\frac{\sin u}{\sin\alpha}\right)^2-2D_2(-u,\,u+\alpha)+2D_2(\alpha,u)-\left(l\,\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)^2 = \frac{dL}{du}.$$

Vertauscht man jetzt in der Formel (31.) §. 5. $u$ und $\alpha$, so zeigt sich, dafs

$\frac{dL}{du}=-2\alpha u-u^2+\frac{1}{3}\pi^2$ ist, wenn $\alpha$, $u+\alpha$ und $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, und

$\frac{dL}{du} = -2(\alpha-\pi)u-u^2+\frac{1}{3}\pi^2$, wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen und $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0.

Die Integration giebt daher

$L = -\alpha u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}\pi^2 u + \text{const.}$, wenn $\alpha$, $u+\alpha$ und $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, und

$L = -(\alpha-\pi)u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}\pi^2 u + \text{const.}$, wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen und $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0.

Bestimmt man jetzt die Constanten durch den Fall $u=0$, so findet sich dafs sie beide gleich Null zu nehmen sind, und man hat die Formel

$$130. \quad E_3(-u, u+\alpha) - E_3(\alpha, u) + E_3(u, \alpha) = L,$$

wo, unter der Voraussetzung dafs $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen,

$L = -\alpha u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}\pi^2 u$ ist, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$,

$L = -(\alpha-\pi)u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}\pi^2 u$ wenn $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Um nun die allgemeinere Grundformel für die Function $E_3(x, \alpha)$ herzuleiten, welche der Formel (110.) für die Function $D_3(x, \alpha)$ und der Formel (93.) für die Function $A_3(x)$ entspricht, setze man wieder in dieser $xe^{\alpha i}$ statt $x$ und $ye^{\beta i}$ statt $y$ und aufserdem $1-xe^{\alpha i} = re^{-ui}$, $1-ye^{\beta i} = \varrho e^{-vi}$. Werden alsdann die imaginären Functionen $A_3$ in ihre realen und imaginären Theile zerlegt, von welchen hier nur die letzteren zu berücksichtigen sind, und bezeichnet man alle logarithmischen Integrale von der zweiten und ersten Ordnung, welche darin vorkommen können, einfach durch $L$, so erhält man

$$E_3\left(\frac{-x\varrho^2}{yr^2}, \alpha-\beta+2u-2v\right) + E_3\left(-\frac{x}{y}, \alpha-\beta\right) + E_3(-xy, \alpha+\beta) =$$
$$2E_3\left(\frac{-x\varrho}{yr}, \alpha-\beta+u-v\right) + 2E_3\left(\frac{x\varrho}{r}, \alpha+u-v\right) + 2E_3\left(-\frac{\varrho}{r}, u-v\right)$$
$$+ 2E_3\left(\frac{yr}{\varrho}, \beta-u+v\right) + 2E_3(-x, \alpha) + 2E_3(-y, \beta) + L.$$

Die Richtigkeit dieser Formel wird wieder durch Differenziation bewiesen, durch welche zugleich der Theil $L$ näher bestimmt wird. Hierzu wenden wir wieder die beiden Hülfswinkel $\varphi$ und $\psi$ an, welche wir schon oben §. 13. benutzt haben, nemlich

$$\varphi = \text{arc tang}\frac{xy\sin(\alpha+\beta)}{1-xy\cos(\alpha+\beta)}, \qquad \psi = \text{arc tang}\frac{x\sin(\alpha-\beta)}{y-x\cos(\alpha-\beta)}.$$

Durch diese beiden Hülfswinkel wird

$$\varphi - u = \text{arc tang}\frac{-x\varrho\sin(\alpha+u-v)}{r+x\varrho\cos(\alpha+u-v)}; \quad \psi - u = \text{arc tang}\frac{x\varrho\sin(\alpha-\beta+u-v)}{yr-x\varrho\cos(\alpha-\beta+u-v)};$$

$$\varphi - v = \text{arc tang}\frac{-yr\sin(\beta+v-u)}{\varrho+yr\cos(\beta+v-u)}; \quad \psi - \beta - u = \text{arc tang}\frac{\varrho\sin(u-v)}{r-\varrho\cos(u-v)};$$

$$\varphi + \psi - 2u = \text{arc tang}\frac{x\varrho^2\sin(\alpha-\beta+2u-2v)}{yr^2-x\varrho^2\cos(\alpha-\beta+2u-2v)}.$$

128.
$$E_3(x,\alpha)+E_3\left(\frac{1}{x},\alpha\right)=-\tfrac{1}{6}(\alpha+\pi)\alpha(\alpha-\pi),$$
wenn $x$ positiv ist und $\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, und
$$E_3(x,\alpha)+E_3\left(\frac{1}{x},\alpha\right)=-\tfrac{1}{6}\alpha(\alpha-\pi)(\alpha-2\pi),$$
wenn $x$ negativ ist und $\alpha$ in den Grenzen 0 und $2\pi$ liegt.

Setzt man $x=\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}$, so kann man die Formeln auch folgendermaßen darstellen:

$$129.\quad E_3(u,\alpha)+E_3(-u-\alpha,\alpha)=L,$$

wo unter der Voraussetzung, dafs $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen,

$L=-\frac{1}{6}(\alpha+\pi)\alpha(\alpha-\pi)$ ist, wenn $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0,

$L=-\frac{1}{6}\alpha(\alpha-\pi)(\alpha-2\pi)$, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt.

Die übrigen Formeln entwickeln wir wieder aus denen für die Function $A_3(x)$ auf dieselbe Weise, wie wir die Formeln der Function $D_3(x,\alpha)$ oben gefunden haben. Wird in der Formel (98.) §. 11. $xe^{\alpha i}$ statt $x$ gesetzt und aufserdem $1-xe^{\alpha i}=re^{-ui}$, so giebt der imaginäre Theil dieser Formel

$$E_3\left(\frac{x}{r},\alpha+u\right)-E_3(-r,u)+E_3(-x,\alpha)=L,$$

wo $L$ der Theil der Formel ist, welcher die logarithmischen Integrale von der zweiten und ersten Ordnung enthält. Da ferner $1-xe^{\alpha i}=re^{-ui}$ gesetzt ist, so ist

$$x=\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)},\qquad r=\frac{\sin\alpha}{\sin(u+\alpha)},\qquad \frac{x}{r}=\frac{\sin u}{\sin\alpha}.$$

Substituirt man diese Werthe, so hat man, nach der einfacheren Art der Bezeichnung:

$$E_3(-u,u+\alpha)-E_3(\alpha,u)+E_3(u,\alpha)=L.$$

Differenziirt man nun in Beziehung auf $u$, so findet sich

$$\left(l\frac{\sin u}{\sin\alpha}\right)^2-2D_2(-u,u+\alpha)+2D_2(\alpha,u)-\left(l\frac{\sin u}{\sin(u+\alpha)}\right)^2=\frac{dL}{du}.$$

Vertauscht man jetzt in der Formel (31.) §. 5. $u$ und $\alpha$, so zeigt sich, dafs

$\frac{dL}{du}=-2\alpha u-u^2+\frac{1}{3}\pi^2$ ist, wenn $\alpha$, $u+\alpha$ und $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, und

$\frac{dL}{du}=-2(\alpha-\pi)u-u^2+\frac{1}{3}\pi^2$, wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen und $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0.

Die Integration giebt daher

$L = -\alpha u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}\pi^2 u + \text{const.}$, wenn $\alpha$, $u+\alpha$ und $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen, und

$L = -(\alpha-\pi)u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}\pi^2 u + \text{const.}$, wenn $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen und $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0.

Bestimmt man jetzt die Constanten durch den Fall $u=0$, so findet sich dafs sie beide gleich Null zu nehmen sind, und man hat die Formel

130. $$E_3(-u, u+\alpha) - E_3(\alpha, u) + E_3(u, \alpha) = L,$$

wo, unter der Voraussetzung dafs $\alpha$ und $u+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen,

$L = -\alpha u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}\pi^2 u$ ist, wenn $u$ in den Grenzen 0 und $\pi$,

$L = -(\alpha-\pi)u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}\pi^2 u$ wenn $u$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 liegt.

Um nun die allgemeinere Grundformel für die Function $E_3(x, \alpha)$ herzuleiten, welche der Formel (110.) für die Function $D_3(x, \alpha)$ und der Formel (93.) für die Function $A_3(x)$ entspricht, setze man wieder in dieser $x e^{\alpha i}$ statt $x$ und $y e^{\beta i}$ statt $y$ und aufserdem $1 - x e^{\alpha i} = r e^{-ui}$, $1 - y e^{\beta i} = \varrho e^{-vi}$. Werden alsdann die imaginären Functionen $A_3$ in ihre realen und imaginären Theile zerlegt, von welchen hier nur die letzteren zu berücksichtigen sind, und bezeichnet man alle logarithmischen Integrale von der zweiten und ersten Ordnung, welche darin vorkommen können, einfach durch $L$, so erhält man

$$E_3\left(\frac{-x\varrho^2}{yr^2}, \alpha-\beta+2u-2v\right) + E_3\left(-\frac{x}{y}, \alpha-\beta\right) + E_3(-xy, \alpha+\beta) =$$
$$2E_3\left(\frac{-x\varrho}{yr}, \alpha-\beta+u-v\right) + 2E_3\left(\frac{x\varrho}{r}, \alpha+u-v\right) + 2E_3\left(-\frac{\varrho}{r}, u-v\right)$$
$$+ 2E_3\left(\frac{yr}{\varrho}, \beta-u+v\right) + 2E_3(-x, \alpha) + 2E_3(-y, \beta) + L.$$

Die Richtigkeit dieser Formel wird wieder durch Differenziation bewiesen, durch welche zugleich der Theil $L$ näher bestimmt wird. Hierzu wenden wir wieder die beiden Hülfswinkel $\varphi$ und $\psi$ an, welche wir schon oben §. 13. benutzt haben, nemlich

$$\varphi = \text{arc tang}\frac{xy\sin(\alpha+\beta)}{1-xy\cos(\alpha+\beta)}, \qquad \psi = \text{arc tang}\frac{x\sin(\alpha-\beta)}{y-x\cos(\alpha-\beta)}.$$

Durch diese beiden Hülfswinkel wird

$$\varphi - u = \text{arc tang}\frac{-x\varrho\sin(\alpha+u-v)}{r+x\varrho\cos(\alpha+u-v)}; \quad \psi - u = \text{arc tang}\frac{x\varrho\sin(\alpha-\beta+u-v)}{yr-x\varrho\cos(\alpha-\beta+u-v)};$$

$$\varphi - v = \text{arc tang}\frac{-yr\sin(\beta+v-u)}{\varrho+yr\cos(\beta+v-u)}; \quad \psi - \beta - u = \text{arc tang}\frac{\varrho\sin(u-v)}{r-\varrho\cos(u-v)};$$

$$\varphi + \psi - 2u = \text{arc tang}\frac{x\varrho^2\sin(\alpha-\beta+2u-2v)}{yr^2-x\varrho^2\cos(\alpha-\beta+2u-2v)}.$$

Diese Kreisbogen kommen alle in den Differenzialen der Functionen $E_3$ vor, welche die zu differenzürende Formel enthält, und deshalb wird durch diese einfachen Ausdrücke derselben die Rechnung aufserordentlich vereinfacht. Das vollständige Differenzial der Function $E_3$ enthält aufserdem noch das logarithmische Integral zweiter Ordnung $D_2$, welches nur dann wegfällt, wenn das zweite Element constant ist. Damit nun diese Functionen $D_2$, welche in dem Endresultate von selbst wegfallen, nicht erst in die Rechnung hineingezogen werden dürfen, wollen wir auch hier die Differenziation in Beziehung auf $u$ und $v$ ausführen, jedoch so, dafs $u-v=\gamma$ constant genommen wird, oder $du-dv=0$. Hiernach giebt die Differenziation der obigen Formel:

$$-\left(l\frac{x\varrho^2}{y\varrho^2}\right)^2(d\varphi+d\psi-2du)-\left(l\frac{x}{y}\right)^2d\psi-(lxy)^2d\varphi=$$
$$-2\left(l\frac{x\varrho}{yr}\right)^2(d\psi-du)-2\left(l\frac{x\varrho}{r}\right)^2(d\varphi-du)-2\left(l\frac{\varrho}{r}\right)^2(d\psi-du)$$
$$-2\left(l\frac{yr}{\varrho}\right)^2(d\varphi-du)-2(lx)^2du-2(ly)^2du+dL.$$

Sammelt man jetzt die Glieder, welche $d\psi$, $d\varphi$ und $du$ enthalten einzeln, so sieht man, dafs sie alle für sich verschwinden und es bleibt nur $dL=0$; also $L=$ const., das heifst, $L$ ist unabhängig von $u$ und $v$, kann aber die Differenz $u-v$ enthalten, welche bei der Differenziation als constant betrachtet werden ist. Setzt man daher $u=v+\gamma$, so dafs die Formel nur die vier Gröfsen $v$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ enthält, so ist $L$ unabhängig von $v$, also eine Function von $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$. Um nun die Constante $L$ zu bestimmen, setze ich $v=-\gamma$, was $u=0$, $x=0$, $r=1$ giebt, und erhalte so

$$2E_3(-\varrho,\gamma)+2E_3\left(\frac{y}{\varrho},\beta-\gamma\right)+2E_3(-y,\beta)-L=0,$$
$$\text{wo}\quad y=\frac{-\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)},\quad \varrho=\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)}.$$

Vergleicht man diesen Werth des $L$ mit der Formel (129.), so findet man

$$L=2\beta\gamma^2-\tfrac{2}{3}\gamma^3+\tfrac{1}{3}\pi^2\gamma,$$

wenn $\beta$ und $\beta-\gamma$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen und $\gamma$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, und

$$L=2(\beta-\pi)\gamma^2-\tfrac{2}{3}\gamma^3+\tfrac{1}{3}\pi^2\gamma,$$

wenn $\beta$ und $\beta-\gamma$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen und $\gamma$ in den Grenzen 0 und $\pi$.

Diese Bestimmung der Constante $L$ pafst aber nur für diejenigen Werthe des $v$, welche dem bestimmten Werthe $v = -\gamma$ nahe genug liegen: denn sobald, indem $v$ wächst oder abnimmt, die ersten Elemente einer oder mehrerer von den in der Formel enthaltenen Functionen $E_3$ unendlich werden, findet eine Discontinuität Statt, und $L$ ändert plötzlich seinen Werth. Dies ist allemal dann der Fall, wenn $\sin v$ oder $\sin(v+\beta)$ oder $\sin(v+\alpha+\gamma)$ gleich Null wird. Man kann sich aber leicht überzeugen, dafs bei allen Veränderungen, welche die Constante erleidet, dieselbe immer eine ganze rationale Function dritten Grades der Kreisbogen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ bleibt. Da nämlich die Veränderungen der Constante nur daher kommen, dafs die ersten Elemente einiger Functionen $E_3$ von dem Werthe $+\infty$ auf $-\infty$ überspringen, so darf man nur untersuchen, welche discontinuirliche Veränderung die Function $E_3$ bei dieser Gelegenheit erleidet. Nach der Formel (128.) ist

$$E_3(+\infty, \alpha) = -\tfrac{1}{6}(\alpha+\pi)\alpha(\alpha-\pi); \quad E_3(-\infty, \alpha) = -\tfrac{1}{6}\alpha(\alpha-\pi)(\alpha-2\pi).$$

Die discontinuirliche Veränderung bei dem Uebergange aus einem dieser Werthe in den andern beträgt also

$$-\tfrac{1}{6}(\alpha+\pi)\alpha(\alpha-\pi) + \tfrac{1}{6}\alpha(\alpha-\pi)(\alpha-2\pi) = -\pi\alpha(\alpha-\pi).$$

Die Veränderungen der Constante können daher nur darin bestehen, dafs gewisse Theile von dieser Form zu denselben hinzutreten; und da diese ganz und rational und nur vom zweiten Grade sind, so mufs die Constante immer eine ganze rationale Function dritten Grades der Kreisbogen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ bleiben. Die Bestimmung aller besonderen Werthe des $L$, welche den verschiedenen Intervallen der Veränderlichen $v$ angehören, hat durchaus keine Schwierigkeiten, wenn man für $v$ diejenigen Werthe nimmt, welche von den Grenzwerthen der Intervalle unendlich wenig verschieden sind. Da aber dabei 24 besondere Fälle zu unterscheiden sind, wodurch die Rechnung weitläuftig wird, so übergehen wir die nähere Bestimmung des $L$ für diese allgemeine Formel und werden diesen Theil nur für die einfacheren specielleren Formeln genau bestimmen, welche wir aus der allgemeinen ableiten werden.

Durch Einführung der beiden Hülfswinkel $\varphi$ und $\psi$ und durch die andere Art der Bezeichnung, nach welcher $E_3\left(\frac{-\sin u}{\sin(u+\alpha)}, \alpha\right) = E_3(u, \alpha)$ ist, kann die allgemeine Formel auch folgendermafsen dargestellt werden:

**131.** $E_3(\varphi+\psi-2u, \alpha-\beta+2u-2v)+E_3(\psi, \alpha-\beta)+E_3(\varphi, \alpha+\beta) =$
$2E_3(\varphi-u, \alpha-\beta+u-v)+2E_3(\varphi-u, \alpha+u-v)+2E_3(\psi-\beta-u, u-v)$
$+2E_3(\varphi-v, \beta+v-u)+2E_3(u, \alpha)+2E_3(v, \beta)+L,$

$$\text{wo} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin u \sin v \sin(\alpha+\beta)}{\sin(u+\alpha)\sin(v+\beta)-\sin u \sin v \cos(\alpha+\beta)},$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sin u \sin(v+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin(u+\alpha)\sin v-\sin u \sin(v+\beta)\cos(\alpha-\beta)},$$

und $L$ eine rationale Function vom dritten Grade der Gröfsen $\alpha, \beta$ und $u-v$ ist.

Einen einfacheren, speciellen Fall dieser Formel erhält man, wenn man $u=v$ nimmt, so dafs $\psi=v+\beta$ ist. Dann ist

**132.** $E_3(\varphi-v+\beta, \alpha-\beta)+E_3(v+\beta, \alpha-\beta)+E_3(\varphi, \alpha+\beta) =$
$2E_3(\beta, \alpha-\beta)+2E_3(\varphi-v, \alpha)+2E_3(\varphi-v, \beta)+2E_3(v, \alpha)+2E_3(v, \beta)+L,$

$$\text{wenn} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin^2 v \sin(\alpha+\beta)}{\sin(v+\alpha)\sin(v+\beta)-\sin^2 v\cos(\alpha+\beta)}$$

ist und wenn $\alpha$, $\beta$ und $v+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegen. Ferner ist

1) $L=0$, wenn $v+\alpha$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
2) $L=-2\pi\beta(2\beta-\pi)$, wenn $v+\alpha$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ und $\alpha+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
3) $L=-2\pi\beta(2\beta-\pi)+2\pi(\alpha+\beta-\pi)^2$, wenn $v+\alpha$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$, und $\alpha+\beta$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt;
4) $L=2\pi(\beta-\pi)(2\beta-\pi)-2\pi(\alpha+\beta-\pi)^2$, wenn $v+\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und 0, und $\alpha+\beta$ in den Grenzen 0 und $\pi$ liegt;
5) $L=2\pi(\beta-\pi)(2\beta-\pi)$, wenn $v+\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und 0 und $\alpha+\beta$ in den Grenzen $\pi$ und $2\pi$ liegt.

Setzt man hierin weiter $\alpha=\beta$, so kann nur der erste der angegebenen fünf Fälle Statt haben und es ist

**133.** $E_3(\varphi, 2\alpha) = 4E_3(\varphi-v, \alpha)+4E_3(v, \alpha),$

$$\text{wenn} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin^2 \sin 2\alpha}{\sin^2(v+\alpha)-\sin^2 v\cos 2\alpha}.$$

Diese Formel stimmt mit der in dem allgemeinen Ausdruck (124.) enthaltenen Formel $E_3(-x^2, 2\alpha) = 4E_3(-x, \alpha)+4E_3(+x, \alpha)$ vollständig überein.

Eine elegante Formel erhält man aus der allgemeinen Formel (131.), wenn man $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ und $\beta=\frac{1}{2}\pi$ nimmt und alsdann einige der Functionen $E_3$ nach der Formel (129.) verwandelt und $u-v=\gamma$ setzt; nämlich:

**134.** $E_3(2v, 2\gamma) = 2E_3(v, \gamma)+2E_3(v+\frac{1}{2}\pi, \gamma)+2E_3(v, \gamma+\frac{1}{2}\pi)$
$+2E_3(v+\frac{1}{2}\pi, \gamma+\frac{1}{2}\pi)-2E_3(v+\gamma, \frac{1}{2}\pi)-2E_3(v, \frac{1}{2}\pi)+L.$

In dieser Formel ist unter der Voraussetzung, dafs $v$ und $\gamma$ beide in den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen:

1) $L=\frac{1}{4}\pi^2(2\gamma-\pi)$, wenn $v+\gamma$ in den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ oder in den Grenzen $-\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ liegt;

2) $L=\frac{1}{4}\pi^2(2\gamma+\pi)$, wenn $v+\gamma$ in den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und 0 oder in den Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$ liegt.

Andere specielle Formeln, welche man nach Belieben aus der allgemeinen Formel (131.) ableiten kann, übergehen wir, weil sie fast alle weniger einfach ausfallen.

## §. 16.

Die Reihen-Entwickelungen der Function $E_3(x,\alpha)$ sind denen der Function $D_3(x,\alpha)$ ganz entsprechend und werden auf dieselbe Weise gefunden. Setzt man nämlich

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha}=t,$$

so hat man durch theilweise Integration:

$$E_3(x,\alpha)=(lx)^2\,t-2lx\int\frac{dx}{x}\,t+2\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,t.$$

Entwickelt man nun $t$ in eine Reihe, so hat man bekanntlich

$$t=\frac{x\sin\alpha}{1}-\frac{x^2\sin2\alpha}{2}+\frac{x^3\sin3\alpha}{3}-\dots.$$

Setzt man statt $t$ diese Reihe und führt die angedeuteten Integrationen aus, so hat man

$$135.\quad E_3(x,\alpha)=$$
$$(lx)^2\operatorname{arc\,tang}\frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha}-2lx\left(\frac{x\sin\alpha}{1^2}-\frac{x^2\sin2\alpha}{2^2}+\frac{x^3\sin3\alpha}{3^2}-\dots\right)$$
$$+2\left(\frac{x\sin\alpha}{1^3}-\frac{x^2\sin2\alpha}{2^3}+\frac{x^3\sin3\alpha}{3^3}-\dots\right).$$

Setzt man hierin $\frac{1}{x}$ statt $x$ und verwandelt sodann $E_3\left(\frac{1}{x},\alpha\right)$ in $E_3(x,\alpha)$ nach der Formel (128.), so hat man

$$136.\quad E_3(x,\alpha)=$$
$$C-(lx)^2\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\alpha}{x+\cos\alpha}-2lx\left(\frac{\sin\alpha}{1^2x}-\frac{\sin2\alpha}{2^2x^2}+\frac{\sin3\alpha}{3^2x^3}-\dots\right)$$
$$-2\left(\frac{\sin\alpha}{1^3x}-\frac{\sin2\alpha}{2^3x^2}+\frac{\sin3\alpha}{3^3x^3}-\dots\right),$$

wo $C = -\frac{1}{6}(\alpha+\pi)\alpha(\alpha-\pi)$, wenn $x$ positiv ist und $\alpha$ in den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ liegt;

$C = -\frac{1}{6}\alpha(\alpha-\pi)(\alpha-2\pi)$, wenn $x$ negativ ist und $\alpha$ in den Grenzen 0 und $2\pi$ liegt.

Von diesen beiden Reihen dient die eine dazu, die Werthe des $E_3(x,\alpha)$ zu berechnen, wenn der absolute Werth des $x$ kleiner als Eins ist; die andere, wenn derselbe gröfser als Eins ist. Nur für den Fall, dafs $x$ einem der Werthe $+1$ oder $-1$ sehr nahe kommt, sind sie nicht wohl anwendbar, weil sie alsdann zu langsam convergiren. Für diesen Fall aber erhält man wieder leicht eine nach Potenzen von $lx$ geordnete Reihen-Entwickelung, oder, was dasselbe ist, eine nach Potenzen von $z$ geordnete Entwickelung der Function

$$E_3(-e^z,\alpha) = -\int_0 \frac{z^2 e^z \sin\alpha\, dz}{1-2e^z\cos\alpha+e^{2z}} + E_3(-1,\alpha).$$

Der Ausdruck unter dem Integrationszeichen wird leicht auf folgende Form gebracht:

$$\frac{e^z\sin\alpha}{1-2e^z\cos\alpha+e^{2z}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha+iz) + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha-iz),$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Entwickelt man daher nach dem *Taylor*schen Satze, so hat man

$$\frac{e^z\sin\alpha}{1-2e^z\cos\alpha+e^{2z}} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{d^2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^2}\,\frac{z^2}{1.2} + \frac{d^4\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^4}\,\frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots\right),$$

und wenn man mit $z^2dz$ multiplicirt und integrirt,

137. $E_3(-e^z,\alpha) =$

$$E_3(-1,\alpha) - \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha.\frac{z^3}{3} - \frac{d^2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^2}\,\frac{z^5}{1.2.5} + \frac{d^4\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^4}\,\frac{z^7}{1.2.3.4.7} - \ldots\right),$$

Die hierin vorkommenden Differenzialquotienten von $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ haben folgende Werthe:

$$\frac{d^2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^2} = \frac{4\cos\frac{1}{2}\alpha}{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3},\qquad \frac{d^4\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^4} = \frac{4(\cos\frac{3}{2}\alpha+11\cos\frac{1}{2}\alpha)}{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^5},$$

$$\frac{d^6\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{d\alpha^6} = \frac{4(\cos\frac{5}{2}\alpha+57\cos\frac{3}{2}\alpha+302\cos\frac{1}{2}\alpha)}{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^7}.$$

Diese Reihen-Entwickelung ist in den Grenzen $z = -\alpha$ und $z = +\alpha$ convergent, wenn $\alpha$ ein in den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ liegender Bogen ist. Die Entwickelung von $E_3(+e^z,\alpha)$ erhält man aus ihr leicht, wenn man $\alpha-\pi$ statt $\alpha$ setzt. Bemerkenswerth ist der specielle Fall $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, für welchen die Differenzialquotienten von $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ gerader Ordnungen in die bekannten Coefficienten der Secantenreihe übergehen.

Für diesen Fall hat man daher

$$138.\quad E_3(-e^z, \tfrac{1}{2}\pi) =$$
$$\tfrac{1}{16}\pi^3 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{5.z^5}{1.2.5} + \frac{61 z^7}{1.2.3.4.7} - \frac{1385 z^9}{1.2.3.4.5.6.9} + \ldots\right).$$

## §. 17.

Es ist nicht uninteressant, die Eigenschaften der logarithmischen Integrale von der dritten Ordnung, welche wir hier entwickelt haben, mit denen zweiter Ordnung zu vergleichen. Die Grundformeln für beide Ordnungen stimmen darin überein, dafs in ihnen gewisse Aggregate von zwei oder mehreren solchen Transcendenten durch Logarithmen und Kreisbogen ausgedrückt werden, und dies scheint eine durchgehende Eigenschaft der logarithmischen Integrale aller Ordnungen zu sein, welche wir auch an einigen specielleren logarithmischen Integralen von der vierten und fünften Ordnung aufzeigen werden. Für die Integrale der höheren Ordnungen aber verlieren die Grundformeln immer mehr und mehr ihre Einfachheit, indem namentlich die Anzahl der in den Formeln vorkommenden Transcendentnn immer beträchtlicher wird. Der Grund hiervon liegt darin, dafs jede Formel für logarithmische Integrale von einer höheren Ordnung, mehrere einzelne Formeln für die entsprechenden Integrale der nächst niederen Ordnung in sich vereinigt und gewissermafsen als Bestandtheile enthält, in welche sie zerlegt werden kann. Dies läfst sich an den hier behandelten logarithmischen Integralen von der dritten und zweiten Ordnung sehr klar zeigen. Nimmt man z. B. die Formel (108.) §. 13.

$$D_3(-u, u+\alpha) + D_3(u, \alpha) + D_3(\alpha, u) = L$$

und differenziirt sie in Beziehung auf $u$, so erhält man $E_2(-u, u+\alpha) + E_2(\alpha, u) = 0$. Differenziirt man sie in Beziehung auf $\alpha$, so erhält man $E_2(-u, u+\alpha) + E_2(u, \alpha) = 0$. Nimmt man aber $u+\alpha = \text{const.}$ und differenziirt, so wird $E_2(u, \alpha) - E_2(\alpha, u) = 0$. Diese drei Formeln für das logarithmische Integral zweiter Ordnung $E_2$, welche mit den oben §. 8. gefundenen (67., 70. und 71.) übereinstimmen, sind also vereint in der entsprechenden Formel für das logarithmische Integral dritter Ordnung enthalten, weshalb diese Formel nothwendigerweise complicirter sein mufs als jene. Ueberhaupt kann man durch Differenziation aus den gefundenen Ausdrücken für die logarithmischen Integrale dritter Ordnung eine grofse Anzahl von Formeln für die Integrale zweiter Ordnung gewinnen, welche

zum Theil mit den bereits gefundenen übereinstimmen, theils aber neu sind. Nimmt man z. B. die allgemeine Grundformel (131.) für die Function $E_2$ und differenziirt dieselbe in Beziehung auf $\alpha$ und $\beta$, jedoch so, dafs $\alpha-\beta$ constant genommen wird, so erhält man genau die allgemeine Grundformel (25.) §. 4. für die Function $D_2$: differenziirt man aber die Formel (131.) so, dafs $\beta$, $u$ und $v$ als constant und $\alpha$ allein als variabel betrachtet wird, so erhält man eine Formel von folgender Art:

$$139.\quad D_2(\varphi+\psi-2u, \alpha-\beta+2u-2v)+D_2(\psi, \alpha-\beta)+D_2(\varphi, \alpha+\beta) = 2D_2(\psi-u, \alpha-\beta+u-v)+2D_2(\varphi-u, \alpha+u-v)+2D_2(u, \alpha)+M,$$

wo $\varphi$ und $\psi$ dieselben Bedeutungen haben wie in Formel (131.) und $M$ ein von Kreisbogen abhängiger Theil ist. Differenziirt man die Formel (134.) in Beziehung auf $\gamma$, so erhält man eine neue Formel für die Function $D_2$, nämlich die Formel

$$140.\quad D_2(2v, 2\gamma) = D_2(v, \gamma)+D_2(v+\tfrac{1}{2}\pi, \gamma)+D_2(v, \gamma+\tfrac{1}{2}\pi) + D_2(v+\tfrac{1}{2}\pi, \gamma+\tfrac{1}{2}\pi)-\tfrac{1}{2}(l\,\mathrm{tang}(v+\gamma))^2,$$

und diese ist wieder nur ein specieller Fall einer allgemeineren Formel, welche folgendermafsen dargestellt werden kann:

$$141.\quad D_2(nv, n\gamma) = \sum_0^{n-1}{}_x \sum_0^{n-1}{}_h D_2\left(v+\frac{x\pi}{n}, \gamma+\frac{h\pi}{n}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_0^{n-1}{}_x \sum_0^{n-1}{}_h \left(l\frac{\sin\left(v+\gamma+\frac{x\pi}{n}\right)}{\sin\left(v+\gamma+\frac{h\pi}{n}\right)}\right)^2.$$

---

## Dritter Theil.
## Ueber einige logarithmische Integrale von der vierten und fünften Ordnung.

### §. 18.

Nach denselben Principien, welche wir für die Untersuchung der logarithmischen Integrale zweiter und dritter Ordnung in Anwendung gebracht haben, könnte man auch die von der vierten Ordnung und überhaupt von allen höheren Ordnungen behandeln. Es reichen aber schon für die vierte Ordnung nicht mehr die beiden von zwei Elementen abhängigen Transcendenten aus, welche den Integralen $D$ und $E$ zweiter und dritter Ordnung entsprechen, sondern man würde zu diesen noch eine von vier Ele-

menten abhängige Transcendente hinzunehmen müssen. Aus diesem Grunde, und da die Grundformeln für die höheren Transcendenten immer complicirter werden, lassen wir die Vollständigkeit der Untersuchung fallen und wollen hier nur die Grundformeln für das einfachste logarithmische Integral vierter Ordnung

$$A_4(x) = \int_0 \frac{(l \pm x)^3\, dx}{1+x}$$

und für das diesem entsprechende Integral fünfter Ordnung herleiten.

Verwandelt man zunächst $x$ in $\frac{1}{x}$, so erhält man

$$A_4\left(\frac{1}{x}\right) = -\int (l \pm x)^3 \left(\frac{dx}{1+x} - \frac{dx}{x}\right)$$

oder

$$A_4(x) + A_4\left(\frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{4}(l \pm x)^4 + C.$$

Für $x = 0$ und $x = \pm\infty$ wird die Continuität der in der Formel vorkommenden Functionen unterbrochen, weshalb die Constante für die beiden Intervalle $x = -\infty$ bis $x = 0$ und $x = 0$ bis $x = +\infty$ besonders zu bestimmen ist. Setzt man $x = +1$, so erhält man $C = 2A_4(+1)$; setzt man aber $x = -1$, so erhält man $C = 2A_4(-1)$. Es ist daher

$$142. \quad A_4(x) + A_4\left(\frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{4}(l \pm x)^4 + 2A_4(\pm 1),$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn $x$ positiv, die unteren, wenn $x$ negativ ist. Statt $A_4(+1)$ und $A_4(-1)$ kann man auch ihre Ausdrücke durch die Zahl $\pi$ setzen, denn es ist bekanntlich

$$A_4(+1) = \tfrac{7}{120}\pi^4, \qquad A_4(-1) = -\tfrac{1}{15}\pi^4.$$

Eine andere einfache Grundformel erhält man, wenn man $x$ in $-x^2$ verwandelt und sodann das Integral $A_4(-x^2)$ in zwei Integrale von derselben Art zerlegt, nämlich in

$$143. \quad A_4(-x^2) = 8A_4(-x) + 8A_4(+x).$$

Um nun eine allgemeine Grundformel zu erhalten, welche zwei von einander unabhängige Gröfsen $x$ und $y$ in sich enthält, wende ich eine ähnliche Methode an, wie für die Herleitung der entsprechenden Grundformel (93.) der Function $A_3(x)$, und bezeichne hier, damit die Rechnung und die Formel selbst einfacher werden,

$$1 - x \text{ durch } \xi \quad \text{und} \quad 1 - y \text{ durch } \eta.$$

Ich mache nun von folgender identischen Gleichung Gebrauch:

$$(la^2b)^3+(lab^2)^3-6(lab)^3-3(la)^3-3(lb)^3=0,$$

und substituire für $a$ und $b$ nach einander folgende vier Werthe:

$$a=\frac{x\eta}{\xi} \text{ und } b=\frac{y\xi}{\eta}, \qquad a=y\xi \text{ und } b=\frac{x}{\eta\xi},$$

$$a=\frac{x}{\eta} \text{ und } b=\frac{y}{\xi}, \qquad a=x\eta \text{ und } b=\frac{y}{\eta\xi};$$

was folgende vier Gleichungen giebt:

$$\left(l\frac{x^2y\eta}{\xi}\right)^3+\left(l\frac{x\xi y^2}{\eta}\right)^3-6(lxy)^3-3\left(l\frac{x\eta}{\xi}\right)^3-3\left(l\frac{y\xi}{\eta}\right)^3=0,$$

$$\left(l\frac{x\xi y^2}{\eta}\right)^3+\left(l\frac{x^2y}{\xi\eta^2}\right)^3-6\left(l\frac{xy}{\eta}\right)^3-3(ly\xi)^3-3\left(l\frac{x}{\eta\xi}\right)^3=0,$$

$$\left(l\frac{x^2y}{\xi\eta^2}\right)^3+\left(l\frac{xy^2}{\xi^2\eta}\right)^3-6\left(l\frac{xy}{\xi\eta}\right)^3-3\left(l\frac{x}{\eta}\right)^3-3\left(l\frac{y}{\xi}\right)^3=0,$$

$$\left(l\frac{x^2y\eta}{\xi}\right)^3+\left(l\frac{xy^2}{\xi^2\eta}\right)^3-6\left(l\frac{xy}{\xi}\right)^3-3(lx\eta)^3-3\left(l\frac{y}{\eta\xi}\right)^3=0.$$

Ich setze ferner der Kürze wegen

$$1-xy=\alpha, \qquad 1-x\eta=\gamma, \qquad 1-\frac{x}{\eta}=\delta, \qquad 1-\frac{yx}{\eta}=\varepsilon.$$

Dieses giebt

$$1+\frac{x^2y\eta}{\xi}=\frac{\alpha.\gamma}{\xi}; \qquad dl\left(1+\frac{x^2y\eta}{\xi}\right)=\frac{d\alpha}{\alpha}+\frac{d\gamma}{\gamma}-\frac{d\xi}{\xi},$$

$$1+\frac{x\xi y^2}{\eta}=\alpha\varepsilon, \qquad dl\left(1+\frac{x\xi y^2}{\eta}\right)=\frac{d\alpha}{\alpha}+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$1-\frac{x^2y}{\xi\eta^2}=\frac{\delta.\varepsilon}{\xi}, \qquad dl\left(1-\frac{x^2y}{\xi\eta^2}\right)=\frac{d\delta}{\delta}+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}-\frac{d\xi}{\xi},$$

$$1-\frac{xy^2}{\xi^2\eta}=\frac{\gamma.\delta}{\xi^2}, \qquad dl\left(1-\frac{xy^2}{\xi^2\eta}\right)=\frac{d\gamma}{\gamma}+\frac{d\delta}{\delta}-\frac{2d\xi}{\xi}.$$

Ich multiplicire jetzt die erste der obigen vier Gleichungen mit $\frac{d\alpha}{\alpha}$, die zweite mit $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$, die dritte mit $\frac{d\delta}{\delta}-\frac{d\xi}{\xi}$, die vierte mit $\frac{d\gamma}{\gamma}-\frac{d\xi}{\xi}$, und addire alsdann alle vier Gleichungen. Dies giebt folgende Gleichung:

$$\left(l\frac{x^2y\eta}{\xi}\right)^3\left(\frac{d\alpha}{\alpha}+\frac{d\gamma}{\gamma}-\frac{d\xi}{\xi}\right)+\left(l\frac{x\xi y^2}{\eta}\right)^3\left(\frac{d\alpha}{\alpha}+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)+\left(l\frac{x^2y}{\xi\eta^2}\right)\left(\frac{d\delta}{\delta}+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}-\frac{d\xi}{\xi}\right)$$

$$+\left(l\frac{xy^2}{\xi^2\eta}\right)^3\left(\frac{d\gamma}{\gamma}+\frac{d\delta}{\delta}-\frac{2d\xi}{\xi}\right)-6(lxy)^3\frac{d\alpha}{\alpha}-6\left(l\frac{yx}{\eta}\right)^3\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}-6\left(l\frac{xy}{\xi\eta}\right)^3\left(\frac{d\delta}{\delta}+\frac{d\xi}{\xi}\right)$$

$$-6\left(l\frac{xy}{\xi}\right)^3\left(\frac{d\gamma}{\gamma}-\frac{d\xi}{\xi}\right)-3\left(l\frac{y\xi}{\eta}\right)^3\frac{d\alpha}{\alpha}-3(ly\xi)^3\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}-3\left(l\frac{y}{x}\right)^3\left(\frac{d\delta}{\delta}-\frac{d\xi}{\xi}\right)$$

$$-3\left(l\frac{y}{\xi\eta}\right)^3\left(\frac{d\gamma}{\gamma}-\frac{d\xi}{\xi}\right)-3\left(l\frac{x\eta}{\xi}\right)^3\left(\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{d\xi}{\xi}\right)-3\left(l\frac{x}{\eta\xi}\right)^3\left(\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}-\frac{d\xi}{\xi}\right)$$

$$-3\left(l\frac{x}{\eta}\right)^3\frac{d\delta}{\delta}-3(lx\eta)^3\frac{d\gamma}{\gamma}-3\left(\left(l\frac{x\eta}{\xi}\right)^3+\left(l\frac{x}{\eta\xi}\right)^3-\left(l\frac{x}{\eta}\right)^3-(lx\eta)^3\right)\frac{d\xi}{\xi}=0.$$

Wenn man jetzt erwägt, dafs $dA_4(x) = l(x)dl(1+x)$ und $dA_4(-x) = l(x)dl(1-x)$ ist, so sieht man sogleich, dafs alle einzelnen Theile dieser Gleichung die Differenziale von bestimmten Functionen $A_4$ sind. Nur der letzte Theil macht davon eine Ausnahme. Verwandelt man ihn aber in $-6\left(l\frac{x}{\xi}\right)^3\frac{d\xi}{\xi} + 6(lx)^3\frac{d\xi}{\xi} + 18(l\eta)^2 l\xi\frac{d\xi}{\xi}$, so läfst er sich ebenfalls durch die Function $A_4$ und durch Logarithmen unmittelbar integriren und man erhält durch Ausführung der Integration:

$$A_4\left(\frac{x^2y\eta}{\xi}\right) + A_4\left(\frac{y^2x\xi}{\eta}\right) + A_4\left(-\frac{x^2y}{\eta^2\xi}\right) + A_4\left(-\frac{xy^2}{\xi^2\eta}\right)$$
$$-6A_4(-xy) - 6A_4\left(\frac{xy}{\eta}\right) - 6A_4\left(-\frac{xy}{\xi\eta}\right) - 6A_4\left(\frac{xy}{\xi}\right)$$
$$-3A_4\left(\frac{y\xi}{\eta}\right) - 3A_4(-y\xi) - 3A_4\left(-\frac{y}{\xi}\right) - 3A_4\left(\frac{y}{\eta\xi}\right)$$
$$-3A_4\left(\frac{x\eta}{\xi}\right) - 3A_4\left(\frac{x}{\eta\xi}\right) - 3A_4\left(-\frac{x}{\eta}\right) - 3A_4(-x\eta)$$
$$+6A_4(-x) + 6A_4\left(\frac{x}{\xi}\right) + 9(l\eta)^2(l\xi)^2 + \text{const.} = 0.$$

Da die Constante nur eine Function von $y$ sein kann, so kann man ihr den Werth $6A_4(-y) + 6A_4\left(\frac{y}{\eta}\right) + K$ geben. Bei diesem Werthe kann man in der Formel die Gröfsen $x$ und $y$ mit einander vertauschen, ohne dafs die Formel eine Aenderung erleidet; und hieraus folgt, dafs die neue Constante $K$ nicht nur von $x$, sondern auch von $y$ unabhängig sein mufs. Diese Constante kann nur dann ihren Werth ändern, wenn in der Formel eine Discontinuität Statt hat; welches der Fall ist, wenn $\xi$ oder $\eta$ gleich Null werden, oder, was dasselbe ist, wenn $x$ oder $y$ gleich Eins werden. Die Constante ist also für folgende vier Fälle besonders zu bestimmen: 1) wenn $1-x$ und $1-y$ beide positiv sind; 2) wenn $1-x$ positiv und $1-y$ negativ ist; 3) wenn $1-x$ negativ und $1-y$ positiv ist; 4) wenn $1-x$ und $1-y$ beide negativ sind. Für die beiden ersten Fälle hat man sogleich $K=0$, wenn man $x=0$ setzt. Eben so hat man auch für den dritten Fall $K=0$, wenn man $y=0$ setzt. Für den vierten Fall aber erhält man, wenn man $x=2$ und $y=2$ setzt, wodurch $\xi=-1$ und $\eta=-1$ wird:

$$4A_4(8) - 24A_4(-4) - 24A_4(+2) + 24A_4(-2) + K = 0.$$

Dieser Ausdruck der Constante ist zu complicirt und es läfst sich aus demselben die Gröfse von $K$ nur mühsam berechnen. Einen sehr einfachen

Ausdruck aber findet man, wenn man für $x$ und $y$ die Grenzwerthe des vierten Falles nimmt, nämlich $x = m$ und $y = m$, wo $m = +\infty$. Hierdurch wird $\xi = -m$ und $\eta = -m$ und man erhält

$$2\Lambda_4(m^3) - 6\Lambda_4(-m^2) - 6\Lambda_4(m^2) - 6\Lambda_4(m) + 6\Lambda_4(-1)$$
$$- 4\Lambda_4(+1) + 9(lm)^4 + K = 0.$$

Da aber nach der Formel (142.) für $m = \infty$,

$$\Lambda_4(m^3) = \tfrac{81}{4}(lm)^4 + 2\Lambda_4(+1), \quad \Lambda_4(-m^2) = 4(lm)^4 + 2\Lambda_4(-1),$$
$$\Lambda_4(+m^2) = 4(lm)^4 + 2\Lambda_4(+1), \qquad \Lambda_4(m) = \tfrac{1}{4}(lm)^4 + 2\Lambda_4(+1)$$

ist, so erhält man durch Substitution dieser Werthe

$$K = 24\Lambda_4(+1) + 6\Lambda_4(-1) \qquad \text{oder} \qquad K = \pi^4,$$

da $\Lambda_4(-1) = -\frac{1}{15}\pi^4$ und $\Lambda_4(+1) = \frac{7}{120}\pi^4$ ist.

Die gefundene Formel kann nun vollständig folgendermaßsen dargestellt werden:

144. $$\Lambda_4\left(\frac{x^2 y\eta}{\xi}\right) + \Lambda_4\left(\frac{y^2 x\xi}{\eta}\right) + \Lambda_4\left(\frac{-x^2 y}{\eta^2 \xi}\right) + \Lambda_4\left(\frac{-y^2 x}{\xi^2 \eta}\right)$$
$$= 6\Lambda_4(-xy) + 6\Lambda_4\left(-\frac{xy}{\xi\eta}\right) + 6\Lambda_4\left(\frac{xy}{\eta}\right) + 6\Lambda_4\left(\frac{xy}{\xi}\right)$$
$$+ 3\Lambda_4(-x\eta) + 3\Lambda_4(-y\xi) + 3\Lambda_4\left(-\frac{x}{\eta}\right) + 3\Lambda_4\left(-\frac{y}{\xi}\right)$$
$$+ 3\Lambda_4\left(\frac{x\eta}{\xi}\right) + 3\Lambda_4\left(\frac{y\xi}{\eta}\right) + 3\Lambda_4\left(\frac{x}{\eta\xi}\right) + 3\Lambda_4\left(\frac{y}{\eta\xi}\right)$$
$$- 6\Lambda_4(-x) - 6\Lambda_4(-y) - 6\Lambda_4\left(\frac{x}{\xi}\right) - 6\Lambda_4\left(\frac{y}{\eta}\right) - 9(l\xi)^2(l\eta)^2 - K,$$

wo immer $K = 0$ ist, mit Ausnahme des Falles wo $1-x$ und $1-y$ beide negativ sind; in welchem Falle $K = \pi^2$ ist.

Bemerkenswerth ist der specielle Fall dieser Formel, in welchem $y = x$ ist. Für diesen erhält man durch Anwendung der Formel (143.):

145. $$\Lambda_4(x^3) + \Lambda_4\left(-\frac{x^3}{\xi^3}\right) = 3\Lambda_4(-x\xi) + 3\Lambda_4\left(\frac{x}{\xi^2}\right) + 6\Lambda_4\left(\frac{x^2}{\xi}\right)$$
$$+ 18\Lambda_4(-x) + 18\Lambda_4\left(\frac{x}{\xi}\right) + 27\Lambda_4(x) + 27\Lambda_4\left(-\frac{x}{\xi}\right) - \tfrac{3}{8}(lx)_4 - K,$$

wo $K = 0$, wenn $1-x$ positiv und $K = \frac{1}{2}\pi^4$, wenn $1-x$ negativ ist. Diese Formel scheint nächst den Formeln (142.) und (143.) die einfachste zu sein, welche es für die Function $\Lambda_4(x)$ überhaupt giebt; wenigstens haben die hier angewendeten Methoden keine einfachere gegeben.

## §. 19.

Das einfache logarithmische Integral von der fünften Ordnung

$$\int \frac{(l\pm x)^4\,dx}{1+x} = A_5(x)$$

hat zunächst wieder folgende zwei Ausdrücke, welche den Integralen $A$ aller Ordnungen zukommen:

$$146.\qquad A_5(x) - A_5\left(\frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{5}(lx)^5,$$

$$147.\qquad A_5(-x^2) = 16A_5(-x) + 16A_5(+x);$$

die allgemeinere Grundformel aber, welche zwei von einander unabhängige Quantitäten $x$ und $y$ enthält, wird auf ähnliche Weise gefunden, wie für das entsprechende Integral von der vierten Ordnung. Hierzu wird folgende identische Gleichung benutzt:

$$(la^2b) + (lab^2)^4 + \left(l\frac{a}{b}\right)^4 - 9(lab)^4 - 9(la)^4 - 9(lb)^4 = 0.$$

Substituirt man in derselben für $a$ und $b$ nach einander folgende sechs Werthe:

$$a = \frac{x\eta}{\xi} \text{ und } b = \frac{y\xi}{\eta}, \qquad a = \frac{x\eta}{y\xi} \text{ und } b = \frac{\xi}{\eta},$$

$$a = \frac{xy}{\xi} \text{ und } b = \frac{\eta\xi}{y}, \qquad a = \frac{xy}{\xi\eta} \text{ und } b = \frac{\xi}{y},$$

$$a = \frac{x}{\xi\eta} \text{ und } b = y\xi, \qquad a = \frac{x}{\xi y} \text{ und } b = \eta\xi,$$

so erhält man die sechs Gleichungen:

$$\left(l\frac{x^2y\eta}{\xi}\right)^4 + \left(l\frac{x\xi y^2}{\eta}\right)^4 + \left(l\frac{x\eta^2}{y\xi^2}\right)^4 - 9(lxy)^4 - 9\left(l\frac{x\eta}{\xi}\right)^4 - 9\left(l\frac{\xi y}{\eta}\right)^4 = 0,$$

$$\left(l\frac{x^2\eta}{\xi y^2}\right)^4 + \left(l\frac{x\xi}{y\eta}\right)^4 + \left(l\frac{x\eta^2}{y\xi^2}\right)^4 - 9\left(l\frac{x}{y}\right)^4 - 9\left(l\frac{x\eta}{\xi y}\right)^4 - 9\left(l\frac{\xi}{\eta}\right)^4 = 0,$$

$$\left(l\frac{x^2y\eta}{\xi}\right)^4 + \left(l\frac{x\xi\eta^2}{y}\right)^4 + \left(l\frac{xy^2}{\eta\xi^2}\right)^4 - 9(lx\eta)^4 - 9\left(l\frac{xy}{\xi}\right)^4 - 9\left(l\frac{\xi\eta}{y}\right)^4 = 0,$$

$$\left(l\frac{x^2y}{\xi\eta^2}\right)^4 + \left(l\frac{x\xi}{y\eta}\right)^4 + \left(l\frac{xy^2}{\eta\xi^2}\right)^4 - 9\left(l\frac{x}{\eta}\right)^4 - 9\left(l\frac{xy}{\xi\eta}\right)^4 - 9\left(l\frac{\xi}{y}\right)^4 = 0,$$

$$\left(l\frac{x^2y}{\xi\eta^2}\right)^4 + \left(l\frac{x\xi y^2}{\eta}\right)^4 + \left(l\frac{x}{\xi^2y\eta}\right)^4 - 9\left(l\frac{xy}{\eta}\right)^4 - 9\left(l\frac{x}{\xi\eta}\right)^4 - 9(l\xi y)^4 = 0,$$

$$\left(l\frac{x^2\eta}{\xi y^2}\right)^4 + \left(l\frac{x\xi\eta^2}{y}\right) + \left(l\frac{x}{\xi^2y\eta}\right)^4 - 9\left(l\frac{x\eta}{y}\right)^4 - 9\left(l\frac{x}{\xi y}\right)^4 - 9(l\xi\eta)^4 = 0.$$

Aufser diesen wird noch folgende identische Gleichung gebraucht, deren Richtigkeit sich leicht beweisen läfst:

$$\left(l\frac{x^2y\eta}{\xi}\right)^4+\left(l\frac{x^2y}{\xi\eta^2}\right)^4+\left(l\frac{x^2\eta}{\xi y^2}\right)^4+2\left(l\frac{x}{\xi^2y\eta}\right)^4+2\left(l\frac{xy^2}{\xi^2\eta}\right)^4+2\left(l\frac{x\eta^2}{\xi^2y}\right)^4$$
$$-9\left(l\frac{xy}{\xi}\right)^4-9\left(l\frac{x}{\xi y}\right)^4-9\left(l\frac{x\eta}{\xi}\right)^4-9\left(l\frac{x}{\eta\xi}\right)^4-9\left(l\frac{xy}{\xi\eta}\right)^4-9\left(\frac{x\eta}{\xi y}\right)^4$$
$$-9\left(l\frac{\xi}{y}\right)^4-9\left(l\frac{\xi}{\eta}\right)^4-9\left(l\frac{\xi\eta}{y}\right)^4-18(lx)^4+18\left(l\frac{x}{\xi}\right)^4+72\,l\left(\frac{x}{y}\right)(l\xi)^3$$
$$-36(l\xi)^4+72(l\eta)^3l\xi-216\,ly(l\eta)^2l\xi=0.$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$1-xy=\alpha,\quad 1-\frac{x}{y}=\beta,\quad 1-x\eta=\gamma,$$
$$1-\frac{x}{\eta}=\delta,\quad 1+\frac{xy}{\eta}=\varepsilon,\quad 1+\frac{x\eta}{y}=\zeta,$$

so erhält man

$$1+\frac{x^2y\eta}{\xi}=\frac{\alpha\gamma}{\xi},\quad 1+\frac{x\xi y^2}{\eta}=\alpha.\varepsilon,\quad 1-\frac{x\eta^2}{\xi^2y}=\frac{\alpha.\beta}{\xi^2},$$
$$1-\frac{x^2y}{\xi\eta^2}=\frac{\delta.\varepsilon}{\xi},\quad 1+\frac{x\xi\eta^2}{y}=\gamma.\zeta,\quad 1-\frac{xy^2}{\xi^2\eta}=\frac{\gamma.\delta}{\xi^2},$$
$$1-\frac{x^2\eta}{\xi y^2}=\frac{\beta.\zeta}{\xi},\quad 1-\frac{x\xi}{y\eta}=\beta.\delta,\quad 1+\frac{x}{\xi^2y\eta}=\frac{\varepsilon.\zeta}{\xi^2}.$$

Nach diesen Vorbereitungen erhält man die gesuchte Formel leicht auf folgende Weise. Man multiplicire die obigen sechs Gleichungen einzeln, wie sie auf einander folgen, mit $\frac{d\alpha}{\alpha}$, $\frac{d\beta}{\beta}$, $\frac{d\gamma}{\gamma}$, $\frac{d\delta}{\delta}$, $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ und $\frac{d\zeta}{\zeta}$ und addire die Producte; ferner multiplicire man die siebente Gleichung mit $\frac{d\xi}{\xi}$ und subtrahire das Product von den vorigen; in der hierdurch erhaltenen Gleichung, wenn sie so geordnet wird, dafs alle Glieder, welche denselben Logarithmus zur vierten Potenz erhoben enthalten, in eins zusammengefafst werden, sind alle einzelnen Glieder die Differenziale gewisser Functionen $\Lambda_5$, welche leicht zu erkennen sind. Führt man daher die Integrationen aus, so erhält man die folgende Formel:

148. $$\Lambda_5\left(\frac{x^2y\eta}{\xi}\right)+\Lambda_5\left(-\frac{x^2y}{\xi\eta^2}\right)+\Lambda_5\left(-\frac{x^2\eta}{\xi y^2}\right)+\Lambda_5\left(-\frac{x\xi}{y\eta}\right)+\Lambda_5\left(\frac{x\xi\eta^2}{y}\right)+\Lambda_5\left(\frac{x\xi y^2}{\eta}\right)$$
$$+\Lambda_5\left(\frac{x}{\xi^2y\eta}\right)+\Lambda_5\left(-\frac{x\eta^2}{\xi^2\eta}\right)+\Lambda_5\left(-\frac{xy^2}{\xi^2\eta}\right)-9\Lambda_5(-xy)-9\Lambda_5\left(\frac{-x}{y}\right)-9\Lambda_5(-x\eta)$$
$$-9\Lambda_5\left(\frac{-x}{\eta}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{xy}{\eta}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{x\eta}{y}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{xy}{\xi}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{x}{y\xi}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{x\eta}{\xi}\right)$$
$$-9\Lambda_5\left(\frac{x}{\eta\xi}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{-xy}{\xi\eta}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{-x\eta}{\xi y}\right)-9\Lambda_5(-\xi y)-9\Lambda_5(-\xi\eta)-9\Lambda_5\left(\frac{\xi y}{\eta}\right)$$
$$-9\Lambda_5\left(\frac{-y}{\xi}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{-\eta}{\xi}\right)-9\Lambda_5\left(\frac{y}{\eta\xi}\right)+18\Lambda_5(-x)+18\Lambda_5(-\xi)+18\Lambda_5\left(\frac{x}{\xi}\right)$$
$$+18\Lambda_5(-y)+18\Lambda_5(-\eta)+18\Lambda_5\left(\frac{y}{\eta}\right)-18\,l\left(\frac{x}{y}\right)(l\xi)^4+108\,ly(l\eta)^2(l\xi)^2$$
$$+\frac{36}{5}(l\xi)^5-36(l\eta)^3(l\xi)^2-18\Lambda_5(-1)=0.$$

Die Constante dieser langen Formel ist durch den Fall $x=0$ bestimmt worden, also zunächst nur gültig, wenn $1-x$ positiv ist; es ist aber leicht zu zeigen, dafs diese Constante ungeändert bleibt, wenn $1-x$ aus dem Positiven in's Negative übergeht, so dafs dieselbe also ganz allgemein gültig ist. Die Formel zeichnet sich durch eine besondere Art von Symmetrie aus, nemlich dafs immer die sechs Werthe $x$, $\frac{1}{x}$, $1-x$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{-x}{1-x}$ und $\frac{1-x}{-x}$ wiederkehren, und eben so die Werthe $y$, $\frac{1}{y}$, $1-y$, $\frac{1}{1-y}$, $\frac{-y}{1-y}$, $\frac{1-y}{-y}$; und wenn man für $x$ oder $y$ irgend einen anderen dieser sechs Werthe substituirt, so erleiden die in der Formel enthaltenen Functionen $\Lambda_5$ zusammengenommen keine andere Aenderung, als dafs in einigen derselben die umgekehrten Werthe ihrer Elemente vorkommen, welche nach der Formel $\Lambda_5(x)-\Lambda_5\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{5}(lx)^5$ wieder in die alte Form gebracht werden können. Deshalb läfst sich die Formel kürzer so darstellen:

$$\Sigma\Sigma\Lambda_5\left(-\frac{x(1-x)}{y(1-y)}\right)-\Sigma\Sigma\, 18\,\Lambda_5\left(-\frac{x}{y}\right)+\Sigma\, 36\,\Lambda(-x)+\Sigma\, 36\,\Lambda(-y)=L,$$

wo $L$ ein logarithmischer Theil ist und die Summenzeichen andeuten, dafs dem $x$ nach einander die Werthe $x$, $\xi$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\xi}$, $\frac{-x}{\xi}$, $\frac{-\xi}{x}$ und dem $y$ die Werthe $y$, $\frac{1}{y}$, $\eta$, $\frac{1}{\eta}$, $\frac{-y}{\eta}$ und $\frac{-\eta}{y}$ zu geben sind.

Den einfachsten speciellen Fall der allgemeinen Formel erhält man, wenn man $y=x$ nimmt und nach den Formeln (146.) und (147.) einige Vereinfachungen ausführt, nämlich:

149. $$\Lambda_5(x^3)+\Lambda_5(\xi^3)+\Lambda_5\left(\frac{-x^3}{\xi^3}\right)-9\,\Lambda_5\left(\frac{x^2}{\xi}\right)-9\,\Lambda_5\left(\frac{x}{\xi^2}\right)-9\,\Lambda_5(-x\xi)$$
$$-54\,\Lambda_5(-x)-54\,\Lambda_5(-\xi)-54\,\Lambda_5\left(\frac{x}{\xi}\right)-81\,\Lambda_5(x)-81\,\Lambda_5(\xi)-81\,\Lambda_5\left(\frac{-x}{\xi}\right)$$
$$+54\,lx\,(l\xi)^4-\tfrac{180}{5}(l\xi)^5-21\,\Lambda_5(-1)=0.$$

Da es hier gelungen ist, für die Transcendenten $\Lambda_2$, $\Lambda_3$, $\Lambda_4$ und $\Lambda_5$ allgemeine Formeln zu finden, in welchen eine Summe mehrerer solcher Functionen durch Logarithmen ausgedrückt wird, so kann man nach der Analogie schliefsen, dafs wohl auch für die entsprechenden logarithmischen Transcendenten aller höheren Ordnungen ähnliche Formeln Statt haben mögen. Ob dies aber wirklich der Fall sei, müssen wir dahingestellt sein lassen und können in dieser Beziehung nur Folgendes bemerken. Die

Grundformel für die Function $\Lambda_2(x)$ enthält nur rationale Brüche in sich, welche in Beziehung auf $x$ sowohl, als auch auf $y$, vom ersten Grade sind. Die drei Grundformeln für die Functionen $\Lambda_3(x)$, $\Lambda_4(x)$ und $\Lambda_5(x)$ enthalten aufserdem Brüche in sich, welche in Beziehung auf $x$ und $y$ vom zweiten Grade sind. Eine entsprechende Formel für die Functionen $\Lambda$ der höheren Ordnungen aber müfste aufser diesen auch Brüche enthalten, welche in Beziehung auf jede der beiden Variabeln von einem höheren Grade sein müfsten. Die Versuche, eine ähnliche Formel für das logarithmische Integral der sechsten Ordnung $\Lambda_6(x)$ zu finden, sind mir bisher nicht gelungen, weil, aufser der ungewöhnlichen Gröfse, welche eine solche Formel haben müfste, noch ganz eigenthümliche Schwierigkeiten eintreten. Es bleibt daher zweifelhaft, ob für die logarithmischen Integrale der höheren Ordnungen überhaupt Formeln Statt haben, welche den hier gegebenen ähnlich sind.

## §. 20.

Die ganze hier angestellte Untersuchung kann man noch aus einem anderen Gesichtspuncte auffassen, nämlich als die Theorie der Reihen

$$\frac{x}{1^n}-\frac{x^2}{2^n}+\frac{x^3}{3^n}-\frac{x^4}{4^n}+\dots.$$

$$\frac{x\cos\alpha}{1^n}-\frac{x^2\cos2\alpha}{2^n}+\frac{x^3\cos3\alpha}{3^n}-\dots.$$

$$\frac{x\sin\alpha}{1^n}-\frac{x^2\sin2\alpha}{2^n}+\frac{x^3\sin3\alpha}{3^n}-\dots;$$

denn diese Reihen sind für $n=2, 3, 4, 5$ u. s. w. logarithmische Transcendenten resp. von der zweiten, dritten, vierten, fünften u. s. w. Ordnung, und zwar in der Art, dafs sie vollständig die Stelle der Functionen $\Lambda_n(x)$, $D_n(x,\alpha)$ und $E_n(x,\alpha)$ ersetzen, da man leicht die Reihen durch diese Integrale und eben so, umgekehrt, diese Integrale durch die Reihen ausdrücken kann. Alle gefundenen Eigenschaften dieser Integrale lassen sich daher auch als Eigenschaften der Reihen darstellen. Der Kürze wegen aber wollen wir hier nur den Zusammenhang der ersten Reihe mit dem logarithmischen Integrale $\Lambda_n(x)$ etwas näher entwickeln. Bezeichnet man diese erste Reihe durch $R_n$, so dafs

$$R_n=\frac{x}{1^n}-\frac{x^2}{2^n}+\frac{x^3}{3^n}-\frac{x^4}{4^n}+\dots,$$

so hat man $R_1=\int\frac{dx}{1+x}$, $R_2=\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1+x}$, $R_3=\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1+x}$

u. s. w. und hieraus findet man leicht durch theilweise Integration:

$$1.R_2(x) = -A_2(x) + lx\,l(1+x),$$
$$1.2.R_3(x) = A_3(x) - 2lx\,A_2(x) + (lx)^2 l(1+x),$$
$$1.2.3.R_4(x) = -A_4(x) + 3lx\,A_3(x) - 3(lx)^2 A_2(x) + (lx)^3 l(1+x),$$
$$1.2.3.4.R_5(x) = A_5(x) - 4lx\,A_4(x) + 6(lx)^2 A_3(x) - 4(lx)^3 A_2(x) + (lx)^4 l(1+x)$$

u. s. w. und umgekehrt

$$A_2(x) = -R_2(x) + lx\,l(1+x),$$
$$A_3(x) = 2R_3(x) - 2lx\,R_2(x) + (lx)^2 l(1+x),$$
$$A_4(x) = -6R_4(x) + 6lx\,R_3 x - 3(lx)^2 R_2(x) + (lx)^3 l(1+x),$$
$$A_5(x) = 24R_5(x) - 24lx\,R_4(x) + 12(lx)^2 R_3(x) - 4(lx)^3 R_2(x) + (lx)^4 l(1+x)$$

u. s. w.

Substituirt man diese Werthe der Functionen $A$ in den für dieselben gefundenen Formeln, so erhält man die entsprechenden Formeln für die Reihen $R$. Hierbei tritt nun ein eigenthümlicher Umstand ein, welcher eine große Vereinfachung der Formeln erzeugt. Substituirt man nämlich den Werth von $A_2(x)$ in den Formeln des §. 2., so kommen dadurch nur die eine Transcendente $R_2(x)$ in die neue Formel, und außer dieser nur Logarithmen: drückt man aber in den Formeln des §. 11. $A_3(x)$ durch die Reihen $R$ aus, so kommt dadurch nicht nur $R_3$, sondern auch $R_2$ in die Formeln hinein: diejenigen Theile aber, welche $R_2$ enthalten, lassen sich dann allemal für sich durch Logarithmen ausdrücken, so dafs sie aus der Formel ganz wegfallen. Wenn man ferner in den Formeln des §. 18. $A_4$ durch die Reihen $R_2$, $R_3$ und $R_4$ ausdrückt, so lassen sich die Glieder, welche $R_3$ und $R$ enthalten, für sich durch Logarithmen ausdrücken, so dafs nur die Reihen $R$ von der vierten Ordnung in der Formel bleiben. Dasselbe ist der Fall, wenn man in den gefundenen Formeln für die Function $A_5$ diese Transcendenten durch die Reihen $R_5$; $R_4$, $R_3$ und $R_2$ ausdrückt; die Glieder, welche $R_4$, $R_3$ und $R_2$ enthalten, lassen sich dann ganz aus der Formel entfernen, so dafs nur die Reihen von der fünften Ordnung in derselben bleiben. Aus diesem Grunde sind die Formeln für die Reihen $R_2$, $R_3$, $R_4$ und $R_5$ denen für die Functionen $A_2$, $A_3$, $A_4$ und $A_5$ in ihren eigentlich transcendenten Theilen vollkommen gleich und nur die logarithmischen Theile derselben sind etwas verschieden. Da nun die Uebertragung der Eigenschaften der Functionen $A$ auf die Reihen $R$ keine Schwierigkeiten hat und wegen der Gröfse der Formeln blofs grofse Weitläuftigkeiten mit sich führen würde, so können wir dieselbe füglich hier übergehen.

---

# 18.

# Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend.

(Von Hrn. Professor *Staudt* in Erlangen.)

---

1. **B**ezeichnet man die Summe der *m*ten Potenzen der $x$ ersten positiven ganzen Zahlen durch $S^m(x)$, so ist, was auch $a$, $b$, $n$ für positive ganze Zahlen sein mögen:

$$S^n(ab) \equiv bS^n(a) + naS^{n-1}(a).S'(b-1), \text{ mod. } a^2.$$

Setzt man nämlich in der Congruenz:

$$(f+ga)^n \equiv f^n + naf^{n-1}g, \text{ mod. } a^2$$

für $f$ nach und nach die Werthe 1, 2, 3 .... $a$, und für $g$ nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3 .... $b-1$, so geht durch Addition der obige Satz hervor. Für den Beweis des nächstfolgenden Satzes ist schon die Congruenz $S^n(ab) \equiv bS^n(a)$, mod. $a$ hinreichend.

2. Wenn $a$, $b$, $c$, .... $l$ Primzahlen zu einander sind, so ist

$$\frac{S^n(abc\ldots.l)}{abc\ldots.l} - \frac{S^n(a)}{a} - \frac{S^n(b)}{b} - \frac{S^n(c)}{c} \ldots. - \frac{S^n(l)}{l} = \text{ einer ganzen Zahl.}$$

Nach dem Vorigen ist nämlich $S^n(abc\ldots.l) - bc\ldots.lS^n(a) - ac\ldots.lS^n(b) - ab\ldots.lS^n(c) \ldots. - abc\ldots. S^n(l)$ durch jede von den Zahlen $a, b, c, \ldots. l$ und also auch durch ihr Product theilbar.

3. Wenn $a$, $n$ beliebige positive ganze Zahlen sind, so ist

$$2S^{2n+1}(a) \equiv (2n+1)aS^{2n}(a), \text{ mod. } a^2.$$

Es folgt dieser Satz aus der Congruenz

$$v^{2n+1} + (a-v)^{2n+1} \equiv (2n+1)av^{2n}, \text{ mod. } a^2,$$

wenn für $v$ nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, .... $a$ gesetzt werden. Die Congruenz $2S^{2n+1}(a) \equiv 0$, mod. $a$ gilt auch noch, wenn $n=0$ ist.

4. Wenn $a$, $b$, $n$ beliebige positive ganze Zahlen sind, so ist

$$S^{2n}(ab) \equiv bS^{2n}(a), \text{ mod. } a^2.$$

Folgt aus 1. und 3.:

5. Wenn $a$, $r$, $n$ positive ganze Zahlen sind, so ist

$$\frac{S^{2n}(a^r)}{a^r} - \frac{S^{2n}(a)}{a} = \text{ einer ganzen Zahl.}$$

Für $r=1$ ist der Satz offenbar. Da ferner, wenn $\varrho$ eine positive ganze

Zahl bedeutet, nach dem Vorigen $S^{2n}(a^{\varrho+1}) \equiv a S^{2n}(a^{\varrho})$, mod. $a^{2\varrho}$, und also $\frac{S^{2n}(a^{\varrho+1})}{a^{\varrho+1}} - \frac{S^{2n}(a^{\varrho})}{a^{\varrho}} =$ einer ganzen Zahl ist, so ergiebt sich der Satz für ein anderes $r$, wenn für $\varrho$ nach und nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots r-1$ gesetzt werden.

6. Wenn $a, b, c, \ldots l$ Primzahlen zu einander, $n, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ aber beliebige positive ganze Zahlen sind, so ist nach 2. und 5.

$$\frac{S^{2n}(a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\ldots l^{\lambda})}{a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}} - \frac{S^{2n}(a)}{a} - \frac{S^{(2n)}(b)}{b} - \frac{S^{2n}(c)}{c} \ldots - \frac{S^{2n}(l)}{l} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

7. Wenn $a$ eine Primzahl und $n$ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, so ist entweder $\frac{S^{n}(a)}{a} + \frac{1}{a}$ oder $\frac{S^{n}(a)}{a}$ einer ganzen Zahl gleich, je nachdem nämlich $n$ durch $a-1$ theilbar oder nicht theilbar ist.

Im ersten Falle ist nämlich für jedes $x$, welches durch $a$ nicht theilbar ist, $x^{n} \equiv 1$ und also $S^{n}(a) \equiv a-1 \equiv -1$, mod. $a$. Im letzten Falle aber gilt die Congruenz $x^{n+1} \equiv x$, mod. $a$ nicht für jeden Werth von $x$. Da aber, wenn $x$ durch $a$ nicht theilbar ist, die Zahlen $x, 2x, 3x, \ldots ax$, den Zahlen $1, 2, 3, \ldots a$, wenn auch in veränderter Ordnung, congruent sind, so ist auch $x^{n} S^{n}(a) \equiv S^{n}(a)$ und also $S^{n}(a) \equiv 0$, mod. $a$.

8. Wenn $u, n$ beliebige positive ganze Zahlen sind, und $a, b, c, \ldots h$ diejenigen verschiedenen Primfactoren von $u$ bezeichnen, für welche $a-1$, $b-1, c-1, \ldots h-1$ Theiler von $2n$ werden, so ist nach 6. und 7.

$$\frac{S^{2n}(u)}{u} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ldots + \frac{1}{h} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Nach 3. ist also

$$\frac{2S^{2n-1}(u)}{u^{2}} + \frac{2n+1}{a} + \frac{2n+1}{b} + \frac{2n+1}{c} \ldots + \frac{2n+1}{h} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

9. Wenn $m \geqq 3$ und $x$ durch jede Primzahl theilbar ist, welche nicht gröfser als $m$ ist, so ist auch $x^{m-2}$ durch $m$ theilbar.

Es sei irgend ein Primfactor $a$ in $m$ $\alpha$mal enthalten, so enthält $x^{m-2}$ denselben wenigstens $(m-2)$mal, und es ist nur zu beweisen, dafs $m \geqq \alpha+2$ ist. Ist nun $\alpha = 1$, so ist der Annahme gemäfs $m \geqq \alpha+2$. Ist aber $\alpha > 1$, so ist $a^{\alpha} > \alpha+2$, und also noch weit mehr $m > \alpha+2$.

10. Wenn $B^{(n)}$ die $n$te *Bernoulli*sche Zahl bezeichnet, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ diejenigen Theiler von $n$ sind, für welche $2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma+1, \ldots 2\lambda+1$ Primzahlen werden, so ist:

$B^{(n)} \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\beta+1} + \frac{1}{2\gamma+1} \ldots + \frac{1}{2\lambda+1}\right) =$ einer ganzen Zahl,

wo $\pm$ gilt, wenn $n$ $\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}$ ist.

Es sei $x$ das Product aus allen Primzahlen, welche nicht gröfser als $2n+1$ sind, so ist, wenn der Satz für jede Zahl gilt, welche $< n$ ist, $\frac{S^{2n}(x)}{x} \mp B^{(n)} = \frac{1}{2}x^{2n-1} \mp 2n_2 B^{(n-1)} x . \frac{1}{2} x \pm 2n_4 B^{(n-2)} x . \frac{1}{2} x^3 \ldots + \frac{x^{2n}}{2n+1} =$ einer ganzen Zahl. Nach 8. ist aber auch $\frac{S^{2n}(x)}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\beta+1} + \frac{1}{2\gamma+1} \ldots + \frac{1}{2\lambda+1}$ eine ganze Zahl, woraus hervorgeht, dafs der Satz für $n$ gilt, wenn er für jede kleinere Zahl gilt. Nun gilt er für $n = 1$: also allgemein.

Anmerkung. Nach dem neuesten Blatte von *Schumachers* Astronomischen Nachrichten ist von Herrn *Thomas Clausen* eine Abhandlung über die *Bernoulli*schen Zahlen zu erwarten, in welcher unter andern auch obiges Theorem, welches ich bereits vor mehreren Jahren dem Herrn Hofrath *Gaufs* mitgetheilt habe, abgehandelt wird. Es gab mir dies Veranlassung, den Beweis, welchen ich davon fand, zu veröffentlichen.

Erlangen, den 16ten August 1840.

# 19.

# Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist.

(Von Herrn *Th. Clausen* in Altona.)

Von *Hippocrates* haben wir schon den Ausdruck des Flächen-Inhalts einer von zwei Kreisbogen begränzten Figur: es scheint mir merkwürdig, daſs man noch nicht mehrere gesucht hat. Es lassen sich leicht mit den Hülfsmitteln der jetzigen Analysis noch vier finden.

Es seien zwei Kreis-Ausschnitte von gleichem Flächen-Inhalte $ACBEA = AC'BE'A$ (Fig. 1.), deren Chorden $AB$ gleich sind: so wird, wie man leicht sieht, $CBC'AC$ der mondförmigen Figur $AEBE'A$ (Fig. 1.) gleich. Setzt man den Halbmesser des gröſsten Kreises $AC = r$, den Winkel des Ausschnittes $ACB = 2\varphi$; des kleinsten Kreises Halbmesser $AC' = r'$, den Winkel des Ausschnittes $AC'B = 2\varphi'$; so giebt die Gleichheit der Flächen folgende Gleichung:

$$1.\quad r^2\varphi = r'^2\varphi'$$

und die Gleichheit der Chorden:

$$2.\quad r\sin\varphi = r'\sin\varphi'.$$

Sind $m$ und $n$ ganze Zahlen und $\varphi = m\alpha$, $\varphi' = n\alpha$, so lassen sich $\sin\varphi$ und $\sin\varphi'$ algebraisch durch $\sin\alpha$ ausdrücken; und da der Gleichung (1.) durch die Werthe

$$r = \frac{a}{\sqrt{m}},\qquad r' = \frac{a}{\sqrt{n}}$$

Genüge geleistet wird, so verwandelt sich die Gleichung (2.) in

$$3.\quad \sqrt{n}.\sin m\alpha = \sqrt{m}.\sin n\alpha.$$

Aus dieser folgt eine algebraische Gleichung mit $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ als unbekannte Gröſse, die sich in folgenden Fällen durch Ausziehung von Quadratwurzeln oder geometrisch auflösen läſst.

I. Wenn $n = 2$, $m = 1$, wodurch man den Mond des *Hippocrates* findet.

II. Wenn $n = 3$, $m = 1$, so wird die Gleichung (3.)

$$\sqrt{3}.\sin\alpha = \sin 3\alpha,$$
$$\sqrt{3} = 1+2\cos 2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1).$$

**Die Gestalt dieses Mondes zeigt Fig. 2. Der Winkel des Ausschnittes des gröfsern Kreises wird 68°,5, des kleinern 205°,6 ungefähr.**

**III. Wenn $n = 3$, $m = 2$, so wird die Gleichung (3.)**

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos\alpha} = \sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

$$\frac{\cos 2\alpha^2 + 4\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha + 2} = \tfrac{3}{2}; \text{ folglich}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}.$$

**Die Gestalt dieses Mondes zeigt Fig. 1. Die Kreis-Ausschnitte enthalten 107°,2 und 160°,9.**

**IV. Wenn $n = 5$, $m = 1$, so wird**

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos 2\alpha^2 + 2\cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5} \text{ und}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{(5 + 4\sqrt{5})} - 1}{4}.$$

**Diesen Mond zeigt Fig. 3.; seine Bogen enthalten 46°,9 und 234°,4.**

**V. Wenn $n = 5$, $m = 3$, so ist**

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{4\cos 2\alpha^2 + 2\cos 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha + 1} = \sqrt{\tfrac{5}{3}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{\tfrac{5}{3}} - 1 + \sqrt{\left(\frac{20}{3} + \sqrt{\frac{20}{3}}\right)}}{4}.$$

**Die Form dieses Mondes ist in der vierten Figur dargestellt. Die Bogen enthalten 100°,8 und 168°,0.**

**Für jedes der angegebenen Verhältnisse der Winkel der Ausschnitte geben die Gleichungen *nur eine* brauchbare Wurzel. Ich glaube schwerlich, dafs sich die Gröfsen, die die Winkel der, andern Verhältnissen entsprechenden Ausschnitte bestimmen, geometrisch finden lassen.**

**Altona, den 18ten Juli 1840.**

# 20.

## Remarque sur les intégrales Eulériennes.

(Par Mr. *Stern*, Prof. à Gottingue.)

---

Dans le tome 15$^{\text{ième}}$ pag. 258 de ce Journal Mr. *Dirichlet* a donné une nouvelle démonstration de l'équation

$$1.\quad \Gamma a.\Gamma\left(a+\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\tfrac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\tfrac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-na}\,\Gamma(na).$$

Cette démonstration a l'avantage essentielle de reposer entièrement sur le calcul intégral et de ne demander pas la considération des développements infinis. Je vais donner ici une démonstration un peu différente du théorème qui jouit du même avantage. Pour cet effet je me sers des deux intégrales connues

$$2.\quad \frac{\partial\log\Gamma a}{\partial a}-\frac{\partial\log\Gamma b}{\partial b}=\int_0^1\frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{1-x}\,\partial x$$

et

$$3.\quad \int_0^1\left(\frac{x^{a-1}\,\partial x}{1-x}-\frac{n\,x^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x=\log n.$$

On trouve la première en partant, par exemple de l'équation

$$\int_0^1\left(e^{1-\frac{1}{x}}-x^a\right)\frac{\partial x}{x(1-x)}=\frac{\partial\log\Gamma a}{\partial a},$$

que Mr. *Dirichlet* a donnée à l'endroit cité. Quant à la seconde, *Legendre* a déjà essayé à la démontrer à priori, (*Traité des fonctions elliptiques, T. 2. pag. 466*) sans recourir à l'équation (1.), mais sa démonstration n'est applicable qu'au cas où l'on suppose que la valeur de $a$ est rationnelle. Or on peut l'établir généralement d'une manière fort simple. On remarquera aisément que la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{n\,x^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x$$

est indépendante de la valeur de $a$, c'est à dire que la différence des deux expressions

$$4.\quad \int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{n\,x^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x\qquad\text{et}\qquad 5.\quad \int_0^1\left(\frac{x^{b-1}}{1-x}-\frac{n\,x^{nb-1}}{1-x^n}\right)\partial x$$

est toujours égale à zéro. Car au lieu de cette différence on peut prendre la différence des intégrales définies

6. $\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}\partial x}{1-x} - \frac{x^{b-1}}{1-x}\right)\partial x$ et 7. $\int_0^1 n\left(\frac{x^{na-1}}{1-x^n} - \frac{x^{nb-1}}{1-x^n}\right)\partial x$.

Mais, si dans l'intégrale (7.) on remplace $x$ par $x^{\frac{1}{n}}$, les limites de l'intégrale seront les mêmes et elle prend immédiatement la forme de l'intégrale (6.). Donc les deux intégrales (6.) et (7.) sont égales; d'où il suit que les intégrales (4.) et (5.) le sont également. La valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{n x^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x$$

étant indépendante de la valeur de $a$, supposons $a = 1$, on aura

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial x}{1-x} - \frac{n x^{n-1}\partial x}{1-x^n}\right) = \log n,$$

et il suit de là que la formule (3.) est généralement exacte.

On peut aussi remplacer dans cette formule $a$ par $na$ et l'on aura alors

$$8. \quad \int_0^1 \left(\frac{x^{na-1}}{1-x} - \frac{n x^{nna-1}}{1-x^n}\right)\partial x = \log n.$$

Maintenant si dans la formule (2.) on met $na$ au lieu de $a$ et qu'on remplace successivement la lettre $b$ par $a$, $a+\frac{1}{n}$, $a+\frac{2}{n}$, .... $a+\frac{n-1}{n}$, on aura les équations

$$\frac{\partial \log \Gamma na}{n\partial a} - \frac{\partial \log \Gamma a}{\partial a} = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{na-1}}{1-x}\partial x,$$

$$\frac{\partial \log \Gamma na}{n\partial a} - \frac{\partial \log \Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)}{\partial a} = \int_0^1 \frac{x^{a-1+\frac{1}{n}} - x^{na-1}}{1-x}\partial x,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\partial \log \Gamma na}{n\partial a} - \frac{\partial \log \Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{n\partial a} = \int_0^1 \frac{x^{a-1+\frac{n-1}{n}} - x^{na-1}}{1-x}\partial x,$$

et en prenant la somme de toutes ces équations, on obtient

$$\frac{\partial \log \Gamma na}{\partial a} - \left(\frac{\partial \log \Gamma a}{\partial a} + \frac{\partial \log \Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)}{\partial a} \dots \frac{\partial \log \Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\partial a}\right)$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}} - \frac{n x^{na-1}}{1-x}\right)\partial x,$$

ou bien, en remplaçant $x$ par $x^n$:

$$9.\quad \frac{\partial \log \Gamma na}{\partial a} - \left(\frac{\partial \log \Gamma a}{\partial a} + \frac{\partial \log \Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)}{\partial a} \dots + \frac{\partial \log \Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\partial a}\right)$$
$$= n\int_0^1 \left(\frac{x^{na-1}}{1-x} - \frac{nx^{n.na-1}}{1-x^n}\right)\partial x = n \log n.$$

Delà il suit

$$10.\quad \log \Gamma a + \log \Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right) \dots + \log \Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) - \log \Gamma na$$
$$= -na \log n + \text{Const.}$$

et

$$11.\quad \frac{\Gamma a + \left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma na} = n^{-na}.A.$$

On déterminera alors par la méthode connue la valeur de $A$ qui, comme on sait, est égale à $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.n^{\frac{1}{2}}$.

## Druckfehler-Verzeichnifs zum 20sten Bande.

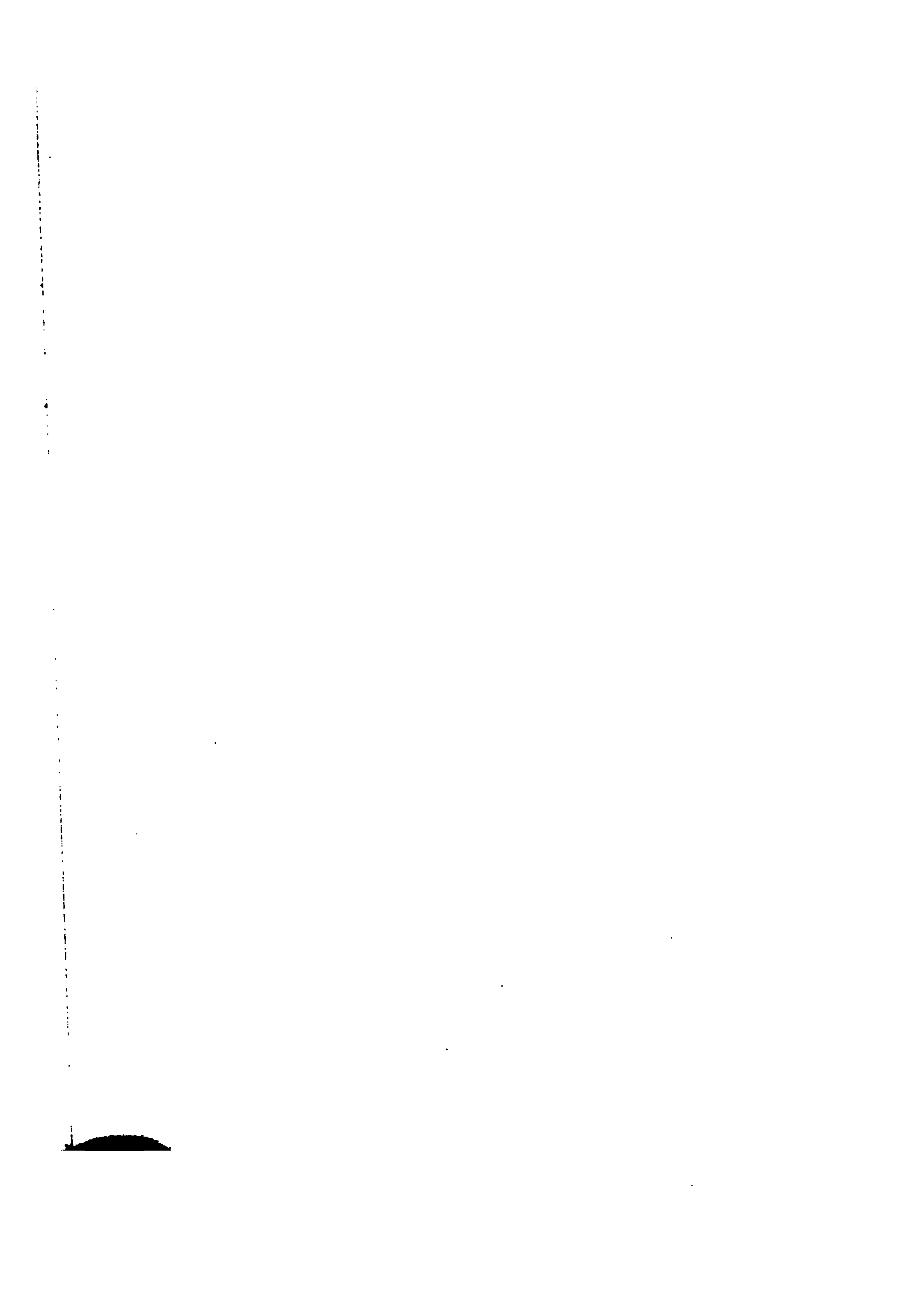
| | | | |
|---|---|---|---|
| Pag. 285 | lin. 27 | lege | deducamus loco deducemus |
| - 287 | - 4 | - | eliminandas l. eliminandae |
| - — | - 8 | - | Quem l. Quum |
| - — | - 21 | - | ponatur l. ponetur |
| - 288 | - 24 | - | perspectu l. perspecta |
| - 289 | - 7 | - | qualibet l. quaelibet |
| - 290 | - 21 | - | reliqua l. reliquam |
| - 291 | - 8 | - | congruere l. congruum |
| - — | - 11 | - | significet l. significat |
| - — | - 21 | - | polari l. poleri |
| - 292 | - 23 | - | alius l. alias |
| - — | - 27 | - | s. o. conjugatorum l. s. o. |
| - — | - 30 | - | quinque illa l. quinque |
| - — | - 32 | - | curva l. quoque |
| - — | - 33 | - | $s_{x,\lambda}$, quos l. $s_{n,\lambda}$, quas |
| - 293 | - 33 | - | hac l. has |
| - 294 | - 24 | - | enuntiet l. enuntiat |
| - 295 | - 35 | - | vocentur l. nocentur |
| - 297 | - 10 | - | complectantur l. complectentur |
| - — | - 13 | - | s. o. conjugatorum l. s. o. |
| - — | - 28 | - | diversas l. diversae |
| - 298 | - 27 | - | par l. per |
| - 299 | - 12 | - | siti l. sibi |
| Pag. 299 | lin. 14 | lege | hae loco hac |
| - — | - 31 | - | tangant l. tangunt |
| - 300 | - 21 | - | determinatam l. determinatum |
| - — | - 29 | - | ducta l. ductae |
| - 302 | - 13 | - | conjugatarum l. conjugatorum |
| - — | - 24 | - | polari l. polaris |
| - — | - 29 | - | polos l. polas |
| - 304 | - 16 | - | ductarum l. ductorum |
| - — | - 27 | - | ordinis conjugatorum l. ordinis |
| - 305 | - 13 | - | qua re l. quam |
| - — | - 13 | - | lineas l. lineae |
| - — | - 14 | - | vero quaestio l. rem questio |
| - — | - 23 | - | suscipiamus l. suscipiamus |
| - — | - 26 | - | polos l. polas |
| - 306 | - 14 | - | qua re l. quam |
| - — | - 15 | - | emineat l. eminent |
| - 307 | - 4 | - | sita l. siti |
| - — | - 28 | - | ordine l. ordini |
| - 308 | - 7 | - | notari l. notam |
| - — | - 11 | - | 8 l. $x$ |

Seite 324 ist in der Formel 6. und in den vorangehende Ausdrücken von $U$ und $V$ überall $P$ anstatt $p$ zu lesen.

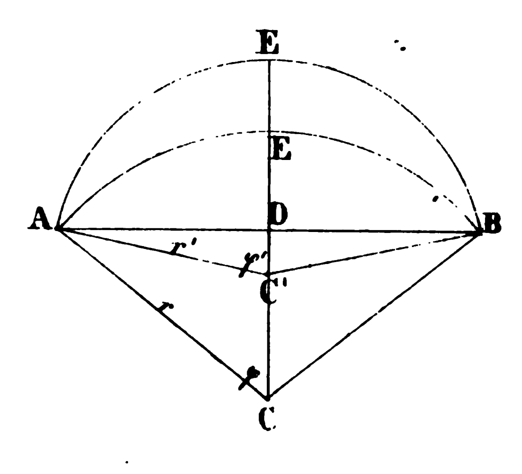
---

Im 21. Bd. H. 2. S. 186 Z. 18 v. o. mufs es heifsen $\log(1-2x+2x^4-2x^9)$ statt $\log(1-2q+2q^4-2q^9)$

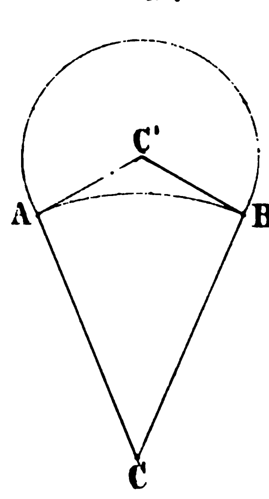
---



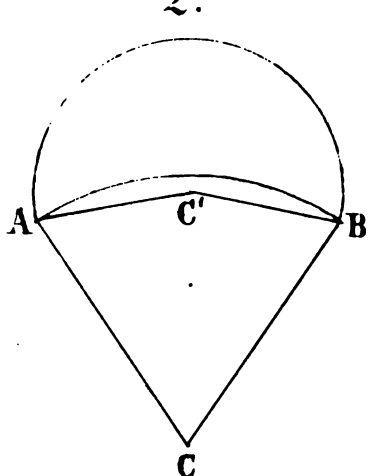
1.



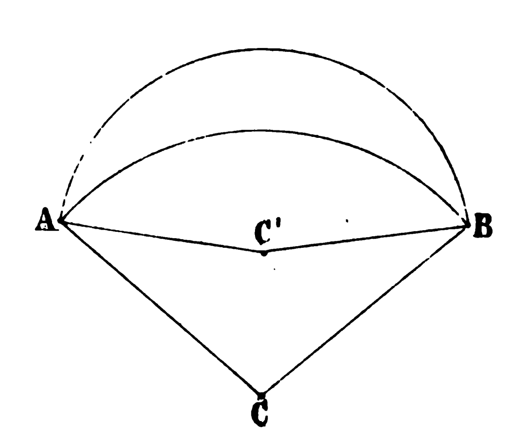

3.




2.




4.





115993

STORAGE

